مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٥)

الرياضيات التحليلية
بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الخامس
الحسن بن الهيثم
علم الهيئة، الهندسة الكُروية وحساب المثلّثات

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الخامس

الحسن بن الهيثم

علم الهيئة، الهندسة الكُروية وحساب المثلّثات

تُرْجِمَتْ هـذِهِ الأعمـالُ ونُشِـرَتْ
بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية،
ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٥)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الخامس

الحسن بن الهيثم

علم الهيئة، الهندسة الكُروية وحساب المثلّثات

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

الفهرسة أثناء النشر - إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة بدوي المبسوط

٥ ج (ج ٥، ٧٠٤ ص). - (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج٥)
محتويات: ج ٥. الحسن بن الهيثم: علم الهيئة، الهندسة الكروية وحساب المثلثات.
ببليوغرافية: ص ٦٨٩ - ٦٩٢.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.
ISBN 978-9953-82-377-5 (vol. 5)
ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب - تاريخ. ٢. ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن البصري. أ. المبسوط، بدوي (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.

510.1

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IX^{ème} au XI^{ème} siècle
vol. 5: Ibn Al-Haytham:
Astronomie, Géométrie sphérique et Trigonométrie
par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2006)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ - ١١٣
الحمراء - بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ - لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ - ٧٥٠٠٨٥ - ٧٥٠٠٨٦ - ٧٥٠٠٨٧ (+٩٦١١)
برقياً: «مرعربي» - بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (+٩٦١١)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

المحتويـات

القسم الثاني
الآلات والرياضيات: خطوط الساعات، الرخامات الأفقية، بركار الدوائر العظام

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية** و**مركز دراسات الوحدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبينٍّ هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِمِ جورج سارتون في كتابه المرجعي **مدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْمِ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثَم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/ ٤/ ١٤٣٢هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

لقد بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة بنشر أجزاء متتابعة من دراسة موسوعيّة متكاملة تطمح إلى تجميع وثائق الريّاضيّات التحليلية (هندسة اللامتناهيات في الصغر) المكتوبة بالعربية، وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد. ولقد صدرت حتّى الآن خمسة مجلّدات باللغة الفرنسية من هذه المجموعة القيِّمة، التي جاءت كمساهمة أساسية لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي، وتحقيق ونشر مخطوطاته وكتابة تاريخه.

ولقد كرَّس رشدي راشد هذا **المجلّد الخامس** لدراسة كتب ابن الهيثم في علم الهيئة. والجدير بالذكر هو أنّ أعمال ابن الهيثم في علم الفلك بقيت مجهولة. ولقد انتهى رشدي راشد في بحثه إلى نتيجةٍ تُغيِّر ما نعرفه عن تاريخ علم الهيئة، وهي أنَّ ابن الهيثم قد صاغ تصوُّراً جديداً لميكانيكا الأجرام السماوية المعروفة؛ ولقد بنى ابن الهيثم هذا التصوُّر الجديد لعلم الهيئة على دراسة حساب الفروق المنتهية، ودراسة تغيُّرات الأعظام وبعض دالات الهندسة الكروية. ولقد أكّد رشدي راشد في هذا المجلّد ما قدَّمته هذه البحوثُ في علم الفلك للرياضيَّات، كما بيَّن إلى أيّة درجة كانت بحوث ابن الهيثم في خطوط الساعات أكثر تقدُّماً من بحوث أسلافه. ولقد سمحت هذه الدراسة لرشدي راشد بالكشف عن اتجاهي البحث اللذين برزا بعد انتقاد ابن الهيثم لبطلميوس: أحدهما أدَّى إلى بناء هيئات خالية من التناقضات البطلمية، مثل هيئات نصير الدين الطوسي ومن بعدها هيئات ابن الشاطر وخلفائهما، والثاني أدَّى بابن الهيثم نفسه إلى تقديم سينماتيكا سماوية رياضية بشكل تام.

وأود أن أشكر الأستاذ رشدي راشد على السماح لي بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة الفرنسية الأصل،

وعلى إمدادي بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمت في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي اعتمدها ابن الهيثم، والتي كانت متداولة في عصره، وحاولت، من جهة أخرى، قدر الإمكان، انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللّبس. ولقد اعتمدت، غالباً، في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفَّق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع، بيروت ١٩٨٣).

ألفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلاّ في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

وأدرك جيداً، كما يُدرك كلُّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، وأشكر سلفاً أيّ نقد بنّاء في هذا الإطار.

بدوي المبسوط

فاتحــة

كان ـ وما زال ـ القصد من كتابة «الريّاضيّات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة» هو التأريخ لفصل من فصول الريّاضيّات في ضحى الإسلام منذ بزوغه إلى أن انتهى إلى الحسن بن الهيثم. ولم يكن هذا الاختيار وليد الصدفة ولا ابن الحظّ، فابن الهيثم هو الذي بلغ بهذا الفصل الذي بدأ مع بني موسى منتهاه. وكان وراء هذا الاختيار غرضان أردت تحقيقهما، **أوّلهما** هو اعتقادي، الذي اكتسبته من ممارستي التأليف في تاريخ وفلسفة الريّاضيّات والعلوم خلال نصف قرن، أنّه لا يكفي تحقيق رسالة من هنا ووريقات من هناك، كما هو دأب أكثر العاملين في هذا المجال للتأريخ للريّاضيّات والعلوم في الإسلام، كما أنّه لا يكفي سرد وقائع العلماء وأسماء كتبهم، وبعض نتائجهم للتأريخ لهم؛ بل لا بدّ من تصوُّر آخر للتأريخ، أعني على أنّه تأريخ لتقاليد، لأجيال من العلماء خلف بعضهم البعض، وأغنى الخلف أعمال السلف وذهبوا بها مذاهب لم تخطر على أذهانهم، ووقفوا هم أيضاً أمام عقبات جديدة. . . إلخ، أو باختصار شديد كتأريخ لتكوُّن العقلانيّات الرياضية والعلمية. أمّا **الغرض الآخر** والمرتبط بالأوَّل، فهو اكتشاف بنية التراث الريّاضي لمعرفة سماته الأساسية حتى تكون بين أيدي المؤرّخين مجموعة من الأعمال الريّاضيّة يستعينون بها عند كتابة تاريخ هذا الفصل من الريّاضيّات.

ومن ثمَّ، كان عليّ منذ البداية الكشف عمّا أتى به الحسن بن الهيثم من جديد، ولم يكن معروفاً، وشرحه شرحاً وافياً دقيقاً والتأريخ له. ولا يُمكن بلوغ مثل هذا الهدف إلا بوضع ما كتبه في الريّاضيّات التحليلية في تراثه وفي سياقه، أي في هذا التقليد الذي بدأ مع بني موسى من جهة، ووضعه أيضاً بين فصول الريّاضيّات الأخرى، مثل فصل القطوع المخروطية وتطبيقاتها، أو فصل التحليل والتركيب. . . الخ. هذا ما حاولت القيام به في المجلدات الأربعة الأولى من هذا الكتاب.

وما كان لهذا البحث أن يكتمل، حسب ما خُطّط له، إلا بالرجوع إلى

مؤلّفات ابن الهيثم في العلوم الرياضية الأخرى، مثل علم المناظر وعلم الهيئة. فهذه العلوم كانت حقولاً استُثمِرت فيها مفاهيمُ وأفكارٌ جديدة أغنت الريّاضيّات، ففيها طوّر الحسن بن الهيثم نظريّات في الريّاضيّات التحليلية وفي الهندسة الكروية وفي حساب المثلّثات وفي القطوع المخروطية وغيرها، وهذا كلّه لم يكن معروفاً حتّى يومنا هذا.

أمّا عن تطبيق الريّاضيّات على مسائل علم المناظر، فلقد عرض له المرحوم مصطفى نظيف في كتابه الهامّ «الحسن بن الهيثم: بحوثه وكشوفه البصرية»(١) كما عرضت له في أكثر من موضع، وخاصّة في كتابي الموسوم «الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام»(٢)، ولهذا، لن أعرض له في هذا الكتاب. بقي إذاً أن علم الهيئة الذي كتب فيه ابن الهيثم ضعف ما ألّفه في علم المناظر. وهنا لا يكاد المرء يُصدِّق ما ترى عيناه، فمن خمس وعشرين رسالة له، لم تُحقّق تحقيقاً علميّاً متأنّياً إلا رسالة واحدة عن سمت القبلة(٣). بل لم تنتبه جمهرة من يكتبون في تاريخ علم الهيئة إلى أهمّيّة ما كتبه ابن الهيثم في هذا المجال، وساد الظنّ أنّه قد اكتفى بنقد بطلميوس من دون أن يُقدِّم الجديد. وسنبيِّن، بما لا يدع للشك مجالاً، خطأ هذا الظنّ.

عندما بدأت دراسة كتب ابن الهيثم في الهيئة، لم يكن غرضي هو معرفة ما أتى به في هذا العلم، ولكنَّ تحليل ما تضمنته كتبه من رياضيّات. ولكن إزاء ما وجدته من ندرة البحوث فيما قدّمه في علم الهيئة، وتناقض الصورة التي رسمها له المؤرّخون وقصورها، كان حقّاً عليّ واجباً النظر فيما قام به في هذا الحقل، وذلك بدرس أهمّ ما كتب في علم الهيئة الريّاضيّ. ولم تكن هذه الدراسة بالأمر الهيّن السهل، ولكنَّها تطلَّبت الكثير من الجهد والمثابرة سيقدِّرهما حقّ قدرهما كلُّ من مارس مثل هذا العمل ووقف على صعابه. وما كنت أنتظر، ولا كان ينتظر الناس أن أنتهي في هذا البحث إلى نتيجة تُغيّر ما نعرفه عن تاريخ علم الهيئة في الإسلام، وعن مستوى الريّاضيّات التحليلية التي كشف عنها ابن الهيثم. هذه

---

(١) طبعة مصوَّرة (بيروت ٢٠٠٨)؛ (القاهرة ١٩٤٢ ـ ١٩٤٣) جزءان.

(٢) انظر: Geometry and Dioptrics in Classical Islam(London), 2005; Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum reprints (Aldershot, 1992).

(٣) انظر أ. دلال: A.A. Dallal, «Ibn al-Haytham's Universal Solution for Finding the Direction of the Qibla by Calculation,» Arabic Sciences and Philosophy, 5.2(1995), pp. 145-193.

النتيجة هي صياغة ابن الهيثم لتصوُّر جديد لميكانيكا الأجرام السماويّة المعروفة، أي تصوّر جديد لعلم الهيئة نفسه بناه مؤلّفه على دراسة حساب الفروق المنتهية ودراسة تغيّرات الأعظام وبعض الدوالّ الهندسية الكروية.

ولقد حقّقنا في هذا الكتاب، ولأوَّل مرّة، خمس رسائل في الهيئة الرياضية، ونقلناها إلى الفرنسية لأوّل مرّة كذلك حتّى ينتفع بقراءتها من لا يعرف العربية أو من لا يعرف منها إلا القليل، وهذه الرسائل هي:

١ ـ في هيئة حركات كلّ واحد من الكواكب السبعة

٢ ـ في ارتفاعات الكواكب

٣ ـ في خطوط الساعات

٤ ـ في الرخامات الأفقية

٥ ـ في بركار الدوائر العظام.

وتتضمَّن هذه الرسائل ـ وخاصّة الأولى منها ـ ما هو صعب المنال. وممّا زاد في صعوبته ما أصاب هذه المخطوطات من صروف الزمان. ولهذا كان عليّ التحقّق من النتائج التي عرضها ابن الهيثم والبرهان عليها من جديد لبيان أين تصحّ، وأين تجانب الصواب.

ولقد بذلت في هذا العمل كل ما استطعت من جهد. ولكنَّ مثل هذا العمل لا يُمكن أن يخلو من أخطاء وزلات؛ وإنّي لأشكر من رأى هذا الخطأ أو هذا السهو فعفا عنه وردَّني إلى الصواب، فأنا من المؤمنين، وهم اليوم قلّة، بالقول الكريم ﴿**فأمّا الزَّبَدُ فَيَذهَبُ جُفَاءً وأمّا ما ينفعُ الناسَ فَيَمْكُثُ في الأرضِ**﴾ [الرعد: ١٧].

رشدي راشد

باريس، حزيران/ يونيو ٢٠٠٦

تمهيـــد

هذا هو **المجلّد الخامس**، من موسوعة الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة (أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد)، الذي يحتوي على التحقيق الأوّلي ـ أي لأوَّل مرَّة ـ والشرح الرياضي والتاريخي لخمسة مؤلّفات لابن الهيثم في علم الفلك وفي العلوم المُلْحَقة به، مثل الهندسة الكروية وحساب المثلّثات، وكذلك البحث في الآلات. يُمكن للقارئ أن يُثير، بكلِّ حسن نيَّة، مسألة التلاؤم بين العنوان والمُحتوى: لماذا نُدخل في كتاب مُكرَّس لتاريخ هندسة اللامتناهيات في الصغر أعمالاً لابن الهيثم في علم الفلك وفي العلوم المتّصلة به؟ ويُمكنه أيضاً أن يتساءل لماذا تناولنا هذه المؤلّفات الخمسة بدلاً من أن نتناول كلّ مؤلّفات ابن الهيثم في علم الفلك؟ بل يُمكنه أن يتساءل في نهاية المطاف لماذا فضَّلنا ابن الهيثم على غيره؟

وهكذا يجب علينا أن نُوضِّح، باختصار على قدر الإمكان، الهدفَ الذي سعينا إليه والوسائلَ التي اخترناها للوصول إلى هذا الهدف.

يرمي هذا المُجلّد، مثل المجلّدات التي سبقته، إلى تجميع وثائق هندسة اللامتناهيات في الصغر المكتوبة بالعربية وإلى كتابة تاريخها. وتبدو هذه المُهِمَّة ضرورية إذا أردنا فهم ظهور وتطوُّر المفاهيم التحليلية، ليس فقط في الهندسة، بل في الجبر أيضاً، بالشكل الذي يرِد فيه ضمن أعمال شرف الدين الطوسي في القرن الثاني عشر. وهذه هي، باختصار، الوسيلة التي توضح كيفية تكوين رياضيّات تحليلية جبرية ابتداءً من القرن الحادي عشر. ولكنّ هذه المهمة اصطدمت بعدَّة عقبات من مصادر مُختلفة. وأخطر هذه العقبات ترجع إلى فقر نتاج المؤرِّخين في الرياضيات العربية، وهذا ما يتّخذ أهميَّة خاصّة، ولا سيَّما أنَّ الإنتاجَ الرياضي بين القرن التاسع والقرن الثاني عشر، أي في الفترة التي تهمُّنا هنا، غنيٌّ جدّاً.

يعلم الجميع أنّه لم يتمّ تحقيقُ إلا القليل جدّاً من النصوص الرياضية العربية؛ وعدد النصوص التي حُقّقت عِلْمِياً، من بين هذه النصوص المحقّقة، هو قليل

أيضاً. وإنّه من المعروف أيضاً أنَّ عدد الدراسات التاريخية، في هذا الميدان، التي تستحقُّ هذه التسمية لا يتجاوز عدد أصابع اليد الواحدة. إنَّ هذا البؤس في البحث التاريخي يشمل في آن واحد تاريخ النصوص وتاريخ المفاهيم العلميَّة وبُناها. يكفي للمرء أن يكون على قليل من الاطلاع على تاريخ الرياضيات العربية ليتحقّق أنَّ هذا الميدان، حتى يومنا هذا، لم يُكتشَف منه إلا اليسير.

إنّ الوضع الناشئ عن هذا البؤس في النتاج التاريخي، من جهة، وعن الغنى الهائل في النشاط الرياضي الذي هو موضوع هذه الدراسات التاريخية، من جهة أخرى، لا يُمكن إلا أن يُربِك المؤرِّخ الحريص على عدم الاكتفاء بذكر الوقائع. إنَّ قطف زهرة من كلِّ حقل، وتعداد أسماء الرياضيين وعناوين مؤلّفاتهم، وما إليه، لم يؤدِّ قطّ إلى نتيجة ملموسة. وهكذا توجَّب إعداد خطة حقيقية لاستكشاف قارَّة الرياضيّات العربية هذه، أو لاستكشاف إحدى مناطقها على الأقلّ. ترتكز هذه الخطة، التي تبنّيناها في هذا الكتاب، وكذلك في الكتب الأخرى المكرَّسة للجبر ولنظريّة الأعداد والتحليل الديوفنطي وما إليه، على الجمع الدقّيق وعلى أحسن وجه بين البحث في تاريخ النصوص والبحث في تاريخ المفاهيم الرياضية وبناها. ولكنَّ غنى هذه المواد الخاضعة لهذه الخطة، يتَطلّبَ أن تُحدَّدَ أوّلاً نقطة القِمَّة في النشاط الرياضيّ لكلٍّ من الميادين المختارة. أمّا في ميدان هندسة اللامتناهيات في الصغر، فإنَّ ابن الهيثم يُمثِّل نقطة القِمَّة. فهو الذي ذهب إلى أبعد حدٍّ في دراسة السطوح والمجسَّمات المنحنية؛ وهو الذي كتب أهمَّ فصل حول الأهِلّة، وهو أيضاً الذي حرَّر أوَّل نظرية حقيقية حول الزاوية المُجَسَّمَة، إلخ. ولقد سعينا، بعد تحديد نقطة القِمَّة هذه، إلى إعادة البناء، بطريقة تراجعية، لكل التقليد الذي مهَّد للوصول إلى هذه القِمَّة. وهكذا وجب الرجوع بهذا التقليد حتّى بني موسى في القرن التاسع، قبل متابعته حتّى ابن الهيثم في القرن الحادي عشر. ولقد كرَّسنا المُجَلّدين الأوَّلين بكاملهما لرياضيات اللامتناهيات في الصغر، لإعادة بناء هذا التقليد.

إنَّ توضيح البُنى البرهانية والبُنى التركيبية لمؤلّفات هذا التقليد، وإظهار انتساب بعضها إلى البعض الآخر قد بَيَّنَا السمات المُميَّزة لهذه المؤلّفات. ولنذكّر، من بين سمات أخرى، ببعض هذه السمات: هناك ترابطٌ وثيق بين تقليدين قديمين، وهما تقليد أرشميدس وتقليد أبلونيوس، واستخدامٌ مكثَّف للتحويلات الهندسية يفوق كثيراً بتعدُّده ما حصل في الرياضيّات الهلّينيستية، وتطبيق للحساب يتجاوز ما حدث في التقليد الأرشميدي... إلخ. إنَّ مُجرَّدَ إعادة بناء

هذا التقليد في هندسة اللامتناهيات في الصغر لا يسمح طبعاً بفهم مُعَمَّق لتشكيل وتطوُّر هذا الفصل في الهندسة. وهكذا ينبغي أن نذهب إلى أبعد من ذلك، لأجل تحديد الشروط التي جعلته ممكناً، وأيضاً لأجل التعرُّف على تطبيقاته.

إنّ إدخال المفاهيم الجديدة وتعديل المفاهيم القديمة يتمّان، في أغلب الأحيان، بسبب ضرورات التطبيق. ولكنَّ مثل هذا المنهج يتطلّب أن يوضَع البحثُ في هندسة اللامتناهيات في الصغر في إطار البحث الذي كان يقوم به ممثّلو هذا التقليد المكوَّن، وهم بنو موسى وثابت بن قرَّة والماهاني وإبراهيم بن سنان والخازن والقوهي وابن سهل والسجزي وصولاً إلى ابن الهيثم. ولقد كرَّسنا لأجل ذلك المجلّدين الثالث والرابع من هذا الكتاب، كما كرَّسنا لذلك كتباً أخرى[(١)]. ولقد حاولنا بالفعل على هذه الصفحات أن نضع هذا الفصل من هندسة اللامتناهيات في الصغر في الإطار العام بين الأعمال الهندسية الأخرى لابن الهيثم، وأيضاً بين مساهمات أخرى لريّاضيي هذا التقليد، مثل ابن سنان والقوهي والسجزي وغيرهم، وخاصَة في هندسة المخروطات. ولقد أردنا خلال هذه الدراسات أن نُبرز الشروط التي مَكّنت هذا التقليد من التكوُّن.

يبقى علينا أن نتفحَّص المكتسبات النظرية والتقنيّة الناتجة من تطبيقات هذه الرياضيات. ولقد بدأنا، هنا أيضاً، تمشّياً مع الخطَّة التي تبنّيناها، بأعمال ابن الهيثم في هذا الميدان قبل أن نرجع إلى أعمال سابقيه. ولكنَّ هذا الرياضي، الذي كان أيضاً فيزيائيّاً بارزاً، كان من أكثر الرياضيين كفاءة للدخول في حقل الرياضيات التطبيقية. وهكذا نجد له، بالفعل في هذا الميدان، إسهامات مهمّة في العلوم الرئيسية المتداولة في عصره: علم المناظر، علم السكون، علم الفلك والآلات العلمية. ويبدو أنَّ هناك ميداناً يجب استثناؤه وهو علم الأصوات. لقد درسنا في عدَّة أعمال[(٢)] لنا مؤلّفات ابن الهيثم في علم المناظر؛ فلذلك لن نعود إليها.

أمّا بخصوص علم السكون، فإننا أقلُّ حظاً لأنّ كتاباته فُقدت ولم يبقَ منها

---

(١) انظر: *R. Rashed et H. Bellosta, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et Géométrie au xe siècle(Leyde, 2000);*

R. Rashed, Œuvre mathématique d'al-Sijzī, Vol. I: Géométrie des Coniques et Théorie des nombres au xe siècle, Les Cahiers du Mideo, 3(Louvain-Paris, 2004);

R. Rashed, Géométrie et Dioptrique au Xème siècle: Ibn Sahl al-Quhī et Ibn al-Haytham(Paris, 1993).

(٢) انظر: R. Rashed, Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique arabe, Variorum reprints(Aldershot, 1992), Geometry and Dioptrics in classical Islam(Londres, 2005).

سوى اسشهادات الخازني[٣]. وهكذا بقي علينا أن ندرس الفلكيات والآلات.

كان علم الفلك، كما هو معروف، ميدان التطبيق المفضَّل بامتياز للرياضيات القديمة والكلاسيكية. وكان هذا التطبيقُ، الضروريُّ لإعداد هيئات الحركات السماوية وللرخامات وغيرها، خصباً في الابتكارات الريّاضيَّة. ولنذكر، على سبيل المثال، الهندسة الكروية وطرائق الاستكمال. وهكذا توجَّب علينا، لمتابعة دراسة تاريخ هندسة اللامتناهيات في الصغر في ذلك العصر، العودة إلى كتابات ابن الهيثم في علم الفلك الرياضي. ولكنَّ دهشتنا، هنا أيضاً، كانت هائلة لعدّة أسباب.

لم يكن نادراً أن يَذكُر مؤرِّخو علم الفلك اسم ابن الهيثم ليُؤكّدوا أهمّيّة إسهامه والدور الحاسم الذي لعبه في انتقاد فلكيات بطلميوس. ولكنَّ من ينظر عن قرب لا يُمكن إلا أن يتعجَّب من الجهل الذي يُحيط بأعماله. وذلك أنّ من بين حوالى خمسة وعشرين مؤلّفاً لابن الهيثم في علم الفلك، لم تَحظَ إلا رسالة قصيرة وحيدة، حول اتجاه القِبلة، بتحقيقٍ نقديٍّ وشرح حقيقي[٤]؛ بينما لا نجد لمؤلّفه الأساسي «في الشكوك على بطلميوس» إلا تحقيقاً أحسن ما يُقال فيه أنّه مؤقّت[٥]، ولم يقم أحدٌ إلى الآن بأيِّ شرح ذي قيمة لهذا المؤلّف. وأخيراً، لقد نُشِرَ مؤلّفه «في حلّ شكوك حركة الالتفاف» من دون أيَّ تحليل أو شرح[٦].

وهكذا يمكن القول إنَّ أعمال ابن الهيثم في علم الفلك ما زالت شبه مجهولة. ولكنَّ هذا الجهل بأعماله قد أدَّى إلى التباس خطير. وذلك أنَّ غالبية المؤرِّخين تكلّموا على فلكيات ابن الهيثم استناداً إلى مؤلّف عنوانه «في هيئة العالم» أو إلى مؤلّف آخر هو «شرح المجسطي» ليس من تأليف الحسن ابن الهيثم، بل من تأليف الفيلسوف محمَّد ابن الهيثم[٧]. وهكذا، ما زالت فلكيات ابن الهيثم تُدرَس حتّى اليوم استناداً إلى نصٍّ منسوب خطأ إليه أو إلى مؤلّف لم يكتبه، أو استناداً إلى

(٣) انظر: الخازني، كتاب ميزان الحكمة (حيدرآباد، ١٩٤١)؛ انظر أيضاً: F. Bancel, *Les centres de gravité d'Abū Sahl al-Qūhī*, Arabic Sciences and Philosophy, 11.1(2001), p. 45-78.

(٤) انظر مقال أ. دلال: A.Dallal, «Ibn al-Haytham's Universal Solution for Finding the Direction of the Qibla by Calculation,» Arabic Sciences and Philosophy, 5.2(1995), p. 145-193.

(٥) انظر: الشكوك على بطلميوس، تحقيق عبد الحميد صبرة ونبيل الشهابي، (القاهرة، ١٩٧١).

(٦) انظر عبد الحميد صبرة، مقالة الحسن ابن الهيثم في حلّ شكوك حركة الالتفاف، في: Journal for the History of Arabic Science, 3.2(1979), p. 183-212, 388-392.

(٧) انظر: Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle, vol. II, Ibn al-Haytham (Londres, 1993), p. 1-17, 511-538.

الشكوك على بطلميوس في التحقيق الهشّ الذي أشرنا إليه. ولذلك تبرز لنا صورة متناقضة لفلكيات ابن الهيثم؛ فهذه الفلكيات تبدو من جهة محصورةً ضمن النظريات البطلمية، ولكننا نجد من جهة أخرى، انتقاداً لبطلميوس في كتاب **الشكوك**. لقد بقي هذا التناقض غير منظور، وهذا أمر عجيب، من قِبَل الكثير من الذين كتبوا في هذا الموضوع، إذ كان مُسْتَتِراً من دون شكٍّ ضمن خليط الاعتبارات الهيئوية التي تُبعد المرء عن فلكيات ابن الهيثم الحقيقية.

وهكذا تصوَّرنا برنامجاً للبحث لا غنى عنه اليوم، وهو التحقيق العلميّ لمجموعة كتابات ابن الهيثم في علم الفلك، وشرح هذه المجموعة. إنَّ تحقيق هذا المشروع يبقى رهن المستقبل؛ وهدفنا هنا أقلُّ طموحاً، فنحن لا نتناول إلا مؤلّفاتِه في الفلكيات الرياضية وفي الميادين المتعلّقة بها، وذلك لتفحُّص تفاعل علم الفلك مع الرياضيات، وخاصَّة مع هندسة اللامتناهيات في الصغر ومع الهندسة الكرويّة. ولكننا سنبيِّن أنّ إسهامات ابن الهيثم في علم الفلك ظهرت في فترتين على الأقلّ. فهو في الفترة الأولى ينتقد الفلكيات البطلمية، ويتعمّق أيضاً في عدّة ميادين متعلّقة بها، ويُثير عند ذلك مسائل جديدة. ولقد تبعت هذه الفترةَ الأولى، التي تبدو كفترة تحضيريّة، فترةٌ ثانية أعدَّ فيها ابن الهيثم فلكياته الجديدة. وهكذا أصبحت، بالنسبة إليه، مسألة ارتفاع الكوكب خلال مسيره، وخلافاً للعادة المتّبَعة، المسألةَ الرئيسية في البحث الفلكي. ولكنّ إعداد هذه الفلكيات تطلّبَ القيام ببحث جديد في هندسة اللامتناهيات في الصغر. وهكذا درس ابن الهيثم تغيُّرات المقادير والنسب، واستعان بحساب الفروق المنتهية وما إليه. وهذا البحث محفوظ في مؤلّف أساسيّ ـ وهو أحد إسهاماته الأخيرة ـ تُماثلُ أهمِّيَّتُه أهمِّيَّةَ **كتاب المناظر**، وعنوانه «في هيئة حركات كلٍّ واحد من الكواكب السبعة».

يجد القارئ هنا التحقيق -لأوَّل مرّة ـ للمخطوطة التي وصلت إلينا من هذا المؤلّف. ولكي نحدِّد مكانة هذا المؤلّف ونُقدِّر المسافة التي قطعها ابن الهيثم منذ الفترة الأولى في بحثه، أوردنا أيضاً التحقيق -لأوَّل مرّة ـ لمؤلّفه **في اختلاف ارتفاعات الكواكب المتحيّرة** الذي قال عنه بنفسه أنّه أصبح لاغياً.

ونجد بين مؤلّفات ابن الهيثم في الميادين المُلْحَقة بعلم الفلك مؤلّفه «في خطوط الساعات» حيث يُكمل تقليدَ البحث الذي بدأه في هذا الميدان ثابتُ بن قرّة، وتبعه إبراهيمُ بن سنان ثمَّ السجزي. ولقد وصل إلينا أيضاً لابن الهيثم مؤلّف «في الرخامات الأفقية»، الموجَّه إلى أصحاب الصناعة، ومؤلّف «في بركار الدوائر العظام». وسيجد القارئ التحقيق ـ لأوَّل مرَّة أيضاً ـ لكلٍّ من هذين المؤلّفين.

لقد سعينا، في هذا المجلّد الخامس من الرياضيّات التحليلية، وهندسة اللامتناهيات في الصغر، الذي لا يتضمَّن إلا قسماً من أعمال ابن الهيثم في علم الفلك، إلى تحقيق ثلاثة أهداف، وهي أن نُكمل المجلّدات الأربعة السابقة، مع تأكيد ما قدَّمته هذه البحوثُ في علم الفلك للرياضيَّات، وأن نُبيِّن إلى أيّة درجة كانت بحوثه في خطوط الساعات أكثر تقدُّماً من بحوث أسلافه، وأن ندرس، على الأخصّ، الفلكيات الجديدة التي تصوَّرها. وهكذا سنكشف عن اتجاهَي البحث اللذين برزا بعد انتقاده لبطلميوس؛ ولقد أدَّى أحدهما إلى بناء هيئات أخرى خالية من التناقضات البطلمية مثل هيئات نصير الدين الطوسي ومن بعدها هيئات ابن الشاطر وهيئات خلفائهما، بينما أدَّى الثاني إلى تقديم سينماتيكا سماوية رياضية بشكل تامّ، أي إلى إسهام ابن الهيثم.

لقد استفدت طيلة سنوات التحضير لهذا المُجلّد من الدعم الدائم للسيد كريستيان هوزيل (*Christian Houzel*)، مدير البحوث المتقاعد في المركز الوطني للبحوث العلمية الفرنسي. وإنني أعبِّر له، هنا، عن عرفاني الصادق بالجميل للعون الذي قدَّمه لي ولقراءته ولانتقاداته وللتصحيحات المتعلّقة بالشروح التاريخية والرياضية التي قام بها. وإنني أتوجَّه أيضاً بكلمات الشكر الحارَّة إلى بدوي المبسوط، الأستاذ المتقاعد في جامعة باريس ٦، الذي راجع قسم الكتاب الخاصّ بمؤلّف «في هيئة حركات الكواكب السبعة»، واقترح عدَّة تحسينات فيه، وكذلك إلى محمد الحجيري الذي راجع قسم الكتاب الخاصّ بخطوط الساعات. وأوجِّه عرفاني بالجميل إلى الأب المحترم ريجيس مورلون (*Régis Morelon*)، مدير البحوث المتقاعد في المركز الوطني للبحوث العلمية الفرنسي، لدعمه الودِّي ولأخذه الوقت اللازم لمناقشة المواضيع التي كنت أطرحها. وأشكر أيضاً الأساتذة بوريس روزنفلد (*Boris Rosenfeld*) ومريم روزنسكايا (*Myriam Rozhanskaya*) وسرغي دميدوف (*Serguei Demidov*) الذين سهّلوا لي الاطلاع على مخطوطة «هيئة الحركات». وأعبِّر، أخيراً وليس آخراً، عن امتناني لـ ألين أوجيه (*Aline Auger*)، مهندسة الدراسات في المركز الوطني للبحوث العلمية، التي حضَّرت النسخة الفرنسيّة من هذا الكتاب للطباعة، كما حضَّرت معجم المفردات والفهرس.

رشدي راشد

بور لارين، حزيران/ يونيو ٢٠٠٦

تنبيــه

لقد استخدمنا الأحرف لتسمية المخطوطات، وفقاً لمصطلحات واردة في المراجع.

< > يفصل هذان القوسان ما تجب إضافته لكي يسدَّ نقصاً في نصّ مخطوطة ما.

[] يفصل هذان القوسان المعقوفان الكلمة أو المقطع الذي يجب حذفه لكي يُحفَظَ تماسكُ النصّ.

/ هذه الإشارة تدلُّ على نهاية الورقة في المخطوطة المعنية بالأمر.

القسم الأول

السينماتيكا السماوية

الفصل الأوّل

السينماتيكا السماوية والهندسة الكروية

١- مقدِّمة

١-١ أعمال ابن الهيثم في علم الفلك

ينسب كُتّاب السِّيَر القدامى – القِفْطي وابن أبي أصَيْبعة وآخر قبلهما مجهول الهويَّة - إلى ابن الهيثم خمسةً وعشرين مؤلّفاً في علم الفلك[١]، وهذا يعني أنَّ ربع أعمال هذا الرياضيّ الشهير مُكرَّس لعلم الفلك. وهذا يعني أيضاً أنّه قد حَرَّر في هذا الميدان ضعفَ ما كتبه في علم المناظر الذي قُرِن باسمه إلى الأبد. هذه المجموعة من المؤلّفات تشهد وحدها على ضخامةِ إنجازات ابن الهيثم، وعلى المكان الذي يحتلّه علم الفلك ضمن أعماله.

ونلاحظ عند قراءة الكتابات التي وصلت إلينا أنَّ ابن الهيثم، حتّى لو بقي هدفه الأوّل نظريّاً ورياضيّاً، لم يُهْمِلْ أيَّ فصل من فصول علم الفلك في زمانه. تتناول عدَّة مؤلّفات له المسائلَ التقنيّة التطبيقية، بينما يتناول بعضُها الآخر طرائقَ الحساب الفلكي، كما يعالج بعضها أيضاً طرائق الرصد الفلكي... إلخ. ولكننا نستطيع أن نُوزِّع مُجملَ كتاباته على أربع مجموعات، استناداً إلى النصوص الموجودة، أو، إن تَعذَّر ذلك، استناداً إلى العناوين الواردة في قوائم كتّاب السِّيَر القدامى.

تتضمَّن المجموعة الأولى عشرة مؤلّفات يتناول ابن الهيثم فيها المسائل التقنية : "في خطوط الساعات" و "في الرُّخامات الأفقية" و "في سمت القِبلة بالحِساب"[٢] و "في استخراج ارتفاع القطب على غاية التحقيق" و "في استخراج خط نصف النهار على غاية التحقيق" و "في تصحيح الأعمال النجومية"[٣]... إلخ.

وتحتوي المجموعة الثانية على مؤَلّفَيْن في الرصد الفلكي وشروطه والأخطاء التي يمكن حدوثها فيه... إلخ.

---

[١] نجد، في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة (بيروت، ٢٠١١) أوَّل تفحُّص نقديّ لأعمال ابن الهيثم وسيرته، كما نجد فهرساً إجمالياً (ص. ٤٧٨-٥٠١) بكامل أعماله، بما فيها الأعمال في الفلك.
[٢] انظر الحاشية ٤ في التمهيد
[٣] انظر الملحق الثاني، ص ٦٦١-٦٦٣.

وتتناول المجموعة الثالثة مسائلَ مختلفةً متنوّعة، مثل اختلاف المنظر والمجرَّة... إلخ.

أما المجموعة الرابعة فتعالج النظريات الفلكية، وتنقسم بدورها إلى ثلاثة أقسام:

يناقش ابن الهيثم في قسمها الأوّل أعمال بطلميوس، وذلك في ثلاثة مؤلّفات:

أ- "في الشكوك على بطلميوس"[٤]

ب-"في تهذيب المجسطي"

ج- "في حلّ شكوك في كتاب المجسطي"

ولقد وَصَلَ إلينا من هذه الكتب الثلاثة الكتابان الأوّل والثالث.

أما في القسم الثاني من المجموعة الرابعة، فإنَّ ابن الهيثم يدرس بعض الحركات السماوية:

أ- "في حركة الالتفاف"، ب- "في حلّ شكوك حركة الالتفاف"[٥]، ج - "في حركة القمر".

ويوجَد لدينا من هذا القسم الكتابان الأخيران.

ويتضمَّن القسم الثالث من المجموعة الرابعة أربعة مؤلّفات:

أ - "في اختلاف ارتفاعات الكواكب"، ب- "في نسب القسيّ الزمانيَّة إلى ارتفاعاتها"،

ج -"في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"، د- "في هيئة العالم".

لقد وصل إلينا المؤلّف الأوّل بينما فـُقِد الثاني. ويوجَد لدينا قسم من المؤلّف الثالث. أمّا المؤلّف الرابع، فهو لا يتطابق- كما سنبيِّن – مع المؤلّف المنسوب إليه خطأ الذي يحمل نفس العنوان.

إنَّ هذا التذكير البسيط يُظهِرُ بوضوح أنَّ هذا النتاجَ الكبير في علم الفلك لم يزل غير معروف، إذا استثنينا مؤلّف "هيئة العالم" - المشكوك بنسبته كما قلنا- ومؤلّف"في اختلاف ارتفاعات الكواكب"، ومؤلّف "في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة".

ونلاحظ أنَّ ابن الهيثم، في هذه الكتب الثلاثة التي يذكر فيها اسم بطلميوس أو اسم كتابه "المجسطي"، يقوم بانتقاد هذه الأعمال. فهو يتحدَّث عن "شكوك" و"تهذيب" و"حلّ الشكوك". وإذا أضفنا، إلى هذا، الانتقادَ الذي يُوَجِّهه إلى بطلميوس في مؤلّفه "في حلّ

---

[٤] انظر الحاشية ٥ في التمهيد.
[٥] انظر الحاشية ٦ في التمهيد.

شكوك حركة الالتفاف"، يُمكن أن نقول من دون مبالغة إن مشروع ابن الهيثم يهدف بوضوح وعن قصد إلى الانتقاد وإعادة التأسيس.

يبقى علينا الآن أن نعرف متى تمّ حَقّاً تَصَوُّر هذا المشروع النقدي وأن نعرف النتائج التي أدّى إليها. إنَّ مهمَّتنا أصبحت هنا صعبة بسبب فقدان بعض المؤلّفات وبسبب صعوبة تأريخ المؤلّفات التي وصلت إلينا. نحن نعرف أنَّ ابن الهيثم قد وعد بكتابة "الشكوك على بطلميوس" في نهاية "في حلّ شكوك حركة الالتفاف". ونعرف أيضاً أنَّ "في حلّ شكوك في كتاب المجسطي" قد حُرِّر بعد شهر آب/أغسطس ١٠٢٨، الذي هو تاريخ إنهاء كتاب "في الهالة وقوس قزح" الذي يستشهد به[٦]، كما نعرف أنَّ هذه الكتب الأربعة لا يمكن أن تكون قد كتبت إلا في أوقات مختلفة. وهكذا يكون لدينا الترتيب التالي: "في حركة الالتفاف"، "في حلّ شكوك حركة الالتفاف"، وأخيراً "الشكوك على بطلميوس". هذه المؤلّفات الثلاثة، وكذلك المؤلّف "في حلّ شكوك في كتاب المجسطي" قد حُرِّرَت قبل سنة ١٠٣٨، وهذا ما تؤكّده قائمة مؤلّفات ابن الهيثم المحرَّرة حتى هذا التاريخ. يبدو إذن أنَّ ابن الهيثم كان، حوالى سنة ١٠٢٨ وعلى أي حال قبل سنة ١٠٣٨، يعمل بنشاط في علم الفلك.

وإذا كنا لا نستطيع أن نقول شيئاً عن كتاب "في تهذيب المجسطي" لأنّه مفقود، يبقى من المؤكّد أنَّ كل هذه العناوين تنضح عن موقفٍ ناقدٍ. إنّه من الواضح أنَّ هذا الطابع النقدي مشترك بين كل العناوين التي أشرنا إليها. بل إنَّ ابن الهيثم، في مؤلّفه "في حركة القمر" الذي كتبه أيضاً قبل سنة ١٠٣٨ وسعى فيه إلى تعليل صعوبات بطلميوس على أنّها نتيجة لقراءة أوَّلية، لا يتخلّى بشكل كامل عن الانتقاد. وهذا يعني أنَّ مثل هذا المسعى، الذي هو أبعد من أن يكون نتيجة للظروف، يُعبِّر عن عدم الرضا تجاه فلك بطلميوس. ولكي نتحقّق من مدى عمق انتقاداته، لنقرأ على سبيل المثال ما يقوله ابن الهيثم في ردِّه على عالم مجهول الهوية كان قد انتقد مؤلّفه "في حركة الالتفاف":

وقد تبين لي من تضاعيف كلام مولاي الشيخ أنه يُصَدِّق قول بطلميوس في جميع ما يقوله من غير استناد إلى برهان ولا تعويل على حجة بل تقليداً محضاً. فهذا هو اعتقاد أصحاب الحديث في الأنبياء صلوات الله عليهم، وليس هو اعتقاد أصحاب التعاليم وأصحاب العلوم البرهانية. ووجدته أيضاً يصعب عليه تغليطي بطلميوس ويمتعض منه؛ ويظهر من كلامه أنَّ بطلميوس لا يجوز عليه الغلط. ولبطلميوس أغلاط كثيرة في مواضع كثيرة من كتبه. فمنها أنّ كلامه في المجسطي إذا

[٦] - لقد حرّر ابن الهيثم بالفعل كتابه، "في الهالة وفي قوس قزح"، بيده في شهر رجب سنة ٤١٩ للهجرة، أي في بداية آب/أغسطس ١٠٢٨ للميلاد. ويشير ابن الهيثم إليه وإلى مؤلّفه "كتاب في المناظر" ضمن كتابه "في حلّ شكوك في كتاب المجسطي". انظر مخطوطة: عليكرة عبدالحيّ، رقم ٢١، الورقة ١٢و، والمخطوطة: اسطنبول بايزيد، رقم ٢٣٠٤، الورقة ٨ظ.

حقق النظر فيه وجد فيه أشياء متناقضة؛ وذلك أنّه قرر أصولاً للهيئات التي يذكرها، ثم أتى بهيئات للحركات مناقضة للأصول التي قررها، وليست موضعاً واحداً بل مواضع كثيرة . فإن أحب أن أكشفها وأبينها فعلت. وقد كنت عزمت أن أعمل كتاباً في تحقيق الحق من علم الهيئة، وأبيِّن فيه أولاً المواضع المتناقضة من كتاب المجسطي، ثم أبيّن المواضع الصحيحة، ثم أبيّن كيف تحقق المواضع. وله أغلاط في كتاب المناظر؛ فمنها غلط في البرهان في شكل من المرايا تدل على ضعف تصوره. فأما كتاب الاقتصاص، فإنَّ المعاني التي ذكرها في المقالة الثانية والهيئات التي قررها بالأكر والمنشورات إذا حقق النظر فيها بطل البرهان واضمحل وفي عاجل الحال. قد بينت غلطه في هذا الجواب في المنشورين اللذين فرضهما لفلك التدوير، وأوضحته بالبرهان الذي لا شك فيه، وبينت أنَّه، على أيِّ وضع فرض المنشورات، عرض منهما المحال الذي لا عذر فيه[٧].

جعل هذا النقد الجذري الكثير من المؤرِّخين يعتقدون أن مشروع ابن الهيثم لا يتعدّى هذا البعد النقدي أو أنّه، كما يقال أحياناً، شَكّاك[٨]. ولكنّ هذا غيرُ صحيح. وذلك أنَّ ابن الهيثم، خلال الفترة المذكورة أعلاه، أي قبل سنة ١٠٣٨، قد تناول مسألةً ظهرت فيما بعد كمسألة جوهرية؛ وهي مسألة ارتفاعات الكواكب في أثناء حركاتها. إنَّ ابن الهيثم، من ناحية أخرى، يحاول في كل كتاباته النقدية، باستثناء كتاب "الشكوك على بطلميوس"، أن يحلّ بعض الصعوبات الموجودة في كتاب "المجسطي"، وخاصّة تلك التي لم تكن تتعلّق في أوّل الأمر بالبنية النظرية للمؤلّف. وهذا يعني أنَّ الانتقاد، وحتّى في هذه المرحلة، هو أيضاً نهج للاستكشاف. وهذا ما يظهر أيضاً بشكل أوضح عندما نتفحَّص النتائج. إنَّ ابن الهيثم قد صاغ بالفعل كتابَه الضخم "في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"، الذي أعدَّ فيه فلكيّات جديدة، في أثناء هذه الأبحاث، وبعد أن وصلت إلى درجة تامَّة من النضوج. وهذا يعني أنَّ هذا الكتاب الأخير- الذي يتناول فيه من جديد مسألة الارتفاعات- هو ثمرة البحوث النقدية والإبداعية التي قام بها طيلة عقدين من الزمان، على الأقل قبل سنة ١٠٣٨، ولم ترَ النور، على الأرجح، إلا بعد هذا التاريخ بوقت قصير.

---

[٧] انظر مخطوطة : Ms. Saint-Pétersbourg B1030/1، ورقة ١٩ظ

[٨] ونظراً إلى هذا الانتقاد المقصود المصرَّح به بوضوح، اعتقد بعض المؤرِّخين، تبعاً لما فعله س. بينس (S. Pines)، أن بوسعهم إدراج ابن الهيثم ضمن تقليد قديم شكّاك. وهكذا نجد الرياضي ابن الهيثم مصنّفاً ضمن نفس الفئة التي تضمّ الطبيب المشهور الرازي الذي ألّف **الشكوك على جالينوس**. ولكن هناك اختلافاً كبيراً لم يفطن له أحد يفصل بالتحديد بين ابن الهيثم والرازي والكثير من الآخرين في المجالات المختلفة لهذا التقليد الشكّاك المزعوم. وإنّ الفرق كبير بالفعل بين إظهار الصعوبات وانتقاد الحلول من جهة والانتقاد من أجل البناء من جهة أخرى. إنَّ الانتقاد، ضمن أيّ بحث تجديدي، يشكّل جزءاً مُكَمِّلاً لكل محاولة للاستكشاف. إنَّ شكوك وانتقادات ابن الهيثم ، على سبيل المثال، لم تُصَغ كَحُجَجٍ لنظرية بل كَقضايا اجتهد الرياضي ابن الهيثم في برهنتها رياضياً وبالاستناد إلى الأرصاد المحقّقة. وأهمُّ من ذلك هو أنَّ هذه الشكوك والانتقاداتٍ لا يُمكن أن تتّضح إلا بالاستناد إلى المؤَلّف، النهائي نوعاً ما، لابن الهيثم وهو "في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة". ولقد اكتشف الرياضي ابن الهيثم، خلال محاولاته لتحسين أسس فلكيات بطلميوس عن طريق تخليصها من تناقضاتها، أنَّ هذا التأسيس يجب أن يستند مسبَّقاً إلى الفصل بين نظرية الحركات – أي السينماتيكا السماوية- وعلم الهيئة. وهذا يعني باختصار أنّه لا يُمكن الفصل عند ابن الهيثم بين الشكوك والانتقادات من جهة، والغاية المقصودة في وضع الأسس من جهة أخرى. انظر:

S. Pines : « Ibn al-Haytham's Critique of Ptolemy », dans Actes du dixième Congrès international d'histoire des sciences,1, n° 10 (Paris, 1964) ، ص.٥٤٧-٥٥٠؛

وانظر كذلك: *« What was original in arabic Science »*، ضمن: *A.C. Crombie(éd.) Scientific Change(Londres, 1963)* ، ص. ١٨١- ٢٠٥

ولكن، لسخرية القدر، لم يتردَّد البعض مؤخـَّراً في نسبة شرح لكتاب المجسطي، مُجارٍ تماماً لبطلميوس، إلى الحسن ابن الهيثم. ولقد كـُتب هذا الشرح من قِبَل مؤلّف مجهول يحمل نفس الاسم، كان فيلسوفاً ومُطَّلِعاً على العلوم من دون أن يكون رياضياً، وهو محمد بن الهيثم[٩]. وهكذا يصل الالتباس إلى أَوْجِهِ عندما يُذكَر هذا النص الأخير بصدد تقديم كتاب ينتقد بطلميوس قصداً، مثل كتاب "الشكوك". إنَّ مثل هذا الالتباس لا يُمكن أنْ يؤدّي إلا إلى خطأ في الرؤيا؛ وهذا ما يحول دون فهم فلكيّات ابن الهيثم.

ولكن ابن الهيثم هو ضحيَّة لخطأ آخر- كنّا قد أشرنا إليه – من قِبَل مؤرِّخي علم الفلك. فقد نُسب إليه منذ قرون كتاب عنوانه "في هيئة العالَم"، ذكره كتّاب السِّيَر القدامى، وتـُرجم إلى العبريّة وإلى اللاتينيّة. ويلاحظ، حول هذا الموضوع، ي. ت. لنغرمان (*Y. T. Langermann*) الذي حقّق وترجم نص هذا الكتاب، "أنَّ العديد من الانتقادات الصائبة الموجَّهة إلى بطلميوس في كتاب "الشكوك" يمكن في الواقع أن تـُوجَّه بنفس الطريقة إلى كتاب "في هيئة العالم" الذي يتبع بأمان نظرية المجسطي الفلكية"[١٠]. ولقد أضفنا إلى هذا ملاحظات أخرى تُشكّك في نسبة هذا المؤلّف إلى ابن الهيثم[١١]. وقد تكون الرغبة كبيرة في الخروج من هذا التناقض الفاضح عن طريق ادِّعاء أنَّ ابن الهيثم قد كتب هذا الكتاب في أيّام شبابه. ولكن ليس هناك حجَّة لتأكيد هذا التخمين. بل هناك ما يُثبت العكس، وذلك أنَّ ابن الهيثم قد اعتاد بالفعل، وحتّى في حالات أقل أهمية، عندما يُعيد كتابة نفس الموضوع، أن يُذكِّر بكتابته الأولى ويُحَذِّر بوجوب إبدالها بالكتابة الجديدة[١٢]. وكنّا بالأحرى نتوقّع هنا من ابن الهيثم أن يقوم بتحذير مماثل، وخاصَّة عندما ينتقد نظريات كان قد تبنّاها في كتابته الأولى، ولكنّ هذا لم يحدث. هذه هي إذاً حالة معرفتنا بأعمال ابن الهيثم في علم الفلك: ينسب إليه بعض المؤرِّخين، بلا نظام، شرحاً لبطلميوس ذا صبغة تدريسية محضة، أو كتاباً ذا

---

[٩] لقد اعتقد عبد الحميد صبرة، في مقدّمة نشرته لكتاب "الشكوك"(الحاشية ٣) أن بوسعه توضيح النصّ الانتقادي لهذا الكتاب، مُستعيناً بشرح المجسطي الذي قام به محمد بن الهيثم والذي يتبع حرفيّاً ما قاله بطلميوس. وهذه المحاولة الغريبة هي نتيجة الالتباس القديم بين محمد بن الهيثم والحسن ابن الهيثم. انظر حول هذا الموضوع، المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٣٦ وما يليها والمجلد الثالث، ص.٨٠٥-٨٠٩ والمجلد الرابع، ص. ٨٧١ وما يليها.

[١٠] انظر: *Y. Tzvi Langermann*, *Ibn al-Haytham's On the Configuration of the World* (New *York/Londres*, 1990)، ص. ٨.

[١١] انظر الملحق الأول أدناه.

[١٢] انظر مثلاً: "مقالة مستقصاة للحسن بن الحسن بن الهيثم في الأشكال الهلالية"، ضمن المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ١٦٥-٢٠١؛ انظر كذلك لاحقاً ص.٢٨٦

ارتباط وثيق ببطلميوس، من دون الاهتمام بالتناقض مع "الشكوك" والانتقادات. أما البعض الآخر من المؤرِّخين، فهم يكتشفون، بحقٍّ، وجودَ التناقض، ولكنّهم يكتفون بذلك. وهناك آخرون أكثر قِدَماً يتوقّفون عند "الشكوك" ويأسفون لأن ابن الهيثم اكتفى بانتقاد بطلميوس من دون أن يُقدِّم بنفسه نظرية فلكية أخرى. وهكذا يكتب عالم الفلك العُرضي (المتوفَّى سنة ١٢٦٦):

ولم يأتِ من بعده (أي بطلميوس) من يُكمل هذه الصناعة على الوجه الصواب ولم يزد أحد من المتأخرين ولم يُنقص شيئاً على ما عمله، لكن تابعوه بأجمعهم. ومنهم من شكّك ولم يأتِ بشيء غير ذكر الشكّ فقط، كأبي علي بن الهيثم وابن أفلح المغربي[١٣].

إنَّ كلام العرضي هذا، إذا فهمناه على بداية القول، يُدهشنا لعدَّة أسباب؛ فهو، كما يبدو، يجهل فعلاً إسهام ثابت بن قرَّة (٨٢٦-٩٠١) كما يجهل كل الإسهامات الأخرى التي ظهرت خلال ثلاثة قرون في الفلكيات الرياضية. فهذا الكلام، كما يظهر، لا يأخذ بعين الاعتبار النتائج المؤكّدة التي تمّ الحصول عليها من بداية القرن التاسع في الرصد الفلكي وفي الأعمال الخاصّة بالأدوات الفلكية. وهو يُظهر خطأ في الرؤيا، ازدادت فداحته مؤخَّراً، مفاده أنّه يوجد تقليد مستقل في علم الفلك الرياضي مكرَّسَة كتاباته في مُعظمها لانتقاد آراء بطلميوس المشكوك فيها. وهذا الكلام يكشف أخيراً، كما يبدو، أنَّ العُرضي لم يكن مُطَّلعاً على كتابات ابن الهيثم الفلكية باستثناء "الشكوك على بطلميوس". ولكن كل هذا غير مُحتمل من قِبَل العرضي، ولا سيّما أنَّ أستاذه في مراغة نصير الدين الطوسي كان مطّلعاً، على الأقل، على كتاب ابن الهيثم "في حركة الالتفاف"، الذي يُقدِّم فيه هيئة لهذه الحركة يجمع فيها بين السينماتيكا وعلم الهيئة[١٤]. كلُّ شيء يدلُّ على أنَّ العرضي أراد تأكيد أنَّ ابن الهيثم لم يقدِّم هيئة للكون مبنية على التقليدين في آن واحد- أي تقليد المجسطي وتقليد كتاب الاقتصاص- بحيث يُمكن الجمع فيها بين السينماتيكا وعلم الهيئة، على أن تكون نظرية الكواكب الحاصلة

---

[١٣] ج. صليبا: تاريخ علم الفلك العربي مؤيد الدين العرضي كتاب الهيئة، بيروت ١٩٩٠، ص. ٢١٤.

[١٤] وفقاً لما يورده نصير الدين الطوسي استناداً إلى نص، مفقود الآن، لابن الهيثم، هذه الحركة هي حركة انحراف الذروة والحضيض ونقطتي البعد الأوسط لفلك التدوير. وهدف ابن الهيثم ، كما يبدو هو بناء هيئة من الأفلاك (الكرات) المُصْمَتَة التي هي المحرِّكات التي تُدير هذه الحركة. يضيف ابن الهيثم، وِفقاً لهذه الهيئة، ثلاثة أفلاك مصمتة لأفلاك التدوير الخاصّة بالكواكب العلوية وخمسة أفلاك مصمتة للكواكب السفلية، لكي يأخذ بعين الاعتبار الانحرافات المختلفة المُحَقّقَة بالرصد. انظر:

. *F. J. Ragep, Naṣīr al-Din al-Ṭūsī Memoir on Astronomy* (*al-Tadhkira fī ‘ilm al-hay’a*), New York,1993

متماسكة وقادرة على التنبّؤ على أحسن وجه ممكن بحركات الكواكب، أي أن تكون هيئة مشابهة لتلك التي اعتبر العرضي أنه قد بناها في كتابه[١٥].

إنَّ انتقاد العرضي لا يرتكز على أسس صلبة من جهة، لكن يبدو مُبرَّراً من جهة أخرى. إنَّ ابن الهيثم هو صاحب النظرية الفلكية التي سترد أدناه. لقد فهم الرياضي ابن الهيثم في هذه النظرية أنَّ الإصلاح الحقيقي لا يقتضي إنشاءَ هيئة بالمعنى الذي يقصده العرضي، بل يقتضي بناء سينماتيكا على أسس رياضية صلبة قبل التفكير في أية ديناميكية.

١-٢ في "هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"

لقد قام ابن الهيثم بكتابة موسوعة حقيقية تحت عنوان "هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"؛ وهو كتاب في علم الفلك يُعالِج، كما تدلُّ كلمة هيئة، نظريةَ حركات الكواكب. لقد وصل إلينا هذا الكتاب، الذي يُعدّ بفضل مضمونه الريّاضي في طليعة كتب عصره، ويعرض بحوثاً مُبتكَرة ومهمّة في نفس الوقت، في مخطوطة وحيدة. وهي في حالة يُرثى لها: فهي منقوصة من قسم مهمّ منها، وأوراقها غير مُرتَّبة، كما أنَّ الرطوبة قد جعلت بعض أجزائها غير مقروءة، أما الخطُّ فهو غامض صعب القراءة.

يتألّف هذا الكتاب ـ الذي سنشير إليه باختصار، من الآن فصاعداً، باسم "هيئة الحركات" ـ من ثلاث مقالات: المقالة الأولى تخصّ علم الفلك الرياضي، وفيها يُعِدُّ ابن الهيثم نظريته في الكواكب؛ المقالة الثانية مكرَّسة للحساب الفلكي أو، كما يكتب ابن الهيثم، "لكل عمليات الحساب"؛ والمقالة الثالثة تتحدّث عن آلة فلكية، سهلة الاستعمال، تسمح بحسابٍ دقيق لارتفاع الشمس والكواكب. لم تصل إلينا من هذه الموسوعة سوى المقالة الأولى في نظرية الكواكب. إنَّ حجم هذه المقالة يجعلنا نتخيَّل ضخامةَ المؤلّف الأصلي، قبل أن يضيع قسمٌ مُهِمٌّ منه، وعظمَ الإنجاز الذي حقّقه هذا الرياضي؛ لقد كان ابن الهيثم يريد على أرجح الاحتمالات معالجةَ كل مواضيع علم الفلك في هذا الكتاب، كما فعل ذلك لعلم المناظر في مؤلّفه "كتاب

[١٥] لقد أعطى ابن الشاطر فيما بعد تقييماً أقل قساوة من تقييم العرضي. فهو يكتب في "الزيج الجديد" (الزيج الجديد، مخطوطة أكسفورد، ms. Oxford, Bodleian Library, Arch. Seld. A30, fol. 2r) : "وجدت أفاضل المتأخرين مثل المجريطي وأبي الوليد المغربي وابن الهيثم والنصير الطوسي والمؤيد العرضي والقطب الشيرازي وابن شكر المغربي وغيرهم قد أوردوا على هيئة أفلاك الكواكب المشهورة، وهو مذهب بطلميوس، فيها شكوك يقينية مخالفة لما تقرّر من الأصول الهندسية والطبيعية، ثم اجتهدوا في وضع أصول تفي بالحركات الطولية والعرضية من غير مخالفة لما تقتضيه الأصول، فلم يوفقوا على ذلك واعترفوا بذلك في كتبهم."

علم المناظر". ولكن هذا يُبيِّـن أيضـاً أنَّ أيَّ مؤلّـف فـي علم الهيئـة لم يكن يتضـمَّن فـي ذلك العصـر موضـوعاً واحـداً للبحـث، بـل عـدّة مواضـيع فـي آن واحـد: وهـي نظريـة حركـات الكواكب، ودراسة طرائق الحساب الفلكي الضرورية لتـأليف الأَزْيـاج - وهـي الجداول التـي تتضـمَّن قِيَمَ الوسـائط اللازمـة لحسـاب مواضـع الكواكـب - بالإضـافة إلـى بحـث فـي الآلات الفلكية.

تتضـمَّن المقالـة الأولـى التـي وصـلت إلينـا حـول نظريـة الكواكب تمهيداً إضـافياً لمجمـوع مقالات المؤلّف يُعلّل فيه ابن الهيثم تنظيم المؤلّف، بالإضافة إلى أسلوب التحرير الـذي اتّبعـه. ويعلـن ابـن الهيـثم بالفعـل فـي هـذا التمهيـد أنَّ أسلوبَ التحريـر برهـانيٌّ بشـكل مقصـود، وأنَّ مؤلّف "هيئة الحركات" يُلْغي كل الكتابات التي حرَّرها سابقاً حول نفس المواضيع.

وتلـي هذا التمهيدَ القصيرَ دراسـةٌ رياضية تكاد تَحْتَلُّ نصـف المقالـة. ويشمل هذا البحث خمس عشرة قضـية تـُستخدَم كمقدِّمات لإثبـات نظريـة حركـات الكواكب. والقسم الثـاني من المقالة مُكرَّس لهذا الإثبات. ونلاحظ أنَّ ابن الهيثم يباشر العمل، في القسم الأول من المقالـة، فـي ميدان جديد لرياضـيات اللامتناهيـات فـي الصـغر، وذلـك أنّـه يَقوم فيـه تحديداً بدراسـة التغيُّرات؛ وهي تغيُّرات بعض عناصـرِ شكلٍ من الأشكال تِبْعاً لعناصـر أخـرى، وتغيرات النسب وتغيُّرات العلاقات المُثلّثاتية. ويَستخدِم ابن الهيثم في هذا البحث الجديد مفاهيمَ لهندسـة اللامتناهيات في الصـغر والمقارنـة بين الفروق المنتهيـة. وهذا البحث فـي المتغيرات، الـذي نشـأ لتلبيـة حاجـات علـم الفلك، اندمج بفضـل ابـن الهيـثم فـي ميدان هندسـة اللامتناهيـات فـي الصـغر.

وهكـذا أصـبح بإمكـان ابـن الهيـثم، بعـد أن أنهـى هـذا القسـم الرياضـي، أن يضـع نظريتـه الكوكبية. ولكنَّ هذا القسم، بامتداده وعمقه، يُلْقي الضوءَ مُسبَّقاً علـى أحد الأهداف التـي سـعى إليها ابن الهيثم في بحوثـه الفلكيـة، وهو تَرْييض النظريـة الكوكبيـة أكثر من ذي قبْل وبشكل أكثر منهجيـة. ولقد سلك ابنُ الهيثم فـي النظريـة الكوكبيـة، كمـا فعل فـي المجـالات العلميـة الأخـرى، الطريـقَ التـي افتتحهـا أسـلافه بـدءاً مـن ثابـت بـن قـرّة، وذلـك مـن أجـل تعميقهـا وتوسيعها وإيصـالها إلـى أبعد مدى ممكن. إنَّ عدم أخذ هذا المشروع بعين الاعتبـار يحـول دون فهم أيِّ شيء في "هيئة الحركات".

ولكن، لكي يكون هذا التربيض ممكناً، في إطار نظرية مركزية الأرض التي كانت ما تزال سائدة في عصره، ولكي يُمكن القيام بهذا التربيض من دون الاصطدام بتناقضات بطلميوس التي كان قد انتقدها في كتابه " الشكوك على بطلميوس"، وجد ابن الهيثم نفسه مجبراً على إعادة التفكير في الأسس نفسها للفلك البطلمي. إنَّ هذا التربيض المنهجي لم يكن في نظره إذاً مهمةً بسيطة مرتبطة بالآلات أو باللغة بل كان مهمةً نظرية مَحْضَة. وهكذا تصوَّر ابن الهيثم نظرية كوكبية جديدة لا تتوقَّف عند دراسة الاختلافات، وذلك انطلاقاً من الفصل المقصود بين السينماتيكا وعلم الهيئة.

لقد توصَّل ابن الهيثم في كتاب "الشكوك" إلى الاستنتاج التالي:

" فقد تبيَّن من جميع ما ذكرناه أنَّ الهيئة التي قررها بطلميوس لحركات الكواكب الخمسة هي هيئة باطلة"[١٦].

وكان قد قال قبل هذه الجملة بعدة سطور:

"فالترتيب الذي رتبه بطلميوس لحركات الكواكب الخمسة خارج عن القياس"[١٧].

ثم أعلن بعدها بقليل:

"فالهيئة التي فرضها بطلميوس للكواكب الخمسة هي هيئة باطلة، وقررها على علم منه بأنها باطلة، لأنه لم يقدر على غيرها. ولحركات الكواكب هيئة صحيحة في أجسام لم يقف عليها بطلميوس ولا وصل إليها."[١٨]

وبعد أن تَلَفَّظ بهذه الأقوال وبالكثير من الأقوال الأخرى المشابهة لها، مع أنّه كان يَكِنّ الكثير من الاحترام لبطلميوس كما تدلُّ على ذلك أقوال أخرى له، لم يكن لرياضيّ من مستوى ابن الهيثم من خيار سوى أن يبني بنفسه على أسس رياضية متينة نظرية كوكبية خالية من التناقضات التي تضمَّنتها نظرية سلفه. ولقد كرَّس ابن الهيثم مؤلّفه "هيئة الحركات" بالتحديد لتحقيق هذا البرنامج.

إنَّ معظم التناقضات الخطيرة التي أشار إليها ابن الهيثم تخصّ كتاب المجسطي وكتاب الاقتصاص. وإذا أردنا وصف التناقضات غير القابلة للتجاوز والتي تشوب فلكيّات بطلميوس، نقول إنّها تلك التي تنتج من عدم التوافق بين النظرية الرياضية للكواكب وعلم

---

١٦ انظر " الشكوك على بطلميوس"، تحقيق صبرة والشهابي ، ص. ٣٤

١٧ انظر المرجع السابق، ص. ٣٣-٣٤

١٨ انظر المرجع السابق، ص. ٤٢

الهيئة. ولقد أَلِفَ ابن الهيثم حالات مشابهة لهذه الحالة، من دون أن تكون بالطبع مطابقة لها، عندما وجد نفسه، خلال دراسته لعلم المناظر، في مواجهة عدم التوافق بين علم المناظر الهندسي وعلم المناظر الفيزيائي، بالمعنى المفهوم من قِبَل الفلاسفة. وهكذا مالَ ابن الهيثم، إذا صحّ التعبير، في إتمامه لإصلاح علم المناظر، نحو "موقف وضعي" قبل الأوان، إذ كان يعتبر أنّه لا يُمكن أن نتخطّى ما تعطيه التجربة، ولا يُمكن أن نكتفي بالمفاهيم وحدها في دراسة الظواهر الطبيعية. وذلك، أنّه لا يمكن الحصول على معرفة الظواهر الطبيعية من دون استِخْدامِ الرياضيات. وهكذا، فإنَّ ابن الهيثم، بعد أن افترض مادِّيّة الضوء، لم يعد إلى مناقشة هذا الموضوع من جديد، بل اقتصر في دراسته على وصف انتشار الضوء وانبثاثه. وإنَّ "أصغر الأجزاء من الأضواء"، وفقاً لعبارته، لا تحتفظ في علم المناظر الذي تبنّاه، إلا بالخصائص القابلة للمعالجة الهندسية وللمراقبة التجريبية، فتصبح مُجَرَّدة من كل الميزات الحسيّة التي لا تتعلّق بالطاقة. وهذا يعني أنّه بدأ يجتهد لجعل علم المناظر هندسياً أو لإصلاح علم المناظر الهندسي، بعد أن وضع جانباً التساؤلات المتعلّقة بالفيزياء الغائية، على أن يُدخلها فيما بعد عندما يعود إلى علم المناظر الفيزيائي. لقد أدَّت هذه العملية الهندسية، كما سنتحقّق من ذلك، بابن الهيثم إلى القيام بدراسة سينماتيكية – ميكانيكية – لانتشار الضوء[١٩].

ويسير ابن الهيثم، في علم الفلك، في مسار موازٍ للمسار الذي سلكه في علم المناظر : فهو يهتمُّ في كتابه " هيئة الحركات" بالحركات الظاهرة للكواكب، من دون أن يتساءل في أي وقت من الأوقات عن الأسباب الفيزيائية لهذه الحركات تبعاً لديناميكية ما. وهكذا، لم تَعُد أسباب الحركات السماوية تثير اهتمامه، بل الحركات المرصودة في الفضاء والزمان فقط. وهكذا توجَّب عليه، لأجل الترييض المنهجيّ مع تجنّب الصعوبات التي اصطدم بها بطلميوس، أن يبدأ بقطع كلَّ صلة مع أيّة نظريّة في هيئة الأفلاك. وإنَّ ابن الهيثم، في الواقع، لم يَعُد يشير إلى نظرية الأفلاك الفيزيائية التي تحدَّث عنها في كتاب "حل شكوك في حركة

[١٩] انظر مقال ر. راشد: « Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham »، ضمن: *Archive for History of Exact Sciences* ، 6.4 (1970) ص. ٢٧١-٢٩٨ ؛ أعيد طبع هذا المقال ضمن: *Optique et Mathématiques : Recherches sur l’histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum reprints (Aldershot, 1992), II.

الالتفاف" وفي كتاب "الشكوك على بطلميوس". وهكذا يظهر بوضوح مشروعُه الذي سعى إليه في "هيئة الحركات"، وهو البناء الهندسي للسينماتيكا.

والهدف الثاني لابن الهيثم، الذي يدخل ضِمنَ الهدف الأوَّل، هو تجنّب التناقضات التي لاقاها في فلكيات بطلميوس. فهو يقول في كتاب "في حل شكوك في كتاب المجسطي" : "وفي جميع المجسطي شكوك أكثر من أن تحصى"[٢٠]. ولكنه يُمَيِّز في "في حل شكوك في كتاب المجسطي" بين التناقضات القابلة للإصلاح من دون تغيير البنية النظرية وتلك التي يتطلّب حذفُها إصلاحاً نظرياً أساسياً[٢١]. وخير مثال على هذه التناقضات الأخيرة هو مفهوم مُعدِّل المسير الذي اعترض عليه في "الشكوك" ورفضه في "هيئة الحركات". ولقد رفض ابن الهيثم هذا المفهوم لأنَّ أيّة كرة تدور بحركة مستوية حول نفسها لا يمكن أن تكون حركتها هذه حول خطّ مختلف عن أحد أقطارها. ولقد قام ابن الهيثم، برفضه لهذا المفهوم، بالابتعاد جدِّياً عن بطلميوس.

أما الهدف الثالث لابن الهيثم، الذي ألّف كتابين حول الأرصاد الفلكية والأخطاء التي يمكن أن تشوبها وكان على علم من جهة أخرى بالنتائج الرصدية المتراكمة منذ قرنين من الزمان، فهو بناء نظرية كوكبية تُوَضح نتائج هذه الأرصاد.

هذه الأهداف الثلاثة: الترييض، وتَجَنّب تناقضات بطلميوس، وأخذ الأرصاد بعين الاعتبار، كانت مُسَخَّرة من قِبَل ابن الهيثم للوصول إلى الغاية التي قصدها في كتاب "هيئة الحركات" وهي تأسيس سينماتيكا سماوية تعتمد على الهندسة بصورة كاملة. ولكنَّ تحقيق هذه الغاية أَوجَب عليه أن يجد وسيلة لقياس الزمن. وهكذا أدخل من أجل ذلك مفهوماً جديداً، وهو مفهوم "الزمان المُحَصَّل" وهو زمنٌ يُقاس بواسطة قوس.

فإذا تفحَّصنا عن قرب كيف يُرتّب ابن الهيثم تحريره للنظرية الكوكبية، نلاحظ أنّه يبدأ بتقديم هيئات بسيطة- قد تكون وصفية – لحركات كل من الكواكب السبعة. وكلّما تقدَّم في عرضه، نجده يُعقّد الهيئات ويزيد من إخضاعها لمراقبة الرياضيات. ولكن هذا الترييض

[٢٠] انظر: في حل شكوك في كتاب المجسطي، مخطوطة استانبول، بايزيد ٢٣٠٤، ورقة ١٩٥و.

[٢١] انظر: "الشكوك على بطلميوس"، تحقيق صبرة وشهابي، ص. ٥: "ولسنا نذكر في هذه المقالة جميع الشكوك التي في كتبه، وإنما نذكر المواضع المتناقضة والأغلاط التي لا تأوُّل فيها فقط، التي متى لم يخرج لها وجوه صحيحة وهيئات مطردة انتقضت المعاني التي قرّرها وحركات الكواكب التي حصلها. فأما بقيّة الشكوك، فإنها غير مناقضة للأصول المقرّرة، وهي تنحلّ من غير أن ينتقض شيء من الأصول ولا يتغيّر."

المتزايد دفعه إلى تجميع حركات عدة كواكب تحت هيئة واحدة؛ وإنَّ الطابع الرياضي لهذه الهيئة يسمح تحديداً بهذا التجميع، وعلى الأخص انطلاقاً من القضية ٢٤. والنتيجة البديهية لهذا المنهج هو إبراز خاصّة مشتركة لكل هذه الحركات. وهكذا سلك ابن الهيثم طريقاً نحو هدفه الرئيسيّ وهي تأسيس سينماتيكا سماوية، من دون استخدام مفهوم السرعة الآنية الذي لم يكن بعدُ معروفاً، بل باستخدام مفهوم السرعة الوسطى المُمَثّلة بنسبة بين قوسين.

إنَّ شرح كتاب مثل هذا الكتاب، كما سيتّضح للقارئ، ليس بالمهمة السهلة. وذلك أنَّ القسم الرياضي يطرح، بالفعل، مسألة موضوعية. إنَّ ابن الهيثم، مثل كل الرياضيين الكبار، لم يقم بالبحوث الطليعية التي جرت في عصره فحسب ، بل كان يستشعر قسماً من الرياضيات القادمة في المستقبل. ولكنَّ هذه الأخيرة إذا لم تُشكِّل قسماً فعلياً من أعماله، فإنّها ضروريَّة لفهم وتحليل تلك الأعمال. وسيمنع إهمالها إذاً الفهم المُعمَّق للتصوُّر الكامن ضمن البحث الرياضي الوارد في الكتاب. إنَّ نسبة هذا القسم من الرياضيات اسميّاً إلى ابن الهيثم ، في حين أنها لم تظهر إلا في وقت متأخر بعد كتابة هذا المؤلّف، وغالباً ضمن ميادين رياضية أخرى، يُوقع لا محالة في التناقض التاريخي. إنَّ أحسن ما يُمكن عمله، لتجنّب هذا الانزلاق، هو أن نبني، استناداً إلى هذه الرياضيات المستقبلية، نموذجاً لإعادة بناء ما كان يتراءى لهذا الرياضي؛ ممّا سيسمح بمعرفة حدود النتائج التي تَوَصَّلَ إليها بعد التحقّق منها بشكل صارم. هذه هي الطريقة التي اتبعناها هنا وفي أماكن أخرى.

كيف يُمكن أن تُدرَسَ تَغَيُّرات مُعقّدة ودقيقة إلى هذا الحدّ وأن تُحدَّد فُسح التغيُّر بشكل صحيح بواسطة الأدوات الرياضية التي كانت مُتداولة في عصر ابن الهيثم؟ إنَّ التقنيّات، التي تتطلبها دراسة مثل هذه الدراسة، لم ترَ النور قبل القرن الثامن عشر. ومن ثمَّ توجَّب علينا، خلال هذا الشرح، أن نحدِّد من جهة المسار الدقيق لابن الهيثم وأن نعيد من جهة أخرى الأخذ به لامتحان شروط صحة التغيُّرات المدروسة. وإذا كان القسمُ الأول من الشرح مكتوباً بلغة ابن الهيثم وبالوسائل التي استخدمها بنفسه، فإنَّ التحقق من صحة النتائج لا يمكن القيام به بلغة المؤلّف الهندسية لأنّه يتطلّب استخدام تقنيّات رياضية أخرى مختلفة عن تقنيّات عصره. وهكذا تَوجَّب علينا، مع أخذ الاحتياطات الضرورية، أن نقرأ النص، كلما دعت

الحاجـة، بلغـة الرياضـيات الأكثـر تأخـُّراً. ولـيس هـذا التصـرُّف مشـروعاً فحسـب، بـل إنّـه ضروريٌّ إذا أريد فهمُ النص بعمق وإدراكُ حدود النتائج التي حصل عليها المؤلّف.

أما فيما يَخصُّ النظرية الكوكبية، فإنَّ الشارح يجد نفسه أمام خيارين؛ الخيـار الأول هو أن يتبع خطوة خطوة بناءَ الهيئات وتعقيدَها المتزايد، مُرافقاً ابن الهيثم في مساره؛ والخيار الثـاني هو أن يُجمِّع بالتتابع الهيئات الخاصة لكل كوكب. ولكن الخيار الأول هو الوحيد الـذي يسمح بإظهار المشروع الحقيقي لابن الهيثم.

إنَّ تسلسل هذا الشرح بسيط. فنحن نبدأ بعرض تمهيدي شديد الاقتضـاب، حيث نستعيد بعض نتـائج ابن الهيثم التـي لا تتطلّب مناقشتُها عرضـاً طـويلاً؛ وذلـك لأننـا نريـد أن نسمح للقارئ بأن يَستوعِب، على أكبر قدر ممكن من السرعة والسهولة، تطوُّرَ الأفكـار فـي "هيئـة الحركات"، وأن يُكوِّن لنفسه فكرة عن البنية العامة لهذا المؤلّف. ويـأتي، بعد هذا العرض التمهيدي، شرحٌ مُفصَّل لكل قضية من قضايا "هيئة الحركات". وإذا كان صحيحاً أنَّ عرضنا هذا لا يُمكنه أن يتجنّب بعض التكرارات- ونحن نجتهد لتقليل عددها على قدر الإمكان- ، فـإنَّ من إيجابياته أنَّه لا يُبقي شيئاً من دون توضيح.

٢- بنية "هيئة الحركات"

ينقسم أول جزء من كتـاب "هيئـة الحركـات" الـذي وصـل إلينـا إلـى قسمين: القسم الأول رياضي ومُكَرَّس بشكل أساسي لدراسة التغيّرات، وهو يتألّف من خمس عشرة قضية. والقسم الثاني يعالج النظرية الكوكبية.

٢-١ بحوث في التغيُّرات

تتـوزَّع القضـايا الخمـس عشـرة التـي يبـدأ بهـا هـذا الجـزء فـي عـدة مجموعـات. تحتـوي المجموعة الأولى على القضايا الأربع الأولى المكرّسة لدراسة تغيرات الـدوال المثلثاتيـة مثل $\frac{\sin x}{x}$. ويبرهن ابن الهيثم بالفعل بشكل دقيق القضايا التالية:

١- إذا كان α وَ α_1 قياسيْ قوسين، بالزاوية نصف القطرية (راديان)، من دائرة بحيث يكون: $\alpha+\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$ وَ $\alpha > \alpha_1$ فإنَّ $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} > \frac{\alpha}{\alpha_1}$ وَ $\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} > \frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha_1}$.

٢- إذا كان α وَ α_1 قياسيْ قوسين من دائرة بالزاوية نصف القطرية، وكان β وَ β_1 قياسيْ قوسين من دائرة أخرى، بحيث يكون:

$$\beta+\beta_1 < \alpha+\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{وَ} \quad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{1}{k} \quad (\text{مع } k < 1)\text{،}$$

فإنَّ: $\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} < \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$ وَ $\frac{\sin\beta}{\sin k\beta} < \frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}$.

ويبرهن ابن الهيثم، كلازمة لهذه القضية، أنَّ: $\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} > \frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin(\beta_1)}$ أو $\frac{\sin[(1+k)\beta]}{\sin(k\beta)} < \frac{\sin[(1+k)\alpha]}{\sin(k\alpha)}$.

وكان ابن الهيثم قد برهن هذه القضية في مؤلّفه "في خطوط الساعات".

٣- إذا كان α وَ α_1 قياسيْ قوسين من دائرة بالزاوية نصف القطرية، وكان β وَ β_1 قياسيْ قوسين من دائرة أخرى، بحيث يكون:

$$\beta+\beta_1 < \alpha+\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{وَ} \quad \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1}\text{،}$$

فإنّه يكون: $\beta < \alpha$ وَ $\frac{\alpha}{\alpha_1} < \frac{\beta}{\beta_1}$.

٤- إذا كان α وَ α_1 قياسيْ قوسين من دائرة بالزاوية نصف القطرية، وكان β وَ β_1 قياسي قوسين من دائرة أخرى، بحيث يكون:

$$\beta+\beta_1 < \alpha+\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2} \text{ ، } \alpha_1 < \alpha \text{ ، } \beta_1 < \beta \quad \text{وَ} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \leq \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1}.$$

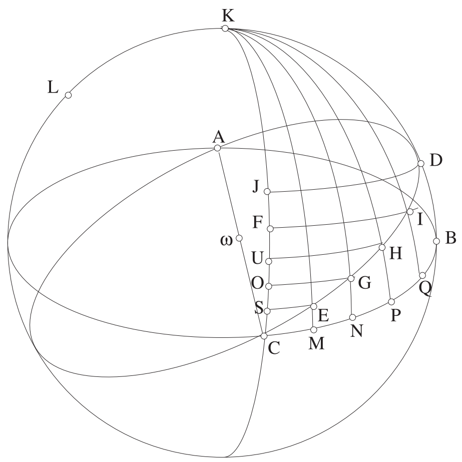
فإنَّ: $\frac{\beta}{\beta_1} > \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

وإذا كان: $\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \leq \frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1}$، فإنَّ: $\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{\beta+\beta_1}{\beta_1}$ أيْ $\frac{\alpha}{\alpha_1} < \frac{\beta}{\beta_1}$.

وتتألّف المجموعة الثانية من ثلاث قضايا – وهي ذات الأرقام ٥ وَ ٦ وَ ٧- وتُعالِج، هي أيضاً، تغيُّرات المقادير والنِّسَب. يدرس ابن الهيثم في القضيتين الأولَيَيْن-٥ وَ ٦- تغيّر ميل النقاط الموجودة على ربع دائرة. ويَتفحَّص في القضية ٧ تغيُّرَ الطالع المستقيم. وهو يُقارِن خلال دراسته لهذه القضايا بين فروق منتهية ويستخدم مفاهيمَ هندسة اللامتناهيات في الصغر، كما يستخدِم قاعدةَ الجيوب التي كانت معروفة من قِبَل الرياضيين في زمنه مثل أبي الوفاء البوزجاني وابن عراق[٢٢].

وهو يتناول في القضيتين الخامسة والسادسة كرة مركزها ω، ويفرض في هذه الكرة دائرتين مرجعيَّتين: دائرة عظمى ABC، قطرها AC وقطبها K، والدائرة العظمى KC العمودية على ABC.

ثم يأخذ دائرة عظمى قطرها AC تقطع القوس $\widehat{KB}$ على النقطة D. ويُرفَق مع كل نقطة مأخوذة على القوس $\widehat{CD}$، مثل النقطة H، الدائرةَ العظمى KH التي تقطع القوس $\widehat{CB}$ على النقطة P، والدائرة الموازية لـ (ABC) التي تقطع القوس $\widehat{KC}$ على النقطة U؛ فيكون معنا $\widehat{PH} = \widehat{CU}$. والقوسان $\widehat{PH}$ وَ $\widehat{CP}$ هما، بالترتيب، الميل(بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار) والطالع المستقيم للنقطة H بالنسبة إلى الدائرة ABC .



الشكل ١

[٢٢] انظر: ماري تيريز ديبارنو (*M.-Th. Debarnot*):
البيروني: مقاليد علم الهيئة ،
La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du Xe siècle, Institut Français de Damas (Damas, 1985).

ويدرس ابن الهيثم في بادئ الأمر كيفية تغيُّر ميل $\widehat{PH}$ عندما ترسم النقطة H القوس $\widehat{CD}$.

لتكن α الزاوية المحصورة بين السطحين ABC وَ ADC، فيكون لدينا $\widehat{B\omega D} = \alpha$ أيْ $\alpha = \widehat{BD}$. لنفرض $x = \widehat{CH}$ وَ $y = \widehat{PH} = \widehat{CU}$ ، فيكون معنا:

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ وَ $0 \le y \le \alpha$.

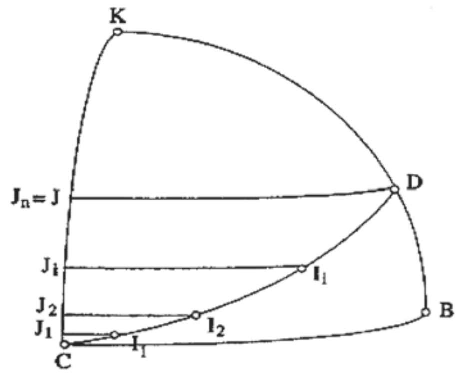
وتتضمَّن هذه القضية قسمين يُمكن تلخيصهما كما يلي:

(أ) القوس $\widehat{CD}$ مقسومة إلى عدد n من الأجزاء المتساوية بالنقاط ذات الإحداثيات المنحنية x_i، $0 \le i \le n$ ، مع $x_0 = 0$ وَ $x_n = \frac{\pi}{2}$. ويتوافق الفارق $\Delta x = x_i - x_{i-1} =$ مع $\frac{\pi}{2n}$ $\Delta y = y_i - y_{i-1}$. ويُبرهَن أنَّ Δy تتناقص عندما تتزايد i من 1 إلى n. وهذا يعني أنَّ y دالة مُقَعَّرَة للمُتغيِّر x.

(ب) لنأخذ قوسين متساويتين لهما طرف مُشتَرك، مع $x_i < x_j < x_k$ وَ $x_j - x_i = x_k - x_j$.

يُبَيَّن، وفقاً لـِ (أ) أنَّ $y_j - y_i > y_k - y_j$. ويُمكن أن نكتب هذه النتيجة على الشكل التّالي:

$$\frac{y_k - y_j}{y_j - y_i} > \frac{x_k - x_j}{x_j - x_i}$$ ،



الشكل ٢

أو على الشكل الآخر: $\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} < \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}$.

وهذا يعني أنَّ انحدارَ وتر الخط البياني للدالة y للمتغيِّر x تناقصيٌ. والقضية السادسة تُعمِّم هذه النتيجة إلى الحالة التي تكون فيها القوسان، وهما $\widehat{IJ}$ وَ $\widehat{JK}$، غير متساويتين، مع

$x_i < x_j < x_k$ وَ $x_j - x_i \neq x_k - x_i$.

* إذا كانت القوسان اللتان لهما طرف مشترَك مشتركتين، تُستخرَج النتيجة من (أ) وَ (ب).

* إذا كانت هاتان القوسان غير مشتركتين، يستخدم ابن الهيثم استدلالاً بالخُلْف ليبرهن أنّـه لا يُمكن أن يكون معنا:

$$\frac{x_k - x_j}{x_j - x_i} \leq \frac{y_k - y_j}{y_j - y_i}.$$

ويُلاحَظ أنَّ ابن الهيثم، بعد أن يُبرهن المتباينة المطلوبة عندما تكون المقادير المأخوذة مشتركة، يُثبِت النتيجة العامَّة بفضل تمديد بالاتصال مُبَرهَن بدقّة بطريقة الخُلْف وبفضل تطبيقه لتعميم قام به للمقدمة ١٠ـ١، من كتاب " الأصول" لأقليدس.

ويتعلّق الأمر، إذاً، باستدلال تبعاً لهندسة اللامتناهيات في الصغر، لتمديد متباينة بالاتصال؛ ونحن لسنا على علم إلى الآن بوجود أيِّ مثال لهذا الاستدلال متقدِّم على ابن الهيثم. ونلاحظ أيضاً أنَّ ابن الهيثم يستخدم هنا الأقواس والزوايا كأنها أقدارٌ يمكن أن تُطبَّق عليها نظرية النِّسَب.

لنتناول الآن من جديد دراسته لتغيُّر الميل، ولنبيِّن أنَّ نتائجه صحيحة.

فلنفرض $y= \widehat{PH}$ كدالّة للمتغيِّر $x = \widehat{CP}$. فيكون معنا $f(x)=y$.

والقوسان $\widehat{PH}$ وَ $\widehat{CP}$ في المثلث الكروي CHP متعامدتان، فيكون إذاً $\hat{P}=\frac{\pi}{2}$؛ وزاوية القوسين $\widehat{CH}$ وَ $\widehat{CP}$ هي زاوية الخطَّين المماسَّين لهما، وهي مساوية للزاوية $\widehat{B\omega D}$، فيكون معنا: $\hat{C} = \alpha$. والمعادلة $\frac{\sin \widehat{PH}}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin \widehat{CH}}{\sin \hat{P}}$ تعطي إذاً: $\sin x = \frac{\sin y}{\sin \alpha}$؛ وبذلك تكون الدالة y للمتغيِّر x مُعَرَّفة بالعلاقة : $\sin \alpha \cdot \sin x = \sin y$ ، أي أنَّ:

$$y = \text{Arc} \sin (\sin \alpha \cdot \sin x).$$

ويكون معنا: $\cos y \, dy = \sin \alpha \cdot \cos x \, dx$، أي أنَّ:

$$y'_x(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 x}}.$$

فيكون من ذلك: $y'' = -\frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin x}{\left(1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}$.

فإذاً، إذا كان $\frac{\pi}{2} > x > 0$ ، يكون معنا: $y' > 0$ وَ $y'' < 0$ ؛ وبذلك فإنَّ الدالّة: $y = \widehat{PH} = f(x)$ تتزايد من 0 إلى α. ولكن $f'(x)$ تتناقص في الفسحة $[0, \frac{\pi}{2}]$ فتكون الدالة f مُقَعَّرة، فيكون معنا:

$$\frac{x_m - x_k}{x_j - x_i} > \frac{y_m - y_k}{y_j - y_i}.$$

فإذا أخذنا في هذه العبارة:

* $x_j - x_i = x_m - x_k = \frac{\pi}{2n}$ ، نحصل من جديد على النتيجة (أ).

* $x_j - x_i = x_m - x_k$ ، نحصل من جديد على النتيجة (ب) لقوسين متساويتين.

* $x_m - x_k \neq x_j - x_i$ ، نحصل من جديد على النتيجة (ج) لقوسين غير متساويتين.

* إذا كان $x_k = x_j$، تكون القوسان متلاصقتين.

* إذا كان $x_j < x_k$ ، تكون القوسان منفصلتين.

ويدرس ابن الهيثم في القضية السابعة الطالع المستقيم $\widehat{CP}$ عندما ترسم النقطة H القوس $\widehat{CD}$.

لنفرض $x = \widehat{CH}$ وَ $z = \widehat{CP}$ عندما يكون $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ وَ $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.

(أ) تُقسَم القوس $\widehat{CD}$ إلى عدد n من الأجزاء المتساوية بالنقاط ذات الإحداثيات المنحنية x_i، كما جرى ذلك عند دراسة الميل. وتتوافق الزيادة $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ ، للطالع المستقيم، مع $z_i - z_{i-1} = \Delta z$ ؛ وبتطبيق مبرهنة منالاوس الخاصة على أقواس من دوائر عظام، يُبيَّن أنَّ Δz تتزايد عندما تتزايد i من 1 إلى n.

(ب) ويقول ابن الهيثم بعد ذلك إنّه يُمكن تعميم النتيجة، كما حصل بصدد دراسة الميل، إذا أخذنا قوسين على القوس $\widehat{CD}$، متساويتين أو غير متساويتين، متلاصقتين أو منفصلتين، مُشتركتين أو غير مشتركتين. وهكذا يكون معنا، إذا أخذنا القوسين I_iI_j و I_kI_m مع: $x_i < x_j \leq x_k < x_m$:

$$\frac{x_m - x_k}{x_j - x_i} < \frac{z_m - z_k}{z_j - z_i}.$$

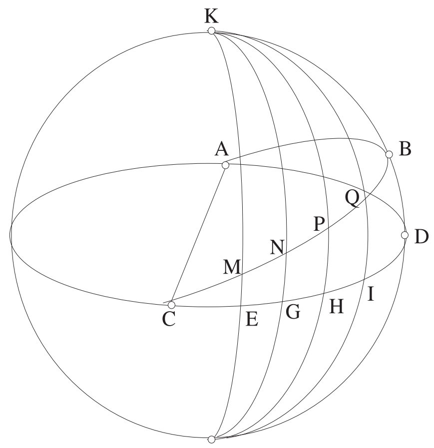
وهذا يعني أنَّ z دالّة مُحدَّبة للمتغيِّر x.

لنتناول من جديد دراسة الطالع المستقيم. لنفرض $\overset{\frown}{CP} = z$ كدالة للمتغيِّر x ،$\overset{\frown}{CH} = x$ عندما ترسم النقطة H القوس $\overset{\frown}{CD}$ ؛ وليكن $g(x) = z$.

والدوائر الأربع ذات العلاقة هي دوائر عظام، وهكذا تعطي مبرهنة منالاوس:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{CH}}{\sin \overset{\frown}{HD}} = \frac{\sin \overset{\frown}{CP}}{\sin \overset{\frown}{PB}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{KB}}{\sin \overset{\frown}{KD}}$$

مع: $x = \overset{\frown}{CH}$ ، $\frac{\pi}{2} - x = \overset{\frown}{HD}$ ، $z = \overset{\frown}{CP}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{2} - z = \overset{\frown}{PB}$ ، $\frac{\pi}{2} - \alpha = \overset{\frown}{KD}$.



الشكل ٣

فيكون معنا: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin z}{\cos z} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$ ، فنستنتج أنّ: $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} z$ ، أو $g(x) = \operatorname{Arc\,tg}\,(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} x) = z$.

فيكون معنا: $\cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx = (1 + \operatorname{tg}^2 z)\, dz$ ،

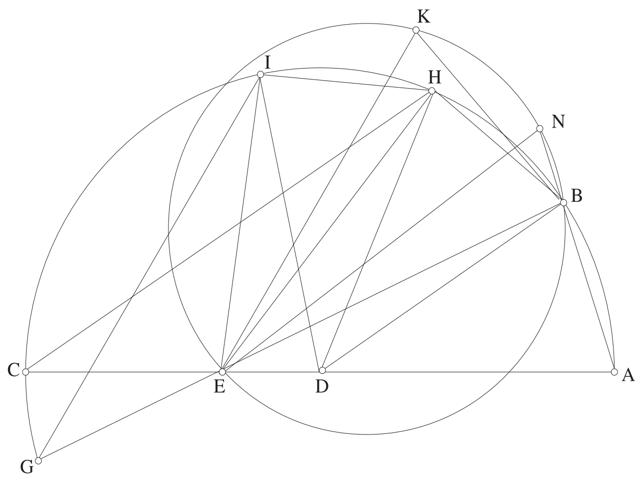
$$z' = g'(x) = \frac{\cos \alpha \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)}{1 + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 x + \cos^2 \alpha \sin^2 x} ؛$$

فنستنتج أنّ: $z'' = \frac{\sin 2x \cos \alpha \ \sin^2 \alpha}{\left(\cos^2 x + \cos^2 \alpha \sin^2 x\right)^2}$.

وهكذا، يكون معنا $z' > 0$ إذا كان $0 < x < \frac{\pi}{2}$، أيْ أنَّ z تتزايد من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$. وكذلك يكون معنا: $z'' > 0$، أي أنَّ $g'(x) = z'$ تتزايد من 0 إلى $\frac{1}{\cos\alpha}$ ، فنحصل على النتيجة التي أثبتها ابن الهيثم للزيادة Δz.

ويُشير ابن الهيثم، كما فعل عند دراسته للميل، إلى أنَّ من الممكن تعميم النتيجة على شكل مُتباينة للفروق بين المطالع المستقيمة لأقواس غير متساوية؛ وهذا ما يقوم به أولاً عندما تكون القوسان مشتركتين، ثم في الحالة العامة التي يستخدم فيها التمديد بالاتصال.

والمجموعة الثالثة تتألّف من القضيتين الثامنة والتاسعة. يأخذ ابن الهيثم دائرة (D, CD) ونقطة E على DC والأقواس المتساوية $\widehat{AB}$، $\widehat{BH}$ وَ $\widehat{HI}$ ، بحيث يُحقّق الوتر AB المتباينة $AB < EC$ ، ويُبرهن أنَّ: $\widehat{AEB} < \widehat{BEH} < \widehat{HEI}$.



الشكل ٤

وإذا وضعنا $\theta = \widehat{ADB}$ ، مع $\theta \in [0,\pi]$ وَ $\varphi = \widehat{AEB}$، نرى أنَّ ابن الهيثم يدرس تغيُّر φ كدالة للمتغيِّر θ.

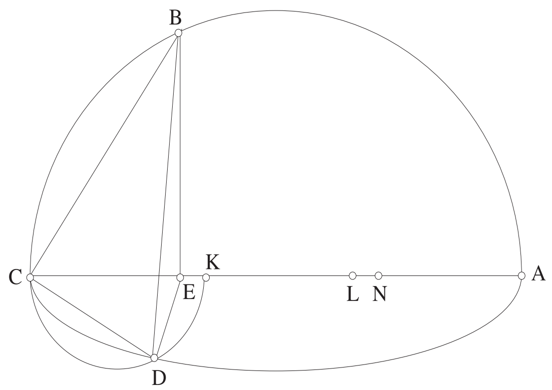
ويدرس ابن الهيثم في القضية التاسعة اتجاه التغيُّر لهذه الدالّة.

والمجموعة الرابعة مكرَّسة لدراسة تغيّر النسب في حالات متزايدة في تعقيدها. وتتكوَّن هذه المجموعة من القضايا ذات الأرقام ١٠، ١١، ١٢، ١٤ و١٥. أمّا القضية ذات الرقم ١٣ فهي مقدِّمة تَقَنِيَّة. والقضية العاشرة في هذه المجموعة لا تعالج المسألة المعقّدة الخاصة بفُسَح التغيّر؛ أما القضيتان الحادية عشرة والثانية عشرة، من جهة، والقضيتان الرابعة عشرة والخامسة عشرة، من جهة أخرى، فهي تتطلّب مناقشة طويلة ومفصّلة نجدها ضمن الشرح.

يأخذ ابن الهيثم، في القضية العاشرة، مستويين متعامدين P وَ Q ونقطتين A وَ C على خط تقاطعهما ونصف دائرة قطرها AC في المستوي P وقوساً من دائرة وترها AC وهي قوس في المستوي Q أصغر من نصف دائرة.

والهدف هو برهنة وجود نقطة D بحيث يكون $DE \perp AC$ وَ $EB \perp AC$، (B موجودة على نصف الدائرة) وبحيث تكون النسبة $\frac{DB}{DC}$ معلومة مع $\frac{DB}{DC} > k > 1$.

ونُبرهن أولاً أنّه توجَد نقطة وحيدة K على AC بحيث يكون: $\frac{KA}{CK} = k^2$.



الشكل ٥

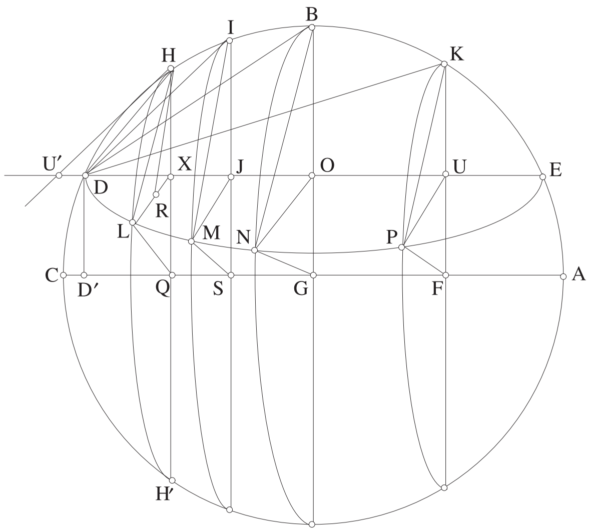
ثم نرسم دائرة قطرها CK في المستوي Q ونُبرهن أنَّ كل نقطة D مأخوذة على الدائرة تحقّق النسبة المعلومة.

ويتناول ابن الهيثم في القضيتين الحادية عشرة والثانية عشرة دائرة نصف النهار ABC في مكان معلوم G والقطبين السماويين A وَ C ودائرة موازية للأفق مركزها O تقطع دائرة نصف النهار على D وَ E. ويأخذ دائرة مركزها Q موازية لمعدِّل النهار تقطع دائرة نصف النهار على النقطة H وتقطع الدائرةَ الأفقية على النقطة L وتقطع مستويَ هذه الدائرة على النقطة X.

ويبيِّن ابن الهيثم أنَّ النقطة X إذا رسمت DE من D إلى E، فإنَّ L ترسم الدائرة ذات المركز O الموازية لمعدل النهار وإنَّ النسبة $\frac{HL}{HD}$ تتناقص وتنتهي إلى الصفر.

يُفرض في القضية الثانية عشرة أنّ القطبَ A فوق الأفق، ويكون GOz عمود المكان، فتكون الزاوية $\widehat{DXH} = \widehat{DOz}$ مستقلةً عن وضع النقطة X (انظر الشكل ٢٦، ص. ١١٥).

ويبرهن ابن الهيثم ما يلي: عندما ترسم النقطة X الخطَّ DE، تتناقص القوس $\widehat{HE}$ وكذلك $\sin \widehat{HDX}$، فتتناقص بالتالي الكمية : $\frac{HX}{DH} = \frac{\sin \widehat{HDX}}{\sin \widehat{DXH}}$.



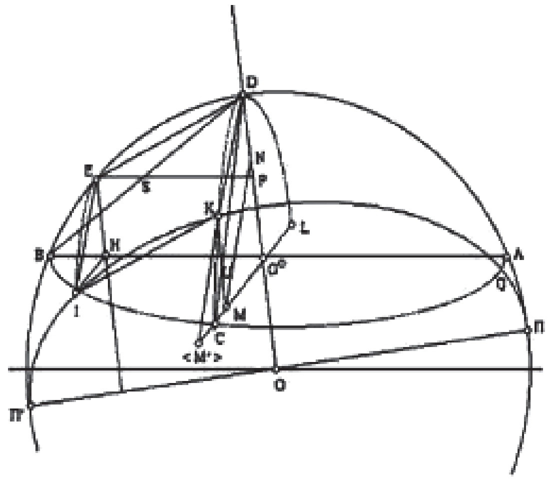
الشكل ٦

وأخيراً يَستخدِم ابن الهيثم في القضيّتين الرابعة عشرة والخامسة عشرة، في مكان معلوم، الكرةَ السماوية ومحورَها وقطبيها π وَ π' ومستويَ نصف النهار للمكان؛ ويفترض القطبَ π على الأفق أو فوق الأفق.

يأخذ ابن الهيثم في القضية الرابعة عشرة نصف النهار ADB لمكان معلوم، ودائرة أفقية ABC، ودائرتين موازيتين لمعدِّل النهار تقطعان نصف النهار على النقطتين E وَ D وتقطعان الدائرة ABC على النقطتين I وَ C كما تقطعان دائرة عظمى قطرها $\pi\pi'$ على النقطتين I وَ K . يُبرهن ابن الهيثم ما يلي:

إذا كان $\frac{1}{2}\widehat{ADB} \geq \widehat{BD} > \widehat{BE}$، فإنَّ : $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{DB}} > \frac{\widehat{IE}}{\widehat{EB}}$.

ويتعلّق الأمر في الواقع بدراسة تَغَيُّر $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EB}}$ كدالة للمتغير $\widehat{BE}$، وهذا يعني أنَّ هذه النسبة تتناقص عندما تجري E من B نحو F على قوس من دائرة نصف النهار(وَ F هي وسط القوس AB).



الشكل ٧

أما القضية الخامسة عشرة، فهي تُعمِّم القضية السابقة. فالقضيتان تبيِّنان، كما سنرى لاحقاً، أنَّ ابن الهيثم قد سعى، بالوسائل الهندسية التي كانت متوافرة لديه، إلى دراسة تغيُّرات بعض النسب المثلثاتية، تلك الدراسة التي لم يكن بإمكانه أن يُتمِّمها؛ ولكنه أفسح المجال لبحث رياضي جديد، كما سنبيِّن ذلك ضمن الشرح.

٢-٢ النظرية الكوكبية

يشرع ابن الهيثم مباشرة، بعد أن يُثبت هذه القضايا الخمس عشرة، في دراسة الحركات الظاهرة للكواكب السبع المتحيِّرة. والأمر يتعلّق بالحركة الظاهرة لكوكب متحيِّر على القبَّة السماوية، في مكان معلوم للراصد؛ وهذه الحركة هي تلك الناتجة عن الحركة اليومية حول مِحور العالم، وذلك عندما يكون للكوكب المدروس شروقٌ وغروب على الأفق في مكان الرصد. ويفرض ابن الهيثم، خلال دراسته هذه، مكانَ الرصد في نصف الكرة الشمالي. ويبيِّن ابن الهيثم، منذ بداية عرضه للقضايا الأولى، بالاستناد إلى النتائج، التي أثبتها بطلميوس، الخاصة بأفلاك الكواكب المتحيِّرة وحركاتها المختلفة، أنَّ مسارَ الحركة الظاهرة المرصودة لكل من هذه الكواكب المتحيِّرة يختلف عن الدائرة الزمانية المارة بنقطة من هذا المسار، أي عن الدائرة الموازية لمعدِّل النهار التي ترسمها النجمة التي ينطبق موضعها الظاهري، في لحظة معلومة، مع موضع هذا الكوكب المتحيِّر[٢٣]. يتفحَّص ابن الهيثم بالتتابع

[٢٣] لقد بدا أنَّ ابن الهيثم، في مؤلّفه "في اختلاف ارتفاعات الكواكب المتحيِّرة" الذي حرَّره قبل المؤلّف الذي ندرسه الآن، كان يعتبر أنَّ مسارَ هذه الحركة الظاهرة مُنطَبِقٌ مع دائرة زمانية.

القمر والشمس والكواكب الخمسة، ويُميَّز في حركات هذه الأخيرة على أفلاكها بين الاتجاه المباشر والاتجاه التراجعي والحالة التي يكون فيها الكوكب واقفاً (مُراوِحاً).

ويستخرج ابن الهيثم، من هذه الدراسة، ويُعرِّف مفهومين جديدين : "الزمان المُحَصَّل" و"الميل الذي يخصُّ الزمان المحصَّل". و"الزمان المُحَصَّل" يخصُّ موضعين معلومين للكوكب في حركته خلال فترة معلومة. وهو يقاس بقوس من الدائرة الزمانية، ويساوي الفرق بين الطالعين المستقيمين للموضعين المرصودين. أمّا الميل الذي يخص الزمان المحصل، فهو مساوٍ للفرق بين ميليهما. ولنلاحظ، بما أنَّ الكرة السماوية هي في دوران منتظم وأنَّ الزمان الحقيقي يمكن بالتالي تمثيله بقوس من دائرة زمانية، أنَّ مفهوم "الزمان المحصل" هندسي بشكل مُطلَق. ويُمثِّل ابن الهيثم على هذا الشكل بالتحديد الزمان الفيزيائي، وهذا ما يسمح له، إضافة إلى ذلك، بالاستعانة بنظرية النِّسَب عندما يُدخِل الزمانَ في الدراسة.

فقد بيَّن ابن الهيثم أنه توجَد في كل الحالات نسبة تفوق نسبة الزمان المحصَّل إلى الميل الخاص به. وبفضل هذه الخاصية التي أثبتها لكل كوكب، من الكواكب المتحيِّرة، مرصود في مكان معيَّن، فإنَّ موضع الكوكب، الذي يكون فيه ارتفاعه فوق أفق المكان على أقصى قدر له، لا يتوافق مع نقطة مرور الكوكب في نصف النهار، وهذا هو عكس ما يجري بالنسبة إلى أيّة نجمة. وإنَّ الارتفاعَ الأقصى، لأيِّ كوكب متحيِّر، يفوق ارتفاعَه عند مروره على نصف النهار؛ وتبعاً لموضع الكوكب المتحيِّر على مساره، فإنّه يصل إلى الموضع الذي يكون فيه ارتفاعه على أقصى قدر له قبل مروره على نصف النهار، أي شرق نصف النهار أو بعد مروره على نصف النهار، أي غرب نصف النهار.

وتنتهي دراسة الحركة الظاهرة (أيْ "التي تُرى" وفقاً لتعبير ابن الهيثم) لكوكب مُتحيِّر فوق الأفق، بتفحُّص الحالة التي يكون فيها عرض مكان الرصد مساوياً لتمام الميل الأعظم للمحور المرصود، أو قريباً جداً من هذا المقدار. يُبيِّن ابن الهيثم أنَّ الكوكب، في مثل هذه الأمكنة، يمكن أن يغيب من جهة الشرق ثم أن يُشرق من جهة الشرق، أو أن يُشرق من جهة الغرب ثم أن يغرب من جهة الغرب.

ويظهر، خلال هذا البحث الذي أنهينا الآن رسم خطوطه الكبرى، تَصَوُّرٌ لعلم الفلك مُجدِّدٌ في عدة مجالات. فابن الهيثم وضع لنفسه مهمَّةَ وصف حركات الكواكب وفقاً لمساراتها على

الكرة السماوية. وهو لم يَسْعَ إلى تعليل الظواهر، أيْ إلى تفسير عدم انتظام حركة مُفترَضة بواسطة ترتيبات مُصطنَعة مثل معدِّل المسير- وهو المفهوم الذي انتقده في "الشكوك على بطلميوس"- كما لم يأخذ بعين الاعتبار أسباب الحركات المرصودة بواسطة آليات مُضمَرَة أو طبائع خَفيَّة. ولكنه أراد أن يُبرهن صحةَ الحركات المرصودة بدقة بواسطة الهندسة. والآلية الوحيدة التي تدخل في وصف حركات الكواكب (ما عدا القمر والشمس) هي فلك التدوير الذي يسمح أن تؤخذ بعين الاعتبار الحركات التراجعية وتغيرات السرعة في جوار البعد الأبعد والبعد الأقرب. وكان ابن الهيثم على علم، بلا ريب، بالتعادل بين استخدام فلك التدوير مع الفلك الحامل واستخدام الفلك الخارج المركز، كما كان على علم بالشروط الدقيقة لهذا التعادل.

وهكذا قام ابن الهيثم بوصف للحركة في فضاء ذي بعدين على الكرة السماوية، وهذا ما زاد من انفصاله عن التقليد البطلمي. فالحركة تظهر، وفقاً لابن الهيثم، مُرَكّبةً من حركات بسيطة على دوائر عظام من الكرة السماوية. والوسائط الحرّة لهذه الحركة هي سرعات هذه الحركات البسيطة التي تعتبر مستقلة عن بعضها البعض. إلا أنَّ ابن الهيثم يُدخِلُ، بالرغم من ذلك، في الحالة التي يكون فيها مسارُ الكوكب ذا ميل متغير بالنسبة إلى فلك البروج، فلكَ تدوير ليأخذ بعين الاعتبار تغيُّر هذا الميل؛ وهكذا يعود بذلك إلى وصف هيئة في فضاء ذي ثلاثة أبعاد. وهذا ما يجعله ضمن التقليد البطلمي، ولكن من دون استخدام مُعدِّل المسير.

فالهدف، الذي سعى إليه ابن الهيثم في وصفه، واضح، وهو الاقتصاد إلى أقصى حدّ ممكن في استخدام آليات بطلميوس. يَعتمد ابن الهيثم، عند دراسة الحركات الظاهرة للكواكب على الكرة السماوية، وذلك بالنسبة إلى الأفق دائماً، على أربع نقاط مرجعية : الشروق والمرور على دائرة نصف النهار والغروب والارتفاع الأقصى. ويُبرهِن أنَّ الكوكبَ يبلغ هذا الارتفاع الأقصى مرةً واحدةً، في إحدى حالتين: إما شرقَ المرور على نصف النهار، وإما غربَ المرور على نصف النهار.

ولم يعد هذا العِلم الجديد للفلك يهتم ببناء هيئة العالم، بل بوصف هندسي للحركة الظاهرة لكل كوكب من الكواكب المتحيِّرة، وهذه الحركة مُركّبة من حركات بسيطة مع إضافة فلك للتدوير للكواكب السفليَّة. يدرس ابن الهيثم بعض الخاصيّات لهذه الحركة الظاهرة : تحديد

موضعها والخصائص السينماتيكية لتغيُّرات سرعتها. ويدرس في القسم الأخير من "هيئة الحركات" الحركة الظاهرة للكوكب على الكرة السماوية خلال يوم ويُثبت أنَّ الكوكب يمرُّ مرة واحدة بوضع يبلغ فيه أقصى ارتفاعه، وأنَّ كل ارتفاع أصغر من الارتفاع الأقصى يتم بلوغه مرتين: مرة قبل بلوغ الارتفاع الأقصى ومرة بعد هذا البلوغ. وتكون النقطتان اللتان يبلغ فيهما الكوكب هذا الارتفاع من جهة واحدة بالنسبة إلى نقطة المرور على نصف النهار، وذلك للارتفاعات التي تفوق الارتفاع الذي يبلغه الكوكب عند مروره على نصف النهار. وتحتلُّ هذه المجموعة من الدراسات إحدى وعشرين قضية.

وتُعْتَبَرُ كلُّ حركة مرصودة، وفقاً لعلم الفلك الجديد هذا، وكما هي الحال في علم الفلك القديم، دائريةً مستوية أو مركّبةً من حركات دائرية مستوية. يتناول ابن الهيثم ثلاث حركات أساسية : الحركة اليومية على موازاة دائرة معدِّل النهار، وحركة الفلك المائل بالنسبة إلى المحور(أيْ الخط الذي يصل بين قطبي فلك البروج)، وحركة العقدتين لفلك الكوكب. وتتركّب الحركة المرصودة، لِكَوْكَبٍ متحيِّر ما، من ثلاث حركات؛ ولكنَّ للكواكب الخمسة حركةً إضافيةً على فلك تدوير. أما في حالة الشمس، فإنَّ الحركتين الأساسيتين الأولَيَيْن وحدهما تدخلان في حركتها. ويستخدم ابن الهيثم، في تحديد هذه الحركات، أنظمة مُختلفة للإحداثيات الكروية؛ وهي نظام الإحداثيتين الاستوائيتين (الزمان المُحَصَّل والميل الذي يخص هذا الأخير، وهما الإحداثيتان الأولَيَان) ونظام الإحداثيتين الأفقيتين (السمت والارتفاع) ونظام الإحداثيتين البرجيتين (الطول والعرض).

ونلاحظ هنا أنَّ استخدام الإحداثيتين الاستوائيتين شكّل تغيُّراً كاملاً، بالنسبة إلى علم الفلك الهلينيستي. وذلك أنَّ حركة الأفلاك، وفقاً لهذا العلم، كانت مُمَوْضَعَة بالنسبة إلى فلك البروج، وكل الإحداثيات كانت برجية (العرض والطول). إنَّ تحليلَ حركةِ كلِّ كوكب من الكواكب المتحيرة استناداً إلى حركته الظاهرة، يُغيِّر إذاً المُعطيات المرجعية، إذ إنَّ الأمر يتعلّق عندئذ بالميل والطالع المستقيم. وهكذا نجد أنفسنا مع كتاب ابن الهيثم هذا ضمن نظام آخر للتحليل.

ويدرس ابن الهيثم بعد ذلك تَغيُّرَ سرعة الميل لكل كوكب متحيِّر، وذلك بقياسها بواسطة السرعة الوسطى على فسحة هي نفسها متغيِّرة. ويتفحَّص تغيُّرَ ارتفاع كلّ كوكب بين شروقه وغروبه. وهو يقوم بهذه الدراسات بشكل دقيق بفضل القضايا الرياضية المُثبتة في القسم

الأول وبفضل الاعتبارات المتعلّقة برياضيات اللامتناهيات في الصغر التي لا يكفُّ عن إدخالها. إنَّ البراهين الهندسية المُستخدَمة تفترض فقط أنَّ حركةَ الكوكب تحدث من الشرق نحو الغرب، وأنَّ هذه الحركة مستوية حول المحور الشمالي الجنوبي.

إنَّ مسألة حركة الأرض، وفقاً لهذا المفهوم للهندسة، ليست مطروحة، لأنَّ الأمر يتعلّق فقط بدراسة حركة الكوكب على الكرة السماوية كما يظهر لراصد على الأرض. ونقول بطريقة أخرى أنّنا هنا بصدد وصف ظاهراتيّ، نوعاً ما، لحركات الكواكب المتحيِّرة؛ ولكن هذا الوصف لا يمكن القيام به إلا بواسطة الهندسة الكروية وهندسة اللامتناهيات في الصغر وعلم المثلثات. فليس من العجب أن يكون ابن الهيثم حريصاً خلال وصفه على أن لا يُدخِل سوى الفرضيات الدُّنيا المتعلّقة بالصفتين المُميِّزتين للحركات: تغيُّر السرعة والتغيُّر اليومي للارتفاع.

لنستعرض الآن بسرعة الفصولَ المختلفة لهذا القسم المكرَّس لعلم الفلك.

١ ـ الحركة الظاهرة للكواكب المتحيِّرة

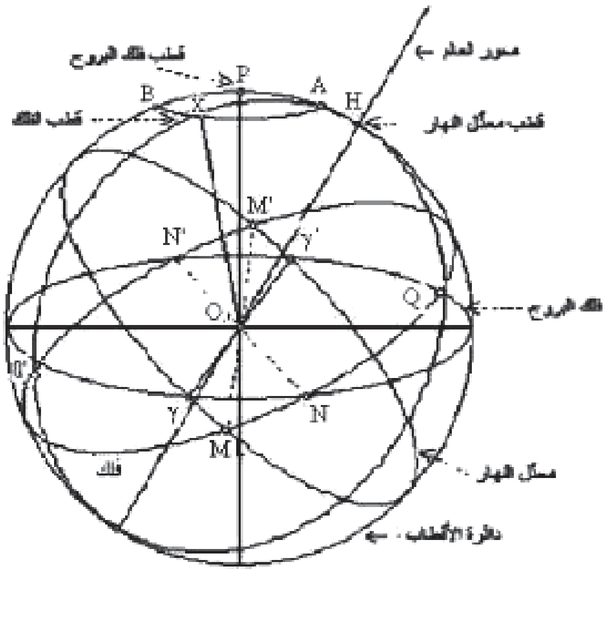
ينطلق ابن الهيثم في القسم الأول من هذا الجزء المكرَّس لعلم الفلك من النتائج التي أثبتها بطلميوس لكل من الكواكب السبعة المتحيِّرة(الحركات الثلاث الأساسية)، ويُدخِل التعريفات للزمان المُحَصَّل ولِميل حركة الكوكب ولميل رأس الجوزهر. وهو يدرس بالتتابع: ١ـ حركة الكوكب المُتَحَيِّر بين شروقه ومروره على دائرة نصف النهار ؛ ٢ـ الحركة خلال زمن معلوم بين موضعين معلومين.

١ـ١ الحركة الظاهرة للقمر بين شروقه ومروره على دائرة نصف النهار

يبدأ ابن الهيثم بالتذكير بالنتائج المُثْبَتة من قِبَل بطلميوس، المتعلقة بالفلك المائل للقمر وبوضع هذا الفلك بالنسبة إلى دائرة فلك البروج، وبالنسبة إلى العقدتين، أي نقطتي التقاطع بين هذين الفلكين. ولقد اعتبر ابن الهيثم، كما سنرى، أنَّ الزاويةَ، المحصورة بين سطحي الفلك المائل وسطح فلك البروج، ثابتة. وهذه الزاوية، في الحقيقة، تتغيَّر قليلاً وتبقى قريبة من خمس درجات. ويكون القمر في هذه الحالة ضمن البروج.

ولقد ذكّر ابن الهيثم بعد ذلك بأنَّ حركة القمر على فلكه تَحْدُث في اتجاه توالي البروج (الاتجاه المباشر)، وأنَّ كل عقدة من العقدتين ترسم دائرة البروج بحركة مستوية في الاتجاه المخالف لتوالي البروج (الاتجاه التراجعي). والقطب الشمالي X لفلك القمر يرسم إذاً على الكرة السماوية دائرة موازية لفلك البروج (في الاتجاه التراجعي). ولكنَّ ميلَ دائرة البروج بالنسبة إلى دائرة الاستواء ثابتٌ، في حين أنَّ ميلَ فلك القمر بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار متغيرٌ، بسبب حركة العقدة. ويكون هذا الميل مساوياً لقوس $\widehat{HX}$ من دائرة عظمى، حيث تكون H القطب الشمالي لدائرة معدِّل النهار.

ولقد درس ابن الهيثم بدقة تغيُّر هذه القوس عندما تدور العقدة N دورة كاملة. وهو، في هذه الدراسة الأولى، لا يأخذ بعين الاعتبار حركة العقدتين، وهي حركة بطيئة جداً. واعتبر أنَّ المستوياتِ الثلاثة، مستويَ دائرة معدِّل النهار ومستوي دائرة البروج ومستوي دائرة القطبين، ثابتة بالنسبة إلى بعضها البعض. وتناول بعد ذلك هذا المنهج مجدداً، في مكان آخر، ليوضِّحَه عند تفحُّصه للميل الأقصى لكل كوكب من الكواكب المتحيِّرة بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار. كل شيء يجري وكأن ابن الهيثم أراد أوّلاً بناء هيئة مبسَّطة قبل أن يُعقِّدها بعد ذلك.



الشكل ٨

وهكذا حدَّد ابن الهيثم الطرفين الشمالي والجنوبي لفلك القمر بالنسبة إلى مستوي دائرة معدِّل النهار . وكلّ واحدة من هاتين النقطتين هي وسط نصف دائرة مفصولة على فلك القمر

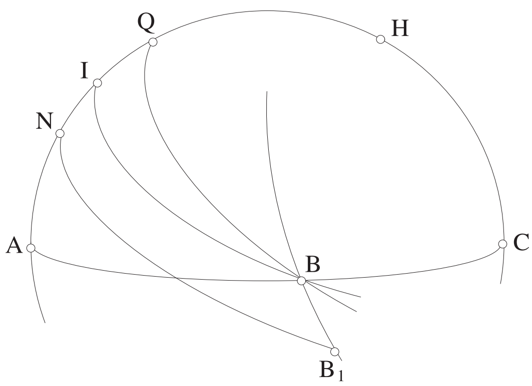
بقطر التقاطع مع مستوي دائرة معدِّل النهار. وهما موجودتان إذاً على الدائرة العظمى HX المارة بقطبي فلك القمر وبقطبي دائرة معدِّل النهار؛ وبذلك يكون ميلهما بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار مساوياً للقوسِ $\widehat{HX}$ فيكون متغيِّراً.

وهكذا درس ابن الهيثم الحركة الظاهرة للقمر بالنسبة إلى الأفق $ABCD$ بين الشروق في B ومروره على دائرة نصف النهار في نقطة هي N ؛ ولقد فعل ذلك أولاً في الحالة التي تكون فيها حركة القمر من الشمال إلى الجنوب ثم في الحالة التي تكون فيها هذه الحركة من الجنوب إلى الشمال. ولقد لاحظ ابن الهيثم أنَّ الأفق لا يَدخُل في الاستدلال الذي قام به، وبالتالي يكون هذا الاستدلال قابلاً للتطبيق على حركة القمر ابتداءً من مرور الكوكب بنقطة B اختيارية شرق دائرة نصف النهار حتّى مروره على دائرة نصف النهار . ولقد أدخل ابن الهيثم، في هذه المناسبة التعاريف الثلاثة التالية:

* "الزمان المُحَصَّل": هو الزمن الذي يستغرقه كوكب ثابت ليصل من نقطة ثابتة B إلى نقطة I على دائرة نصف النهار، وهي القوس $\widehat{IB}$. وهو أيضاً الفرق $\delta\,(B, N)$ بين الطالعين المستقيمين للنقطة البدائية B والنقطة النهائية N للقمر. وهذه القوس $\widehat{IB}$ تُسمّى أيضاً الطالعَ المستقيم للحركة.

* ميل حركة القمر :$\widehat{IN} = \Delta(B,N)$ ، الفرق بين ميليْ النقطة البدائية B والنقطة النهائية N.

* ميل حركة رأس الجوزهر: $\widehat{IQ}$.



الشكل ٩

وتتخَلّل هذه الدراسة للحركة الظاهرة للقمر، بداية من شروقه حتى مروره على دائرة نصف النهار، تفحُّصاً للمواضع النسبية لدائرتين تمرّان بالنقطة B ويكون قطب إحداهما هو قطب دائرة معدِّل النهار وقطب الأخرى هو قطب فلك البروج. ولقد تناول ابن الهيثم أخيراً

حركة القمر بين مروره على نصف النهار وغروبه، مستخدِماً هذه المفاهيم نفسها التي كان قد عرَّفها.

ويُلاحَظ أنَّ ابن الهيثم لا يَستخدِم فلك التدوير في هذه الهيئة الهندسية السينماتيكية، وذلك أنّه يكتب :" لأنَّ فلك تدوير القمر ليس يخرج من سطح الفلك، فمركز القمر ليس يخرج عن سطح الفلك المائل."[٢٤]

١-٢ الحركة الظاهرة للشمس بين شروقها ومرورها على دائرة نصف النهار

تناول ابن الهيثم في هذه الدراسة نفس المراحل التي تناولها في الدراسة السابقة؛ إذ بدأ بالتذكير بالنتائج المعروفة المتعلّقة بفلك الشمس- فلك البروج- وبحركتها الخاصة باتجاه توالي البروج. ثم حدَّد على هذا الفلك نقاط الاعتدال والانقلاب. عالج بعد ذلك مثالَيْن للحركة الظاهرة للشمس، بالنسبة إلى الأفق $ABCD$، بين شروقها من النقطة B ومرورها على نصف النهار. تحدث حركة الشمس على فلكها، في الحالة الأولى، بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار من الشمال نحو الجنوب؛ وفي الحالة الثانية من الجنوب نحو الشمال. حدَّد ابن الهيثم، في كل مثال من المثالين، القوسين اللتين ترمزان إلى الزمن المحصَّل وإلى ميل حركة الشمس.

هذه الدراسة أبسط من تلك التي قام بها لحركة القمر وتطلّبت أخذ حركة العقدة على فلك البروج بعين الاعتبار.

١-٣ الحركة الظاهرة لكل كوكب من الكواكب الخمسة بين شروقه ومروره على دائرة نصف النهار

بدأ ابن الهيثم هنا، كما فعل في الحالات السابقة، بالتذكير بالنتائج المُثبتة من قِبَل بطلميوس. ثمَّ نبَّه إلى أنّه لم يأخذ حركةَ العقدة بعين الاعتبار، في هذه الدراسة، لأنّ هذه الحركة، كما كتب، " حركة بطيئة ليس تظهر للحسّ."[٢٥] ولنذكّر بأنَّ ابن الهيثم قد دافع دائماً عن الفكرة القائلة بالقبول الدائم في الفيزياء باستدلال صحيح مع بعض التقريب، وذلك بخلاف ما يحدث في الرياضيات، حيث يكون الاستدلال صحيحاً بدقّة. ولكنَّ ميلَ مستوي فلك التدوير بالنسبة إلى مستوي الفلك متغيرٌ هنا. وهذا ما يوجِب أخذ هذا التغيُّر بعين الاعتبار،

---

[٢٤] انظر ص. ٣٦٧ ، س ٢٣-٢٥

[٢٥] انظر ص. ٣٦٧، س ٢

عند دراسة حركة كل كوكب من الكواكب الخمسة لبلوغ دائرة نصف النهار. وهذا ما فعله ابن الهيثم بالتحديد عندما تفحَّص حركة الكوكب بين شروقه من نقطة B على الأفق حتى مروره على دائرة نصف النهار. ولقد عالج ابن الهيثم ثلاث حالات: الحالة التي يتحرَّك فيها الكوكب بالاتجاه المباشر، والحالة التي يتحرَّك فيها بالاتجاه التراجعي، وأخيراً الحالة التي يكون فيها واقفاً. وأنهى ابن الهيثم هذه الدراسة بخلاصة حول مجموعة الكواكب المتحيِّرة تخصُّ "الزمان المحصَّل" وَ "ميل الحركة".

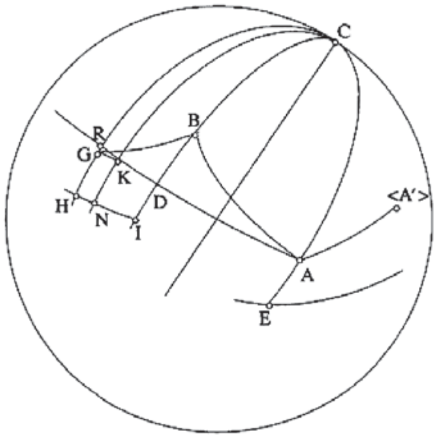
إنَّ الموضعين اللذين تناولهما ابن الهيثم، في القسم السابق، لكل كوكب من الكواكب السبعة ، هما الشروق من النقطة B والمرور على دائرة نصف النهار في النقطة N أو في بعض الأحيان الحركة من النقطة N حتى الغروب. درس ابن الهيثم في هذا القسم الحركة الظاهرة لكل كوكب من الكواكب السبعة خلال زمن معلوم بين نقطتين A وَ B من الكرة السماوية لهما موضعان معلومان. وبرهن حينئذ أنّ "الزمان المُحصَّل" و"ميل الحركة" معلومان.

بدأ ابن الهيثم بدراسة سريعة لحالة الشمس، لأنّه لم يأخذ بعين الاعتبار في هيئته لحركة العقدتين. فإذا كان A وَ B الموضعين الأوَّلي والنهائي، بالترتيب، للشمس في حركتها يكون معنا مباشرة: "الزمان المحصّل" : $\delta(A ,B)$، وهو الفرق بين الطالعين المستقيمين للنقطتين A وَ B ؛ "ميل الحركة" وهو الفرق $\Delta(A ,B)$ بين مَيْلَيْ النقطتين A وَ B ، أي بين ميليْهما بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

ولكن، في دراسة حركة القمر، يجب أخذ حركة فلك البروج وحركة العقدة لفلك القمر بعين الاعتبار (انظر شرح القضية ٢٠). والحركة هنا، كما هي في حالة الشمس، مُعَرَّفة في نظام الإحداثيتيْن الاستوائيتين: "الزمان المحصَّل" وَ " الميل الخاص".

وتتعلّق الإحداثيتان البرجيتان - الطول والعرض- لكلٍّ من الكوكبين السفليَّين(الزهرة وعطارد) بميل فلك التدوير بالنسبة إلى فلك الكوكب. ولكن، إذا كانت الإحداثيتان البرجيتان معلومتين، نستخرج منهما الإحداثيتين الاستوائيتين. ولقد تابع ابن الهيثم دراسته هذه مثلما فعل في حالة القمر.

إنَّ حركة العقدتين للكواكب العلوية بطيئة جداً ولا تقدَّر بالحسّ. فينتج من ذلك أنَّ القوس الموافقة للقوس $\widehat{KG}$ والموازية لفلك البروج في حالة القمر، ليس لها مقدار محسوس، لذلك تلتصق النقطة G بالنقطة K فتكون على الدائرة الزمانية AD.



الشكل ١٠

ولقد لخَّص ابن الهيثم بشكل عام النتائج التي توصَّل إليها حول الكواكب الخمسة كما يلي: إذا كانت حركة الكوكب على فلكه بالاتجاه المباشر، يكون "الزمان المحصَّل" $\delta(A\ ,\ B)$ أقل من الزمان المعلوم، كما حدث ذلك للشمس وللقمر؛ وإذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه التراجعي فإنَّ "الزمان المُحصَّل" يكون، بالعكس، أعظم من الزمان المعلوم.

٢- ميل الكواكب المتحيِّرة بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار

بدأ ابن الهيثم بتناول الشمس ثم القمر قبل الكواكب السبعة، بعد أن ذكّر على عادته بنتائج بطلميوس. ولقد أضاف ابن الهيثم هنا في كل حالة من الحالات تحديداً لإحداثيتي النقطة I بالنسبة إلى فلك البروج، وهي الطرف الجنوبي للفلك بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

والزاوية المحصورة، في حالة الشمس، بين مستوي البروج ودائرة معدِّل النهار ثابتة ($\alpha = 23^{\circ}\ 27'$)؛ وهي مساوية للميل الأقصى لنقاط فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار؛ ويساوي هذا الميلُ الأقصى ميلَ نقطتيْ الانقلاب على هذا الفلك. وهاتان النقطتان هما إذاً بداية برج السرطان في شمال دائرة معدِّل النهار وبداية برج الجدي في جنوبه.

وتكون الزاوية β المحصورة بين مستوي فلك القمر ومستوي دائرة البروج ثابتة، ولكن فلك القمر يدور حول محور فلك البروج، فتكون الزاوية δ المحصورة بين مستوي فلك

القمر ومستوي معدِّل النهار متغيِّرة وفقاً لوضع عقدة رأس الجوزهر. وإذا كان رأس الجوزهر في النقطة γ (نقطة الاعتدال الربيعي) يكون معنا: $\alpha + \beta = \delta$. ولكن، إذا كان ذنب الجوزهر في النقطة γ، تكون عقدة الرأس عندئذ في النقطة γ' (نقطة الاعتدال الخريفي) ويكون معنا $\alpha - \beta = \delta$. وفي هاتين الحالتين يكون مَوضِعا الطرف الشمالي والطرف الجنوبي على الفلك المائل معلومين.

ولقد قام ابن الهيثم، في الحالة التي لا تكون فيها عقدة الرأس مطابقة لنقطة الاعتدال الربيعي، بدراسة مفصَّلة كثيراً للمثلّثات الكروية طَبَّق فيها مبرهنة منالاوس أربع مرات، وبرهن أنه يُمكن حسابُ الميل الأقصى للفلك بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار وإيجادُ الموضِع المنسوب إلى فلك البروج، للطرف الشمالي وللطرف الجنوبي للفلك المائل بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

والبرهان للكواكب العلوية هو نفس البرهان للقمر، لأنَّ ميل فلك كلّ منها بالنسبة إلى مستوي فلك البروج ثابتٌ تقريباً: فهو يساوي $1^{\circ}51'$ للمريخ، و $1^{\circ}19'$ للمشتري، وَ $2^{\circ}30'$ لِزُحَل. أما ميلُ كل من الكوكبين السفليين، فهو بعكس ذلك متغيِّر بالنسبة إلى مستوي فلك البروج؛ ولذلك كرَّس ابن الهيثم دراسة طويلة لهذه المسألة.

لقد بدأ بتفحُّص هذا الميل وفقاً لموضِع الكوكب على فلكه، وهو الموضِع الذي يتوافق مع نقطة على الفلك الخارج المركز، فبيَّن أنَّ هذا الميلَ معلومٌ لكلّ زمن معلوم.

وتابع ابن الهيثم عمله بدراسة الحالة التي تكون فيها العقدتان متطابقتين مع نقطتي الاعتدال، في حين يكون الطرفان الشمالي والجنوبي لفلك الكوكب بالنسبة إلى دائرة مُعدِّل النهار، المنسوبان إلى فلك البروج، متطابقين مع نقطتي الانقلاب. ويُحْسَب الميل بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار ، كما حُسِب في حالة القمر. ثم يتناول ابن الهيثم الحالة التي تكون فيها العقدتان غير متطابقتين مع نقطتي الاعتدال. ويَستنتِج موضِعَي الطرفين الشمالي والجنوبي، المنسوبين إلى دائرة مُعدِّل النهار، من الطرفين الشمالي والجنوبي الخاصين بفلك البروج؛ ثمَّ يُطبِّق نفس الطريقة السابقة.

ولقد تناول ابن الهيثم من جديد – ودائماً في حالة الكوكبين السفليين- وصف حركة تأرجح مستوي الفلك المائل حول خط العقدتين. إنّ حركة خط العقدتين بطيئة جداً، لذلك يُفتَرض أنَّ

هذا الخطَ ثابتٌ. وترسم إذاً كلُّ نقطة I من الفلك قوساً من دائرة تكون العقدتان قطبيْها وتكون حركتُها تأرجحيةً على هذه القوس. ويُرفَق بهذه النقطة I موضعُها L المنسوب إلى فلك البروج؛ وتكون لهذه النقطة L أيضاً حركةٌ تأرجحيةٌ، على قوسٍ من دائرة البروج. أخذ ابن الهيثم، لدراسة حركتيْ النقطتين I وَ L، النقطةَ I بالتتابع على كل قوس من الأقواس الأربع المفصولة على فلك الكوكب بالعقدتين والطرفين الشمالي والجنوبي. ولقد فَرض أنَّ الموضع الأوَّلي للفلك يتوافق مع ميله الأقصى بالنسبة إلى فلك البروج، ورمز بـِ I وَ L إلى الموضعين الأوَّليَّيْن للنقطتين المدروستين. ثم وصف أوَّلاً حركة النقطتين I وَ L. وبرهن بعد ذلك أنَّ قوسَ الدائرة الذي ترسمه I خلال زمن معلوم هو معلومٌ. وبرهن في النهاية أنَّ قوسَ دائرة البروج الذي ترسمه L خلال زمن معلوم يكون معلوماً.

يعرض ابن الهيثم بداية من القضية ٢٤ وحتى آخر كتابه هيئاتٍ عامةً لمجمل الكواكب المتحيِّرة، وهي الهيئات التي تمّ بناؤها باستخدام القضايا الرياضية التي سبق أن بُرهنت. والدراسة التي هي، عن قصد، تحليلية ومتعلّقة بهندسة اللامتناهيات في الصغر، تهتمّ ببعض الخاصيات السينماتيكية للحركة. إنّه من غير الممكن متابعة منهج ابن الهيثم بدون تفحُّص تفصيلي لبرهانه، وهذا ما سنفعله أدناه. وسنكتفي هنا برسم الخطوط العريضة لهذا المنهج.

درس ابن الهيثم في القضايا الثلاث الأولى- ذات الأرقام ٢٤ إلى ٢٦- تغيُّر السرعة الوسطى لحركة كوكب مُتَحيِّر. وهو يُعبِّر عن السرعة الوسطى بواسطة النسبة المقلوبة $\frac{\delta(X,Y)}{\Delta(X,Y)}$، حيث يكون X وَ Y موضعين اختياريين معلومين لكوكب متحيِّر على فلكه؛ وحيث يكون $\delta(X, Y)$ الزمن المحصَّل وَ $\Delta(X, Y)$ الفرق بين ميليْ النقطتين X وَ Y بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار . وبرهن ابن الهيثم أننا إذا أخذنا الأقواس الأربع المحدَّدة على الفلك بالقطر الحادث من تقاطع الفلك ودائرة معدِّل النهار ، وبالطرفين الشمالي والجنوبي بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار ، وإذا أخذنا موضعين X وَ Y على إحدى هذه الأقواس، فإنّه توجد في جميع الأحوال نسبة k بحيث يكون $k > \frac{\delta(X,Y)}{\Delta(X,Y)}$.

ولنلاحظ أنَّ الزمان المعلوم هو فترة زمنية حقيقية، لحركة الكوكب، قابلة للقياس، وأنَّ فكرة ابن الهيثم في مقارنة "الزمان المُحَصَّل"، الذي هو إحداثية استوائية، مع هذا الزمان المعلوم، تظهر كأنّها بداية لوصف سينماتيكي.

ولقد درس ابن الهيثم في المجموعة التالية من القضايا الحركةَ الظاهرة لكوكب فوق أفق مكان معلوم. وهذه الحركة المرصودة تتعلّق بمكان وزمان الرصد. استخدم ابن الهيثم في هذه الدراسة إحداثيتي الكوكب الاستوائيتين، وبالتالي مَوضِعَ الكوكب على مساره، وميلَ الفلك بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار وميل دائرة معدِّل النهار بالنسبة إلى لأفق، أيْ عرض مكان الرصد. ولقد فرض ابن الهيثم في هذه الدراسة كلها أنَّ الكرة السماوية مائلة نحو الجنوب، وهذا ما يجعل مكان الرصد في نقطة من النصف الشمالي من الكرة الأرضية. أما حالة الكرة المنتصبة، أي عندما يكون مكان الرصد على دائرة معدِّل النهار الأرضي، فإنّها تظهر كحالة خاصة. وفرض ابن الهيثم أنَّ مرور الكوكب على نصف النهار يحدث بين سمت الرأس والأفق الجنوبي، وهذا ما يفرض أنَّ عرضَ مكان الرصد أكبرُ من ميل الكوكب خلال الزمن الذي تُدرَس فيه حركة الكوكب. وفرض ابن الهيثم أيضاً أنَّ عرضَ مكان الرصد أقلّ من تمام الميل. ودرس ابن الهيثم بالتفصيل دور العرض، وهذا ما أدّى به إلى تفحُّص الحالات حيث يكون المرور على دائرة نصف النهار في سمت الرأس أو شمال سمت الرأس، كما تفحَّص الحالة التي يكون فيها عرض المكان مساوياً لتمام الميل الأقصى للكوكب.

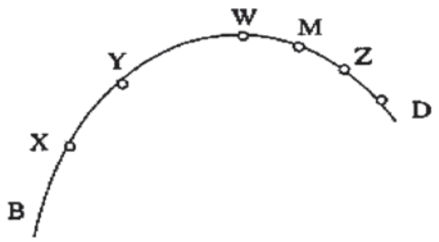
وهكذا درس ابن الهيثم، في القضيتين ٢٨ وَ ٢٩، ارتفاعات كوكب ما فوق الأفق. لنفرض أنَّ الكوكب يُشرق في النقطة B ويمرُّ على دائرة نصف النهار في النقطة D. فالقوس BD الذي يرسمه يوجَد شرقَ مستوي نصف النهار. ليكن h ارتفاعَ الكوكب فوق الأفق. يُبيِّن ابن الهيثم أنّه توجَد:

* نقاطٌ لها ارتفاع h مع $h_D < h$ (h_D هو ارتفاع النقطة D). لتكن M إحدى هذه النقاط.

* على الأقل نقطة X على القوس $\widehat{MB}$ بحيث يكون $h_X = h_D$،

* على الأقل نقطتان لهما نفس الارتفاع h مع $h_D < h < h_M$، إحداهما على القوس $\widehat{XM}$ والأخرى على القوس $\widehat{MD}$

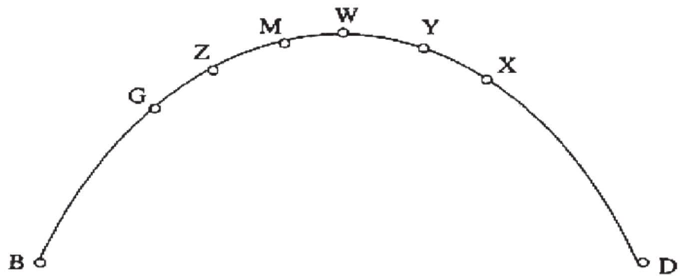
ويُبرهن أيضاً أنَّ الكوكب، بعد مروره على D، يتابع حركته نحو الأفق الغربي، وأنَّ ارتفاعه h يتناقص من h_D إلى 0. وهكذا فإنَّ الكوكب يبلغ، مرة واحدة على الأقل، كلَّ ارتفاع h مع $h_D > h$.



الشكل ١١

ويُبيِّن ابن الهيثم أيضاَ أنّه إذا كان h_m هو الارتفاع الأقصى، فإنَّ الكوكب يبلغه مرة واحدة فقط، وليكن ذلك في النقطة W ، كما أنّه يبلغ الارتفاع h_D مرة واحدة فقط في نقطة $D \neq X$ بحيث يكون $X \in \widehat{BW}$.

درس ابن الهيثم، في القضية ٢٩، تحرُّك الكوكب من الطرف الجنوبي نحو الطرف الشمالي من مساره. يمرُّ الكوكب على دائرة معدِّل النهار في النقطة G ويغرب في النقطة D. والقوس $\widehat{GD}$ المرسومة خلال هذه الحركة هي على غرب دائرة نصف النهار.



الشكل ١٢

يُبيِّن ابن الهيثم أنه توجَد على القوس $\widehat{GD}$:

* نقاطٌ يكون ارتفاعها h مع $h_G < h$؛ ولتكن M إحدى هذه النقاط؛

* نقطة X، على الأقل، على القوس $\widehat{MD}$ بحيث يكون $h_X = h_G$؛

* نقطتان لهما نفس الارتفاع h، مع $h_G < h < h_M$، إحداهما على القوس $\widehat{XM}$ والأخرى على القوس $\widehat{MG}$.

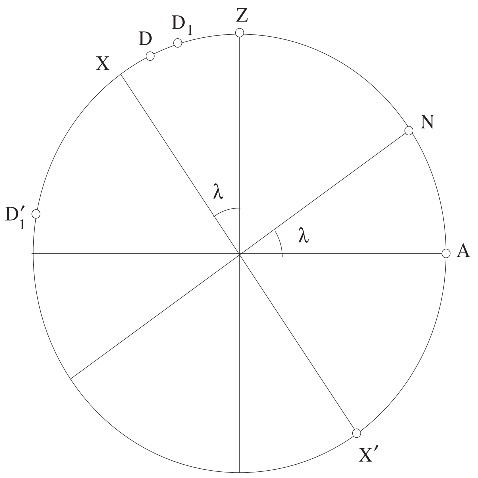
ويُبيِّن أيضاً أنَّ الارتفاع، بين شروق الكوكب في الشرق على النقطة Bومروره على دائرة نصف النهار في G، يتزايد من 0 إلى h_G، وأنَّ كل ارتفاع h مع $h_G > h$ يتمُّ بلوغه مرة واحدة على الأقل.

يتناول ابن الهيثم من جديد هذه الدراسة في مكان لاحق ليحدِّد الارتفاعات التي يصل إليها الكوكب غرب دائرة نصف النهار. فيبرهن أنّ الكوكبَ، إذا كان h_m ارتفاعَه الأقصى، يبلغ هذا الارتفاعَ مرة واحدة فقط، وليكن ذلك في النقطة W، وأنّ الكوكب يبلغ الارتفاعَ h_G، الذي هو ارتفاع الكوكب عند مروره على دائرة نصف النهار، مرة واحدة فقط في نقطة هي غير النقطة G؛ ولتكن هذه النقطة X على القوس $\widehat{WD}$. كما يُبرهن أنَّ الكوكب يبلغ كلَّ ارتفاع مرة واحدة فقط في نقطة بين X وَ D، وأنَّ الكوكب يصل إلى كل ارتفاع h يُحقّق $h_G < h < h_M$ ، في نقطتين فقط إحداهما على القوس $\widehat{GW}$ والأخرى على القوس $\widehat{WX}$.

يُبرهن ابن الهيثم، في القضية ٣٠، وحدانية النقطة التي يصل فيها الكوكب إلى ارتفاعه الأقصى قبل أن يتناول من جديد، في القضية ٣١، دراسة الارتفاعات الشرقية. ويُجدِّد ابن الهيثم مرة أخرى في هندسة اللامتناهيات في الصغر، خلال عرضه لهاتين القضيتين. وذلك أنّه يستنبط بالفعل طريقة مُبتكَرة للدراسة في الهندسة الكروية؛ فهو يأخذ مثلّثات كروية لامتناهية في الصغر على الكرة (أضلاع هذه المثلّثات ليست بالضرورة أقواساً من دوائر عظام) وهي بالفعل متتالية من المثلّثات تنتهي أقدارها إلى الصفر. ويعتبر ابن الهيثم أنَّ هذه المثلثات مطابقة لمثلثات مستوية الأضلاع لامتناهية في الصغر. فتكونَ هذه الطريقة في هندسة اللامتناهيات في الصغر، مشابهة لتلك التي استُخدِمت فيما بعد في الهندسة التفاضلية.

ولكي نلخِّص بعض النتائج المتعلّقة بنقطة المرور D على دائرة نصف النهار، وهي النتائج التي يُثبتها ابن الهيثم في مجموعة القضايا ذات الأرقام ٢٨ إلى ٣٦، حيث يدرس ارتفاعات كوكب ما، سنأخذ مستويَ دائرة نصف النهار ذات القطب Z ودائرةَ معدِّل النهار ذات القطب الشمالي N.

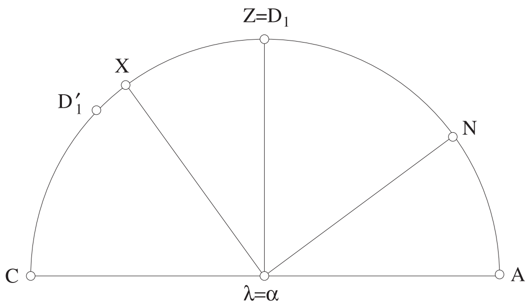
وليكن λ عرضَ المكان، وَ δ ميل الكوكب عند مروره على دائرة نصف النهار، وَ α المقدار الأقصى لهذا الميل. فيكون لدينا: $\widehat{AN} = \widehat{XZ} = \lambda$ ، $\widehat{XD} = \delta$ و $\widehat{XD_1} = \widehat{XD'_1} = \alpha$.



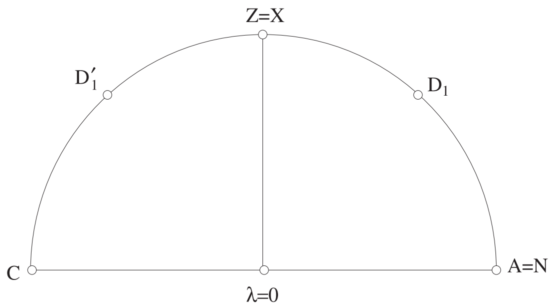
الشكل ١٣ $\alpha < \lambda < \frac{\pi}{2} - \alpha$

ولن نتناول بالدرس سوى الأمكنة ذات العرض الشمالي، وسنأخذ مثال الشمسِ مع $\alpha = 23^\circ\ 27'$. لنلخِّص في لوحة دراسةَ مَوضِع D وفقاً لعرض المكان λ وللزمان. ولنفرض أنَّ $\alpha < \lambda < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

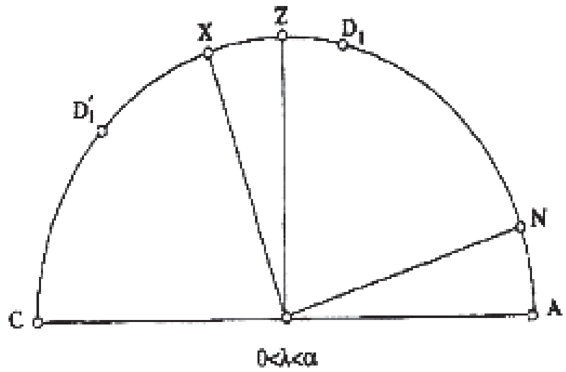
العرض	الزمن	موضع D
$\lambda = 0$ دائرة الاستواء الأرضية	• الاعتدال الربيعي أو الخريفي • الانقلاب الصيفي • الانقلاب الشتوي • الربيع والصيف • الخريف والشتاء	$X = Z = D$ $D = D_1$ شمال Z $D = D'_1$ جنوب Z D بين Z وَ D_1 شمال Z D بين Z وَ D'_1 جنوب Z
$\lambda = \alpha$ مدار السرطان	• يوم الانقلاب الصيفي $\lambda = \delta$ • أي يوم آخر $\lambda > \delta$	$D = D_1 = Z$ D هي على القوس $\widehat{ZD'_1}$ جنوب Z
$0 < \lambda < \alpha$ المنطقة المدارية الشمالية	• يوم الانقلاب الصيفي $\alpha = \delta$، أي أنّ $\lambda < \delta$ يتم بلوغ الميل $\lambda = \delta$ مرة خلال الربيع ومرة خلال الصيف في هذين الزمنين بين هذين الزمنين في أي يوم من السنة	D هي في D_1 شمال Z D هي في Z D هي على القوس $\widehat{ZD_1}$ شمال Z D هي على القوس $\widehat{ZD'_1}$ جنوب Z
$\lambda < \alpha$	في أي يوم من أيام السنة	D هي جنوب Z



الشكل ١٤ـ٢



الشكل ١٤ـ١



الشكل ١٤ـ٣ : $\alpha < \lambda < \frac{\pi}{2} - \alpha$

وإذا كانت الكرة منتصبة، سواء أكان المرور على دائرة نصف النهار في شمال أم في جنوب سمت الرأس Z، يُمكن أن تُطَبَّق الطريقة المستخدَمة في القضية ٢٨ أو في القضية ٢٩، وأن يُبرهَن أنَّ للكوكب ارتفاعات h متساوية ثنائياً (مع $h > h_D$) إمّا على شرق نصف النهار وإما على غربه.

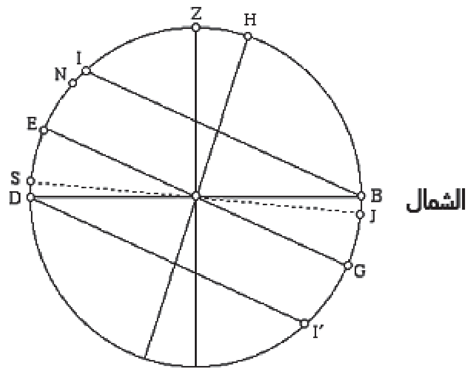
أمّا في الحالة التي تكون فيها النقطة D، نقطة المرور على دائرة نصف النهار، في سمت الرأس Z (انظر أدناه ص. ٢٧٣)، فإنّ الارتفاع الأقصى للكوكب هو h_D، ويتم بلوغ كل ارتفاع h، مع $h_D > h$، مرة واحدة فقط من جهة الشرق ومرة واحدة فقط من جهة الغرب.

لقد فرض ابن الهيثم، في كل ما رأينا حتى الآن، أمكنة في النصف الشمالي من الأرض ذات عرض λ، مع $\lambda < \frac{\pi}{2} - \alpha$، حيث تكون α ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

وهكذا يتناول ابن الهيثم بعد ذلك، لأجل إتمام دراسته، الأمكنةَ الشمالية ذات العرض $\lambda = \frac{\pi}{2}$

$\alpha -$ أو $\frac{\pi}{2} - \alpha \cong \lambda$، ويبرهن أنَّ الكوكب، في تلك الأمكنة وفي بعض الأزمان، يُمكن أن يغيب في الشرق ويُشرق في الشرق، كما أنه يُمكن أن يغيب في الغرب ويُشرق في الغرب.

ليكن $BHID$ مستوي نصف النهار في مكان ما، وَليكن BD قطر دائرة الأفق وَ EG قطر دائرة معدِّل النهار وَ H قطب دائرة معدِّل النهار وَ $\widehat{BH} = \lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha$ وَ $\widehat{HZ} = \alpha$. إذا أخرجنا BI وَ DI' بحيث يكون $EG//BI$ وَ $EG//DI'$، يكون معنا: $\widehat{BG} = \widehat{EI} = \widehat{ED} = \widehat{GI'} = \alpha$؛ فتكون، إذاً، الدائرتان ذواتا القطرين BI وَ DI' مماسَّتين بالترتيب في B وَ D لأفق المكان المعني بالأمر. فتكون، إذاً، مساراتُ الكوكب، وفقاً للحركة اليومية، محصورةًً بين هاتين الدائرتين.



الشكل ١٥

نحن نعلم، وفقاً للمفروضات، أنَّ الكوكبَ يصل إلى النقطة B، وهي النقطة القصوى الشمالية لأفق المكان $ABCD$، في اللحظة التي يوجَد فيها على الطرف الشمالي من مساره، أي في اللحظة التي يبلغ فيها ميلُه مقدارَه الأقصى α. يتناقص الميل، إذاً، بعد ذلك ويبتعد مسار الكوكب عن الدائرة BI ويتقاطع من جديد مع دائرة نصف النهار على النقطة N فوق الأفق.

يُحدِّد ابن الهيثم عندئذ:

* نقطة L تابعة لهذا المسار وموجودة تحت الأفق $ABCD$ شرق النقطة B؛

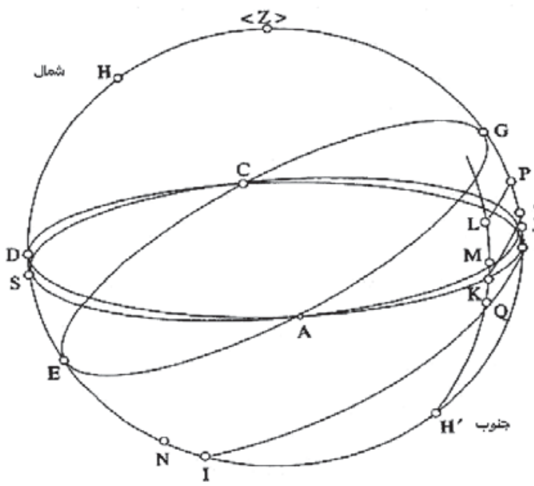
* دائرة الأفق ذات القطر JS وذات العرض $\lambda + \varepsilon$ والتي لها نفس دائرة نصف النهار بحيث تكون النقطة L تحت هذا الأفق.

ولكنّ النقطتين B وَ N هما فوق هذا الأفق JS ، ولذلك فإنَّ الكوكب في حركته من B نحو L يغرب في نقطة على شرق هذا الأفق، وهو في حركته من L نحو N يُشرق في نقطة هي أيضاً على شرق هذا الأفق.

ويوجَد الكوكب من ناحية أخرى، وفقاً للفرضيات، على الطرف الجنوبي من مساره في النقطة B من الدائرة الزمانية BQI، وهذه النقطة B هي النقطة الجنوبية القصوى من الأفق المذكور ذات العرض $\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha$. يتزايد الميل إذاً بعد المرور على هذه النقطة ويبتعد مسار الكوكب عن الدائرة BQI ويلتقي من جديد بدائرة نصف النهار على النقطة N تحت الأفق. والطريقة المستخدَمة هنا هي نفس الطريقة المستخدَمة في القسم السابق، إذ إنَّ ابن الهيثم يُحدِّد:

* النقطةَ L التابعة لهذا المسار والموجودة فوق الأفق $ABCD$ غرب النقطة B.

* الأفقَ $AJCS$ ذا العرض $(\lambda-\varepsilon)$ الذي له نفس دائرة نصف النهار والذي تكون النقطة L فوقه.



الشكل ١٦

ويُشرق الكوكب خلال تحرُّكه من B نحو L في نقطة على غرب هذا الأفق، وخلال حركته من L نحو N يغرب في نقطة على غرب هذا الأفق.

وهكذا بيّن ابن الهيثم أنّه، في اليوم الذي يبلغ فيه ميل الكوكب مقداره الأقصى α شمالاً، توجَد آفاق ذات عرض شمالي $\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon$ بحيث يكون شروق وغروب الكوكب من جهة الشرق؛ كما أنّه، في اليوم الذي يبلغ فيه ميل الكوكب مقداره الأقصى α جنوباً، توجد أماكن ذات عرض شمالي $\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon$ بحيث يكون شروق وغروب الكوكب من جهة الغرب.

وتكون نقطة الشروق، في كلتا الحالتين، قريبة جداً من نقطة الغروب.

***

وهكذا أنهينا هذا العرض السريع لأهم النتائج التي حصل عليها ابن الهيثم في "هيئة الحركات". لم يكن هدفُنا عرضَ هذه النتائج بتفاصيلها، إذ إننا سنقوم بذلك فيما بعد، بل إدراكَ المشروع الذي رمى إلى تحقيقه ابن الهيثم في هذا الكتاب.

لقد سعى ابن الهيثم على صفحات هذا الكتاب إلى بناء نظرية وصفية ظاهراتية للحركات السماوية كما تظهر لراصد على الأرض. وهذه النظرية، كما نتحقّق بسهولة، لا تتضمَّن أي معنى خاص بفيزياء غائيَّة، مع أنها لا تتعارض مع الفروع الرياضية الأكثر ارتباطاً بالفيزياء، حسب تعبير أرسطو، مثل علم المناظر الذي أصلحه الرياضي ابن الهيثم بنفسه. إنَّ حرص ابن الهيثم الواضح، كما لاحظنا، عندما أسَّس نظريته، هو أن لا يُبقي في كل مرة إلا على أقلّ عدد من الفرضيات.

وهكذا، فإنَّ هذه النظرية لا تستخدِم، لمعالجة الحركة الظاهرة للكواكب، إلا الرصد والمفاهيم القادرة على شرح معطيات هذه الحركة، مثل الفلك الخارج المركز وفلك التدوير في بعض الحالات. ولكنها لا ترى شيئاً آخر يُضاف إلى الرصد وإلى هذه المفاهيم، ولا تهتم بشرح أسباب حدوث هذه الحركات. إنَّ "هيئة الحركات" توجد، وفقاً لذلك، على المفترق بين التقليد الفلكي الموروث وتقليدٍ تواصلَ بعد ابن الهيثم حتّى أنَّ كبلر (*Kepler*) قد انتمى إليه. إنَّ مشروع ابن الهيثم في "هيئة الحركات" هو، باختصار، سينماتيكي محض ؛ وبتعبير أدقّ، إنَّ ابن الهيثم أراد تأسيس سينماتيكا رياضية خالصة.

إنَّ تحقيق مثل هذا المشروع يتطلّب أولاً تطوير بعض فروع الهندسة اللازمة لحلّ المسائل الجديدة المطروحة من قِبَل هذه السينماتيكا: لقد جعل ابن الهيثم الهندسة الكروية تخطو خطوات هائلة، وكذلك فعل بعلم المثلثات المستوية والكروية. ولكي نقيس المسافة المقطوعة منذ أيام القدماء، يكفي أن نقارن بدايةَ "هيئة الحركات" مع الفصول ذات الأرقام ٩ إلى ١٦ من المقالة الأولى من كتاب المجسطي لبطلميوس؛ ولتقدير المسافة التي تفصل بين ابن الهيثم ومعاصريه، يُمكن أن نقارن مثلاً بين "هيئة الحركات" وكتاب "المجسطي" لأبي الوفاء البوزجاني. لقدَ درس ابن الهيثم ، كما رأينا، تغيُّر المقادير اللامتناهية في الصغر التي يتطلّبها البحث الفلكي.

إنَّ هناك عملين رئيسيين ساهما في إعداد هذا المشروع : فصل السينماتيكا السماوية عن أيّ ارتباط بعلم الهيئة، أي عن أيِّ اعتبار ديناميكي بالمعنى القديم للكلمة، وإحالة كل ما هو فيزيائي إلى الرياضيات. إنَّ مراكزَ الحركات نقاطٌ هندسية من دون معنى فيزيائي، والمراكز التي ترتبط بها السرعات هي أيضاً نقاط هندسية من دون معنى فيزيائي، علاوة على أنّه لم يبقَ من الزمن الفيزيائي سوى "الزمان المُحصَّل" الذي هو مقدار هندسي. وباختصار، لا يدخل في هذه السينماتيكا الجديدة ما هو خاص بالأجرام السماوية من الناحية الفيزيائية. إنَّ هذه السينماتيكا الجديدة، بشكل إجمالي، لم تكن بعدُ مطابقة لسينماتيكا كبلر(*Kepler*) ولكنها لم تعد مطابقة لسينماتيكا بطلميوس أو لأيِّة سينماتيكا لسلف من أسلاف ابن الهيثم؛ فهي متميِّزة التكوين في منتصف الطريق بين الاثنتين. إنّها تَتَشارَكُ مع السينماتيكا القديمة بمفهومين مُهمَّيْن: كل حركة سماوية تتركّب من حركات بسيطة دائرية ومستوية، ومركز الرصد متطابق مع مركز العالم. ولكنها تتشارك مع السينماتيكات الحديثة في إبدال المراكز الفيزيائية للحركات والسرعات بمراكز هندسية.

وتبقى هناك مسألة كبرى في أهميتها حول علاقة هذه السينماتيكا مع الديناميكا السماوية بالمعنى المفهوم في ذلك العصر، أي مع علم الهيئة. وهذه المسألة لا تكتسب أهميتها هنا إلا إذا ظهر أنَّ ابن الهيثم قد تصوَّر مشروعاً لكتابة هيئة بعد إنهاء "هيئة الحركات". إنَّ المرء قد يتوقَّع بالفعل في هذه الحالة أن يجد هيئة جديدة، نظراً إلى وجود السينماتيكا الجديدة. ولكن

ليس هناك، بين المؤلّفات التي وصلت إلينا أو بين مخطوطات الأعمال الفلكية التي لا يشكُّ بنسبتها إلى ابن الهيثم، ما يسمح بالتأكيد على وجود مثل هذه الهيئة التي تستند إلى السينماتيكا الجديدة. والهيئة الوحيدة التي حرَّرها ابن الهيثم ولها أصالة مؤكَّدة هي سابقة لكتابه "هيئة الحركات" لأنها ضمن مؤلّفه "في حركة الالتفاف". ولقد قال عندما تكلم على هذا الكتاب، الذي هو مفقود الآن، ضمن مؤلّفه "في حل شكوك حركة الالتفاف":

"وليس يصح أن تكون حركة الالتفاف، التي أشار إليها بطلميوس، التي يكون منها حركات العرض للكواكب الخمسة إلا على الهيئة التي بنيتها والتفصيل الذي فصلته وهي هيئة لا يعرض فيها شيء من المحالات ولا يلزمها شيء من الشناعات، ويتولد منها للكوكب حركة يحدث بها من حركة مركزه خط متخيل كأنّه ملتفٌّ على جسم الكرة الصغرى المحرّكة لجرم الكوكب. ولالتفاف هذا الخط على جسم فلك التدوير، سميت هذه الحركة حركة الالتفاف لا لعلة أخرى."[٢٦]

فليس هناك شك بأنَّ ابن الهيثم قد عرض، في كتابه حول حركة الالتفاف، تشكيلة لحركة العرض لفلك تدوير كل من الكواكب الخمسة؛ وقد استخدم في هذه التشكيلة "الأكر الصغيرة" الطبيعية التي تُحرِّك الأجرام السماوية. وهذا يعني بعبارة أخرى أنّه قد ابتكر هيئة؛ وهذا هو ما تؤكّده عدة مقاطع أخرى في مؤلّفه "في حل شكوك حركة الالتفاف".

ولكن، وفقاً للترتيب المُثبَت الذي حُرِّرت به كتابات ابن الهيثم، نحن نعرف أنَّ الكتابين في حركة الالتفاف قد حُرِّرا قبل كتاب "الشكوك على بطلميوس". كما أنّه استخدم في الكتابين الأوَّلين مفهومَ مُعَدِّل المسير، بينما انتقد هذا المفهوم في الكتاب الأخير، وانتهى بحذفه تماماً من "هيئة الحركات". وبما أنَّ ابن الهيثم قد أكّد في مقدّمة "هيئة الحركات" أنَّ النتائج التي عرضها في هذا الكتاب تـلغي النتائجَ الأخرى التي تختلف عنها والموجودة في كل كتاباته الأخرى، يُمكن أن نستنتج بلا مخاطرة كبرى أنَّ كتاب "هيئة الحركات" قد حُرِّر بعد كتاب "الشكوك على بطلميوس"، وبالتالي بعد الكتابين المكرَّسين لحركة الالتفاف. إنَّ إسهام ابن الهيثم في علم الهيئة إسهام محلّيٌّ إذا صحَّ التعبير، لأنه لا يتعلّق إلا بحركة خاصَّة، وهو سابق لكتابي "الشكوك" وَ "هيئة الحركات". وسنرى أدناه أنَّ كتاب "هيئة الحركات" قد حرِّر كذلك بعد كتابه "اختلاف الارتفاعات للكواكب المتحيرة".

[٢٦] انظر "في حل شكوك حركة الالتفاف"، مخطوطة سان بطرسبرج B1030/1 ، الأوراق ١٥ظ – ١٦و.

إنَّ لدينا حجّة أخرى تؤكّد هذا التتابع التاريخي والمفهوميّ، وهي تتعلّق باللغة المستخدَمة في كتاب "هيئة الحركات". فهذا الكتاب لا يتضمن فقط مفاهيمَ جديدة، مثل "الزمان المحصَّل" وَ"الميل الخاص بهذا الزمان"، بل يتضمَّن أيضاً عبارات، من علم الفلك القديم، تغيَّر معناها. لنأخذ مثال المفهوم المركزي لعلم الفلك التقليدي وهو مفهوم "الفلك". فهذه الكلمة تعني كرة في علم الفلك التقليدي، كما يعلم الجميع. فهي تدلُّ على كلّ جسم من الأجسام الصلبة <الكروية> المختلفة التابعة لكوكب معيَّن. وهذه الأجسام الصلبة، الأفلاك، تتحرَّك بحركات دائرية مستوية تنتج من تركيبها الحركة الظاهرة للكوكب المرئيِّ من الأرض الموجودة في مركز العالم. وذلك أنّ أيّ كوكب لا يتحرَّك من تلقاء نفسه، بل هو مُحَرَّكٌ؛ ولا يمكن أن نتحدَّث عن حركة كوكب على مساره الخاص، بل فقط عن حركته الظاهرة الناتجة عن تركيب حركات أفلاكه المختلفة. وكلمة "فلك"، نفسها، تُستخدَم أيضاً، في نفس الإطار، لتدلَّ على الدوائر المستوية التي ترسمها في السماء[٢٧] هذه الأجسام الصلبة المعنيَّة بالأمر.

ولكن ابن الهيثم يستخدم كلمة "فلك" بهذا المعنى <الأخير> في كل الكتابات المذكورة أعلاه، باستثناء كتاب "في الاختلاف في ارتفاعات الكواكب"، حيث لم يكن بحاجة إليه. ولكنَّ كلمة **فلك**، في كتاب "هيئة الحركات"، لم يعد لها نفس المعنى. فهي تدلُّ في هذا الكتاب على المسار الظاهري في السماء لكوكب معيَّن؛ ويتركّز الاهتمام على تحليل هذه الحركة الظاهرة من دون الاعتماد على أيٍّ من الأجسام الكروية الصلبة التي قد تُحرِّك الكوكب المَعْنِيَّ بالأمر. هذا الاختلاف في المعنى، بالإضافة إلى المفاهيم الجديدة، يدلُّ على أنَّ كتاب "هيئة الحركات" قد حُرِّر بعد الكتب المذكورة أعلاه. وهذا ما يكفي للدلالة على أنَّ كتاب "هيئة الحركات" قد خرج عن الإطار البطلمي. ويمكننا، على وجه التقريب أن نفسِّر كلمة فلك الواردة في هذا الكتاب، بكلمة "المدار" الخاصّ بالكوكب[٢٨] ، لأن "الأكر" لم تعد تدخل في البحث.

ولقد لاحظنا في كتاب "الشكوك" تَحَوُّلاً في الأفكار الفلكية لابن الهيثم. كلُّ شيء يدلُّ إذاً على أنَّ كتاب "هيئة الحركات " هو أهم نتاج لهذا التحوُّل. نحن نجد علمَ فلك جديد، ولكنّه لا

[٢٧] يُعتبَر الكوكب كنقطة منطبقة على مركزه (المترجِم)
[٢٨] ولكننا لا نقوم بذلك لكي نحفظ لغة ذلك العصر، إذ يكفي هنا أن ننبِّه القارئ.

يترك إطار مركزية الأرض حيث تكون كل الحركات دائرية مستوية. فالأمر يتعلّق بانقطاع مع الفلك القديم، ولكن على أرضية من التواصل معه.

ويبقى علينا أن نعرف أَسْبابَ هذا التحوُّل. ولكن الوثائق المتوافرة لدينا لا تُشير إلى شيء بهذا الخصوص. إلا أنّه بالإمكان أن نقوم بالفرضية التالية. إنَّ الرياضي الفلكي ابن الهيثم، الذي كانت تنقصه نظرية التجاذب بين الأجسام، كان أمام خيارين: إما القبول بالمبدأ التقليدي القائل بأنَّ حركة كل كوكب راجعة إلى سبب داخلي له، وهذا ما يتطلّب بناء هيئة للأكر الطبيعية الفيزيائية، وإما القبول بضرورة التخلّي عن هذه الطريق والبدء ببناء سينماتيكا؛ وهذا يتضمَّن الاعتراف بأولوية هذه الأخيرة على أيٍّ بحث ذي طبيعة ديناميكية. ولكن ابن الهيثم كان، في الكثير من كتاباته الفلكية، ميّالاً نحو الخيار الأول. غير أنّه بعد أن بدأ العمل على تَرْييض علم الفلك، وبعد أن اكتشف ليس فقط تناقضات بطلميوس بل أيضاً، وبلا ريب، صعوبة بناء نظرية رياضية متماسكة للأكر الطبيعية استناداً إلى فيزياء من نوع أرسطي، لجأ إلى الخيار الثاني، وهو بناء سينماتيكا هندسية محضة. وربما ساعدته تجربته في علم المناظر على القيام بهذه الخطوة: فابن الهيثم ، بهدف إصلاح علم الفلك، يفصل هنا بوضوح بين السينماتيكا وعلم الهيئة، كما فصل هناك، بهدف إصلاح علم المناظر، بين البحث في انتشار الضوء والبحث في الرؤيا؛ وهذا ما أدَّى في كلتا الحالتين إلى فكرة جديدة عن العلم. وهكذا عرضنا العناصر المهمة لهذا القسم، من كتاب "هيئة الحركات"، المكرَّس لعلم الفلك الرياضي. وسنقوم فيما يلي بشرح مفصَّل لكل ما ورد فيه.

الفصل الثاني

الشرح الرياضي

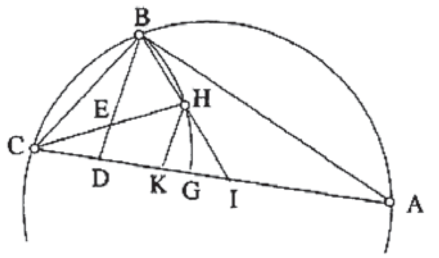
١ـ الهندسة المستوية وحساب المثلثات والمثلثات الكروية

١ـ١ حساب المثلثات

القضية ١ ـ لنأخذ ثلاث نقاط A ، B ، C على دائرة، بحيث يكون:

$\widehat{AB} > \widehat{BC}$ وَ $\widehat{AB} + \widehat{BC} \leq \pi$ ، فنحصل على: $\frac{AB}{BC} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$.

إنَّ لدينا وفقاً للفرضيات: $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} \geq \frac{\pi}{2}$، فإذاً $\widehat{ABC} \leq \frac{\pi}{2}$. لتكن النقطة D بحيث يكون $\widehat{CBD} = \widehat{BAC}$ وَ $\widehat{CBD} < \widehat{CBA}$ ، فتكون D إذاً على $[CA]$. المثلثان CBD وَ CAB متشابهان، فيكون معنا: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ وَ $\frac{\pi}{2} \geq \widehat{CDB}$ وَ $CD < CB$.



الشكل ١

ويكون معنا من ناحية أخرى: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{BCA}}{\widehat{BAC}}$، فيكون: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{BCD}}{\widehat{CBD}}$.

الدائرة (C, CB) تقطع CA في G، فيكون معنا إذاً: $CD < CG < CA$.

لتكن E على BD بحيث يكون $\widehat{ECD} = \widehat{CBD}$ ، فالخط CE يقطع القوس BG في H ،

فيكون معنا إذاً: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{BCD}}{\widehat{CBD}} = \frac{\widehat{BCD}}{\widehat{ECD}} = \frac{\widehat{GB}}{\widehat{GH}}$.

ولنخرج HK بحيث يكون $HK \mathbin{//} BD$، فتكون المثلثات CBD وَ CED وَ CHK متشابهة ويكون $CB = CH$، فيكون معنا: $\frac{HK}{DE} = \frac{CH}{CE} = \frac{BC}{CE} = \frac{CD}{DE} = \frac{BD}{DC}$؛ فنستنتج أنّ: $HK = CD$.

الخط BH يقطع AC في I، ويكون معنا: $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{HK} = \frac{BI}{IH}$

ويكون معنا أيضاً[1] : $\frac{BI}{IH}=\frac{tr.(CBI)}{tr.(CHI)}$ وَ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}=\frac{\overset{\frown}{GB}}{\overset{\frown}{GH}}=\frac{\text{sect.}(CBG)}{\text{sect.}(HCG)}$.

ولكن $sect.(CBH) < tr.(CBH)$ ، وَ: $sect.(CHG) > tr.(CHI)$ ، فإذاً:

$\frac{tr.(CBH)}{tr.(CHI)} > \frac{sect.(CBH)}{sect.(CHG)}$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{tr.(CBI)}{tr.(CHI)} > \frac{sect.(CBG)}{sect.(CHG)}$ ، فيكون معنا

بالتالي: $\frac{BI}{IH} > \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}$ ، فنحصل على $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}} > \frac{AB}{BC}$.

ملاحظة: إذا فرضنا $2\alpha=\overset{\frown}{AB}$ ، $2\alpha_1=\overset{\frown}{BC}$، مع $\alpha > \alpha_1$، $\frac{\pi}{2} > \alpha+\alpha_1$ ، يكون معنا:

$AB = 2R\sin\alpha$ وَ $BC = 2R\sin\alpha_1$، حيث يكون R نصف قطر الدائرة ABC .

$\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \Leftrightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}} > \frac{AB}{BC}$ ، $\alpha > \alpha_1$، $\frac{\pi}{2} > \alpha+\alpha_1 \Leftarrow \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$.

وهذا يعني أنَّ $\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}$، أي أنَّ الدالة $\alpha \longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ تناقصية في الفسحة: $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

لازمة: $\frac{AC}{CB} < \frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\frown}{BC}}$.

نحن نعلم أنَّ: $\frac{AB}{BC} < \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{AC}{BC} < \frac{AB+BC}{BC} < \frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\frown}{BC}}$.

ملاحظة: إذا كان $\alpha > \alpha_1$ وَ $\frac{\pi}{2} > \alpha+\alpha_1$ ، وفقاً للرموز المُعرَّفة في الصفحة السابقة، نحصل على : $\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} < \frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha_1}$، أو $\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\alpha+\alpha_1}$.

والأقواس المأخوذة تنتمي إلى دائرتين متساويتين أو غير متساويتين. ويمكن كتابة الفرضيات المتعلّقة بهذه الأقواس على شكل معادلات أو متباينات بين قياساتها بالزاوية نصف القطرية (راديان)*.

---

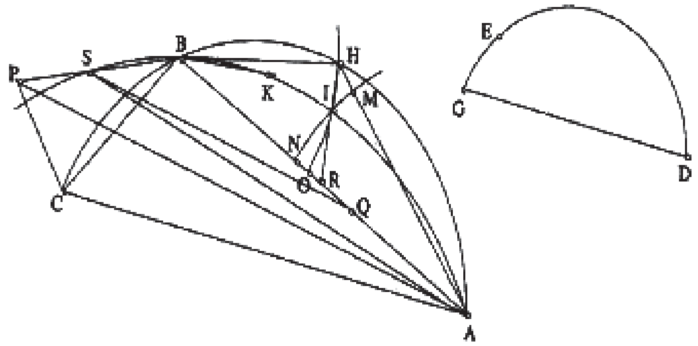
[1] إنَّ .tr تدلُّ على مساحة المثلث المشار إليه بين قوسين، بينما تدلُّ .sect على مساحة قطاع الدائرة المشار إليه بين قوسين. (المترجِم)

* يُمكن أن نتبنَّى عبارة "الزاوية الشعاعية"، إذا اخترنا المصطلح الحديث "شعاع" بدلاً من عبارة "نصف القطر" المستخدَمة في المخطوطات العربية.(المُترجِم)

لنأخذ مثلاً، في القضية الثانية، النص: " القوس $\widehat{ABC}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{DEG}$ ". فنكتب: قياس($\widehat{ABC}$) > قياس($\widehat{DEG}$) أو باختصار $\widehat{ABC} > \widehat{DEG}$ ، مع العلم أن "قياس" هنا يعني قياس الزاوية المركزية الموتِّرة للقوس بالزاوية النصف قطرية.

القضية ٢- إذا كانت القوسان $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{DEG}$ تنتميان إلى نفس الدائرة أو إلى دائرتين مختلفتين بحيث يكون: $\widehat{DEG} < \widehat{ABC} \leq \pi$ ، $\widehat{BC} < \widehat{AB}$ ، وَ $\widehat{EG} < \widehat{DE}$ ؛ وإذا كان $1 < \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ ، فإنَّ $\frac{AB}{BC} < \frac{DE}{EG}$.

لتكن $\widehat{AIB}$ قوساً مشابهة للقوس $\widehat{DE}$ وهي في داخل المقطع المُحدَّد بالقوس $\widehat{AB}$ ووترها.



الشكل ٢

الدائرة (B, BC) تقطع القوس المعلومة $\widehat{AB}$ على النقطة H، وتقطع القوس المشابهة لـِ $\widehat{DE}$ على النقطة I وتقطع الخطَّ AB على النقطة O. يقطع الخطُّ HI الخطَّ AB على النقطة R.

يكون معنا $BH = BI$ وَ $\widehat{BIH} = \widehat{BHI} < \frac{\pi}{2}$ ، فنحصل على $\widehat{BIR} > \frac{\pi}{2}$ وعلى $\widehat{ARI} > \widehat{BIR}$.

والدائرة (A, AI) تقطع AH على M وتقطع AB على N. ويكون معنا:

$$tr.(BHI) < sect.(BHI) \quad \text{وَ} \quad tr.(BIR) > sect.(BIO) \text{ ،}$$

فيكون معنا إذاً: $$\frac{\text{sect.}(BHI)}{\text{sect.}(BIO)} > \frac{\text{tr.}(BHI)}{\text{tr.}(BIR)}$$

فنستنتج أنّ: $$\frac{\widehat{HBA}}{\widehat{IBA}} > \frac{HR}{RI} \qquad (1)$$

ويكون معنا من جهة أخرى :

$$tr.(AHI) > sect.(AMI) \quad \text{وَ} \quad tr.(AIR) < sect.(AIN) \text{ ،}$$

فيكون معنا إذاً: $\frac{\text{tr.}(AHI)}{\text{tr.}(AIR)} > \frac{\text{sect.}(AMI)}{\text{sect.}(AIN)}$

فنستنتج من ذلك أنّ: $\frac{\text{tr.}(AHR)}{\text{tr.}(AIR)} > \frac{\text{sect.}(AMN)}{\text{sect.}(AIN)}$

فنستنتج أنَّ:

$$\frac{HR}{RI} > \frac{\widehat{HAB}}{\widehat{IAB}} \qquad (2)$$

وهكذا نحصل من (1) وَ (2) على :

$$\frac{\widehat{HBA}}{\widehat{IBA}} > \frac{\widehat{HAB}}{\widehat{IAB}}$$

أو على: $\frac{\widehat{HBA}}{\widehat{HAB}} > \frac{\widehat{IBA}}{\widehat{IAB}}$ ،

فنستنتج المتباينة : $\frac{\widehat{HA}}{\widehat{HB}} > \frac{\widehat{AI}}{\widehat{IB}}$.

فنحصل منها على: $\frac{\widehat{AHB}}{\widehat{HB}} > \frac{\widehat{AIB}}{\widehat{IB}}$.

وهكذا توجَد إذاً نقطة K على القوس BI، مع $\widehat{BK} < \widehat{BI}$ ، بحيث يكون:

$\frac{\widehat{AIB}}{\widehat{BK}} = \frac{\widehat{AHB}}{\widehat{HB}}$ (المقدار الرابع المتناسِب).

ونأخذ النقطة S على الدائرة (ABI) بحيث يكون $\widehat{BS} = \widehat{BK}$ ، فيكون معنا:

$$\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{AHB}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{AHB}}{\widehat{HB}} = \frac{\widehat{AIB}}{\widehat{BS}}.$$

ولكن القوس $\widehat{AIB}$ مشابهة للقوس $\widehat{DE}$، فإذاً $\widehat{BS}$ مشابهة لـِ $\widehat{EG}$ وَ $\widehat{SBA}$ مشابهة لـِ $\widehat{DEG}$. فلدينا إذاً: $\frac{AB}{BS} = \frac{DE}{EG}$ ؛ ولكن $BS = BK < BI = BC$ ، فيكون إذاً:

$$\frac{AB}{BC} < \frac{DE}{EG}.$$

لنضع $2R\alpha = \widehat{AB}$ وَ $2R\alpha_1 = \widehat{BC}$ وَ $2r\beta = \widehat{DE}$ وَ $2r\beta_1 = \widehat{EG}$ ، فيكون معنا وفقاً للفرضيات: $\frac{\pi}{2} > \alpha + \alpha_1 > \beta + \beta_1$ وَ $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1}$ ؛ فَتُكتَب النتيجة كما يلي:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} > \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$ ،

أو على الشكل التالي إذا وضعنا $\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha}$:

$$\frac{\sin\lambda\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\lambda\beta}{\sin\beta}$$ ،

مع $\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta$ وَ $1 > \lambda > 0$.

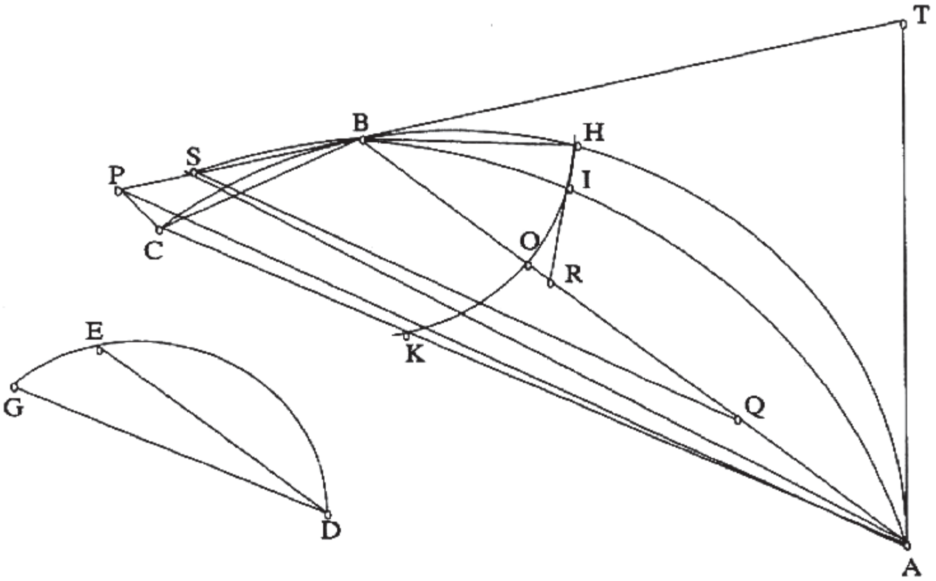
وهذا يَدُلُّ على أنَّ القضية تعني أنَّ الدالـَّة $\alpha \longrightarrow \frac{\sin\lambda\alpha}{\sin\alpha}$ تزايدية في الفسحة $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$.

وذلك أنَّ مشتقـَّة هذه الدالة تُكتب على الشكل التالي:

$$\frac{\lambda\sin\alpha\cos\lambda\alpha - \sin\lambda\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

وتعادل إيجابيةُ هذه المشتقّة تَحَقـُّقَ المتباينة: $\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha > \mathrm{tg}\,\lambda\,\alpha$ ، أي تَزايُديةَ الدالة: $\alpha \longrightarrow \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\alpha}$ ، في نفس الفسحة[٢].

لازمة: إذا وضعنا نفس الفرضيات السابقة يكون معنا: $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}} = \frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{EG}}$ وَ $\frac{DG}{EG} > \frac{AC}{CB}$.



الشكل ٣

[٢] انظر :

R. Rashed, Géométrie et dioptrique au X^e siècle : Ibn Sahl - al-Qūhī et Ibn al-Haytham, Paris, Les Belles Lettres, 1993,

ص. ٢٤٨-٢٤٩ وَ ص. ٢٥٤-٢٥٥. انظر أيضاً التعليق الإضافي [١].

نمدِّد BS حتى P بحيث يكون $BC = BP$. ونُخرج QS بحيث يكون $AP // QS$ وحيث تكون Q على AB ، فيكون معنا : $\widehat{BCP} = \widehat{BPC}$ وَ $\widehat{APC} < \widehat{BPC}$ أيْ أنَّ $\widehat{APC} < \widehat{BCP}$ ؛ ولكنّ $\widehat{BCP} < \widehat{ACP}$ فنستنتج أنَّ $\widehat{APC} < \widehat{ACP}$ ، فيكون معنا بالتالي $AP > AC$ فنستنتج أنَّ $\frac{AC}{BC} > \frac{AP}{BP}$.ولكن، من جهة أخرى، $\widehat{ABS}$ أصغر من نصف دائرة، لذلك فإن الزاوية $\widehat{AQS}$ مُنفرِجة. والزاوية $\widehat{AQS}$ هي خارجة بالنسبة إلى المثلّث QBS، فلذلك يكون $\widehat{AQS} > \widehat{ABS}$ ، وتكون الزاوية $\widehat{AQS}$ إذاً مُنفرِجة. ويكون معنا عندئذ $AS > QS$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{QS}{SB} > \frac{AS}{SB}$.

ولكن $\frac{AP}{BP} = \frac{QS}{SB}$ ، فيكون إذاً: $\frac{AC}{CB} > \frac{AP}{BP} > \frac{AS}{SB}$.

ويكون لدينا من جهة أخرى $\frac{DG}{GE} = \frac{AS}{SB}$، فنحصل على : $\frac{AC}{CB} > \frac{DG}{GE}$.

ملاحظة: إذا استخدمنا رموز الملاحظة السابقة، تُكتب النتيجة على الشكل التالي:

$$\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} > \frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1}$$ ،

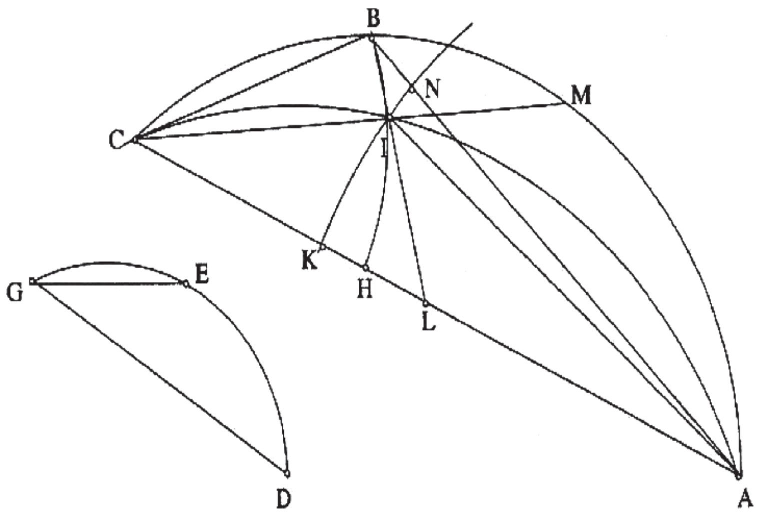
وهذا يعني أنَّ الدالـّة $\alpha \longrightarrow \frac{\sin(1+\lambda)\alpha}{\sin\lambda\alpha}$ تناقصية في الفسحة $0 < \alpha < \frac{\pi}{2(1+\lambda)}$.

وإذا كان $(\lambda+1).\alpha = \alpha'$ وَ $\mu = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ ، فإنَّ هذا يعادل تزايدية الدالة $\alpha' \longrightarrow \frac{\sin\mu\alpha'}{\sin\alpha'}$ في الفسحة $0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$ ، مع $0 < \mu = \frac{\lambda}{1+\lambda} < \frac{1}{2}$.

القضية ٣- إذا كان $\widehat{ABC} \leq \pi$ > $\widehat{DEG}$ وَ $\frac{DG}{GE} = \frac{AC}{CB}$، فإنَّ $\widehat{AB} > \widehat{DE}$ وَ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

إنَّ B نقطة على القوس $\widehat{AC}$ فإذاً $\widehat{BC} < \widehat{AC}$ ، فنستنتج أنَّ $BC < AC$.

القوس $\widehat{AIC}$ المشابهة للقوس $\widehat{DEG}$ هي داخل المقطع المُحدَّد بالقوس $\widehat{AC}$ (كما هي الحال في القضية ٢). الدائرة (C, BC) تقطع AC على النقطة H وتقطع القوسَ $\widehat{AIC}$ على النقطة I. والدائرة (A, AI) تقطع الخطَّ AC على النقطة K والخطَّ AB على النقطة N. والخط CI يقطع القوس $\widehat{ABC}$ على النقطة M والخط BI يقطع AC على النقطة L.



الشكل ٤

ويكون معنا $\frac{AC}{CI}=\frac{AC}{CB}=\frac{DG}{GE}$ ؛

وبما أنَّ $\widehat{AIC}$ مشابهة للقوس $\widehat{ABC}$ فإنَّ القوسين $\widehat{AI}$ وَ $\widehat{IC}$ مشابهتان على التوالي للقوسين $\widehat{DE}$ وَ $\widehat{EG}$. ولكن القوسين $\widehat{AI}$ وَ $\widehat{AM}$ متشابهتان، فلذلك تكون القوس $\widehat{AM}$ مشابهة للقوس $\widehat{DE}$ ويكون $\widehat{AB} > \widehat{DE}$.

إنَّ لدينا $CB = CI$ ، فإذاً $\widehat{BIC}$ أصغر من زاوية قائمة، وَ $\widehat{BIM}$ أعظم من زاوية قائمة، وبالتالي : $\widehat{AIB}$ أعظم من زاوية قائمة وَ $\widehat{ALI}$ أعظم من زاوية قائمة. فيكون معنا إذاً : $BA > AI > AL$.

ولدينا الآن: $tr.(CBI) < sect.(CBI)$ ، $tr.(CIL) > sect.(CIH)$ ، فإذاً:

$$\frac{\text{sect.}(CBI)}{\text{sect.}(CIH)} > \frac{\text{tr.}(CBI)}{\text{tr.}(CIL)}$$ ،

فنستنتج أنّ: $$\frac{\text{sect.}(CBH)}{\text{sect.}(CIH)} > \frac{\text{tr.}(CBL)}{\text{tr.}(CIL)}$$.

وهذا ما يُعطي: $$\frac{\widehat{ACB}}{\widehat{ACI}} > \frac{BL}{IL}$$ (1).

ويكون لدينا كذلك: $tr.(ABI) < sect.(AIN)$ ، $tr.(AIL) > sect.(AIK)$ ،

فنستنتج أنّ : $$\frac{\text{tr.}(ABI)}{\text{tr.}(AIL)} > \frac{\text{sect.}(AIN)}{\text{sect.}(AIK)}$$ ،

فنحصل على: $$\frac{\text{tr.}(BAL)}{\text{tr.}(AIL)} > \frac{\text{sect.}(NAK)}{\text{sect.}(IAK)}$$ ،

ومنها نستنتج أنّ:

$$\frac{BL}{IL} > \frac{\widehat{CAB}}{\widehat{CAI}} \qquad (2).$$

ونستنتج من (1) وَ (2) أنّ $\frac{\widehat{ACB}}{\widehat{ACI}} > \frac{\widehat{CAB}}{\widehat{CAI}}$ ، فيكون معنا: $\frac{\widehat{ACB}}{\widehat{CAB}} > \frac{\widehat{ACI}}{\widehat{CAI}}$ ،

فنحصل بالتالي على: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{AI}}{\widehat{CI}}$.

ولكن $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{AI}}{\widehat{CI}}$، فنحصل على النتيجة: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

إذا كانت القوس $\widehat{ABC}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{DEG}$ ، فإنَّ قياسيْهما يُحقّقان المتباينة: $\widehat{ABC} > \widehat{DEG}$.

ملاحظة: إذا استخدمنا الرموز السابقة فإنَّ فرضية هذه القضية تُكتب على الشكل التالي

$\frac{\pi}{2} > \alpha + \alpha_1 > \beta + \beta_1$ وَ $\frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1}$.

والنتيجة إذاً هي أنّ: $\alpha > \beta$ وَ $\frac{\beta}{\beta_1} > \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

إذا وضعنا:

$z = \sin(\alpha + \alpha_1)$ وَ $x = \sin \alpha_1$ وَ $u = \sin(\beta + \beta_1)$ وَ $y = \sin \beta_1$ ، يكون معنا:

$\frac{z}{x} = \frac{u}{y} = \lambda$ ،

أي: $\lambda x = z$ وَ $\lambda y = u$ ، بينما نريد أن نثبت المتباينة:

$$\text{Arc sin } z - \text{Arc sin } x > \text{Arc sin } u - \text{Arc sin } y$$

والمتباينة: $\frac{\text{Arc sin} z - \text{Arc sin} x}{\text{Arc sin} x} > \frac{\text{Arc sin} u - \text{Arc sin} y}{\text{Arc sin} y}$ ،

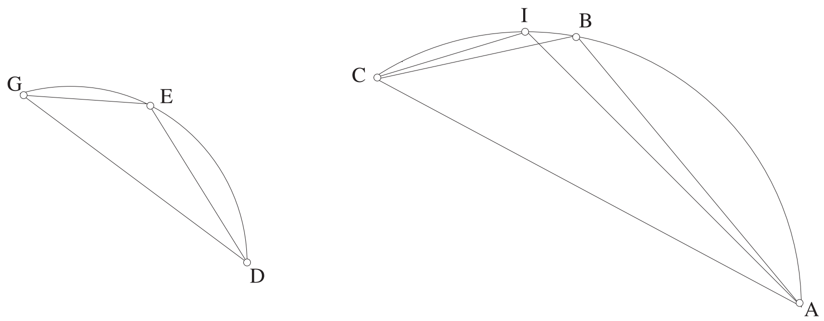
مع الافتراض أنَّ $x > y$ وَ $\lambda x = z$ وَ $\lambda y = u$ وَ $(1 > \lambda)$.

وهذه النتيجة تعني، إذاً، أنَّ الدالتّين:

$x \leftarrow \text{Arcsin } \lambda x - \text{Arcsin } x$ وَ $x \leftarrow \frac{Arc \sin \lambda x}{Arc \sin x}$

تزايديَّتان في الفسحة: $\frac{1}{\lambda} > x > 0$. ومشتقَّة الدالـّة الأولى، $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، موجبة بشكل بديهي لأنَّ $\lambda > 1$. أمّا مشتقّة الدالـّة الثانية فلها نفس إشارة العبارة : $\lambda\sqrt{1-x^2}\cdot \text{Arc}\sin x - \sqrt{1-\lambda^2x^2}\,\text{Arc}\sin\lambda x$. وهذه العبارة تبقى موجبة لأنَّها مساوية للصفر في $x = 0$ ومُشْتَقَّتها $\lambda x\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}\text{Arc}\sin\lambda x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{Arc}\sin x\right)$ تبقى موجِبة. وذلك، إذا وضعنا $\text{Arc}\sin x = \alpha$ وَ $\text{Arc}\sin\lambda x = \gamma$، فإن العبارة الموجودة بين قوسين تساوي: $\frac{1}{\sin\alpha}(\gamma\text{tg}\gamma - \alpha\text{tg}\alpha) = \frac{\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\gamma\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\gamma}$، مع $\gamma > \alpha$؛ والدالة $\alpha \to \alpha.\text{tg}\alpha$ تزايدية بشكل ظاهر.

القضية ٤ - ليكن لدينا قوسان $\overset{\frown}{ABC}$ وَ $\overset{\frown}{DEG}$ بحيث يكون: $\overset{\frown}{DEG} < \overset{\frown}{ABC} < \pi$.



الشكل ٥

<أ>إذا كان $AB > BC$ وَ $DE > EG$ وَ $\frac{DE}{EG} = \frac{AB}{BC}$ ، يكون معنا $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}} < \frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{EG}}$.

نقوم باستدلال الخُلْف الذي يستخدم القضية ٢:

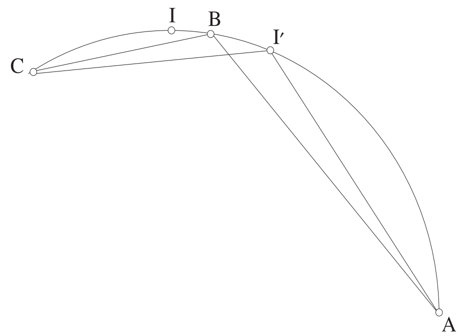
- إذا كان $\frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{EG}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}$، فإنَّ $\frac{AB}{BC} > \frac{DE}{EG}$ وفقاً للقضية الثانية، ولكن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EG}$.
- إذا كان $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}} > \frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{EG}}$. ، فإنَّ $\frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\frown}{BC}} > \frac{\overset{\frown}{DEG}}{\overset{\frown}{EG}}$؛ فتوجَد إذاً نقطة I على القوس BC بحيث

يكون: $\frac{\overset{\frown}{DEG}}{\overset{\frown}{EG}} = \frac{\overset{\frown}{AIC}}{\overset{\frown}{CI}}$، فنستنتج أنّ: $\frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{EG}} = \frac{\overset{\frown}{AI}}{\overset{\frown}{CI}}$ ؛ ويكون معنا إذاً وفقاً للقضية ٢: $\frac{AI}{CI} > \frac{DE}{EG}$.

ولكن $AB < AI$ وَ $CB > CI$، فيكون معنا إذاً $\frac{AI}{CI} > \frac{AB}{CB}$ وبالتالي $\frac{DE}{EG} > \frac{AB}{CB}$؛ وهذا ما يتعارض مع الفرضية. فالنتيجة إذاً هي أنّ: $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$.

<ب> $\frac{DE}{EG} > \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

وتوجد نقطة I' بين A وَ B بحيث يكون: $\frac{AI'}{I'C} = \frac{DE}{EG}$ (لأنَّ النسبة $\frac{AJ}{JC}$ تتزايد من 0 إلى $\frac{AB}{BC}$ عندما ترسم النقطة J القوس $\widehat{AB}$ من A إلى B)؛ ووفقاً للقسم (أ) من القضية ٤ يكون معنا إذا: $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{AI'}}{\widehat{I'C}}$؛



الشكل ٦

ولكنَّ $\frac{\widehat{AI'}}{\widehat{I'C}} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ ، فإذاً: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

ملاحظة: إذا احتفظنا بالرموز المُستخدَمة في القضية ٢، تُكتَب الفرضيات كما يلي:

$\frac{\pi}{2} \geq \alpha + \alpha_1 > \beta + \beta_1$ ، $\alpha > \alpha_1$ ، $\beta > \beta_1$ وَ $\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} \leq \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$.

والنتيجة الحاصلة من <أ> وَ <ب> هي أنَّ $\frac{\beta}{\beta_1} < \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

<ج> $\frac{DG}{EG} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}}$.

* إذا كان $\frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}}$ فإنَّ $\frac{AC}{CB} > \frac{DG}{GE}$، وفقاً لِلازِمة القضية ٢؛ وهذا ما يتعارض مع الفرضيات.

* إذا كان $\frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}}$ ، توجَد في هذه الحالة نقطة I بحيث يكون $\widehat{CI} < \widehat{BC}$

وَ $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}}$ ، ويكون في هذه الحالة $\frac{DG}{EG} < \frac{AC}{CI}$ وفقاً لِلازمة القضية ٢، فنحصل إذاً على: $\frac{DG}{EG} < \frac{AC}{BC}$ ، وهذا ما يتعارض مع الفرضيات.

والنتيجة هي أنّ $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}}$.

<د> $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} \Longleftarrow \frac{AC}{CB} > \frac{DG}{EG}$. وقد يُبَرْهَن هذا القسم بشكل مُشابه لبرهان <ب>.

ويُلَخِّص ابن الهيثم الفقرتين <ج> وَ <د> كما يلي:

إذا كان $\pi > \widehat{ABC} > \widehat{DEG}$ ، فإنَّ: $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} \Longleftarrow \frac{AC}{CB} \geq \frac{DG}{EG}$.

ملاحظة: تُكتَب فرضيات الفقرتين <ج> وَ<د>، مع استخدام نفس المصطلحات كما يلي:

$\beta + \beta_1 < \alpha + \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ، $\beta_1 < \beta$ ، $\alpha_1 < \alpha$ ، وَ $\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \geq \frac{\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1}$.

والنتيجة هي أنَّ $\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha_1} > \frac{\beta+\beta_1}{\beta_1}$ ، أي أنَّ $\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{\beta}{\beta_1}$.

<ه> إذا كانت القوسان $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{DEG}$ متشابهتين، فإنَّ قياسيْهما يُحقّقان:

$\widehat{DEG} = \widehat{ABC}$ مع $\widehat{DEG} = \widehat{ABC} < \pi$ ، ونحصل على $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} \Longleftarrow \frac{AC}{CB} > \frac{DG}{GE}$.

إذا كان معنا: $\frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}}$ تكون القوسان $\widehat{EG}$ وَ $\widehat{BC}$ متناسبتين مع القوسين $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{DEG}$ ، فتكونان إذاً متشابهتين ويكون معنا في هذه الحالة: $\frac{AC}{CB} = \frac{DG}{GE}$ ، وهذا ما يتعارض مع الفرضيات.إذا كان $\frac{AC}{CB} > \frac{DG}{GE}$ ، يكون معنا $CB < CI$ ، إذا كانت I نقطة القوس AC التي تُحقّق: $\frac{\widehat{ABC}}{\widehat{CI}} = \frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}}$ ، أي بحيث تكون القوسان $\widehat{IC}$ وَ $\widehat{EG}$ متناسبتين مع القوسين $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{DEG}$.

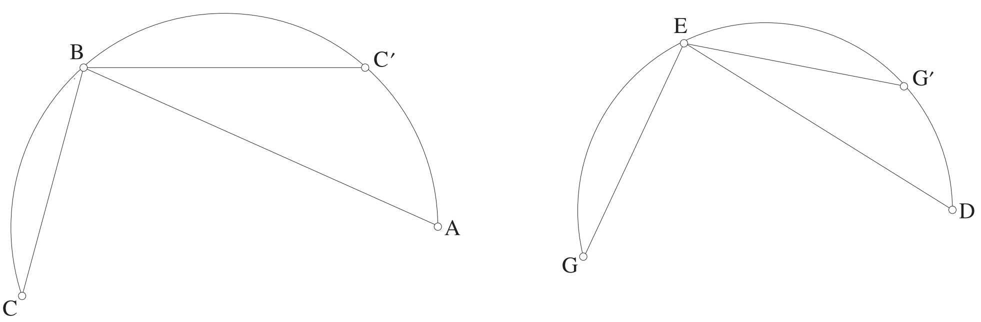
ولكن المتباينة $CI > CB$ تتضمّن $\widehat{IC} > \widehat{CB}$، فيكون معنا بالتالي $\frac{\widehat{ABC}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DEG}}{\widehat{EG}}$.

ملاحظة: إنَّ الحالة <ه> هي حالة خاصّة من الحالة <ج>.

لازمة ٤<أ> وَ <ب>:

$\pi < \widehat{ABC}$ وَ $\pi < \widehat{DEG}$، $\widehat{AB} > \widehat{BC}$، $\widehat{DE} > \widehat{EG}$، $\widehat{DE} \leq \pi$ وَ $\widehat{AB} \leq \pi$،

وَ $\widehat{AB} \leq$ (قوس مشابهة للقوس $\widehat{DE}$).



الشكل ٧

إذا كان $\frac{DE}{EG} > \frac{AB}{BC}$، فإنَّ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

ليكن معنا C' بحيث يكون $\widehat{BC} = \widehat{BC'}$ وَ G' بحيث يكون $\widehat{EG} = \widehat{EG'}$، فيكون معنا إذاً $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC'}$ وَ $\frac{DE}{EG} = \frac{DE}{EG'}$ فنحصل إذاً على $\frac{DE}{EG'} > \frac{AB}{BC'}$.

ويكون معنا إذاً $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG'}} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC'}}$ وفقاً للقضية ٤<ب>، فنستنتج أنَّ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

ملاحظتان: ١) إذا كان $\frac{DE}{DG} = \frac{AB}{BC}$، نبرهن باستخدام ٤<أ> أنّ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$، فيكون لدينا:

$\frac{DE}{DG} \geq \frac{AB}{BC} \Leftarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}$.

٢) الفرضيات هي: $\alpha + \alpha_1$ ، $\frac{\pi}{2} > \beta + \beta_1$، $\frac{\pi}{2} \geq \alpha > \alpha_1$؛ $\frac{\pi}{2} \geq \beta > \beta_1$ ، $\alpha \geq \beta$ وَ

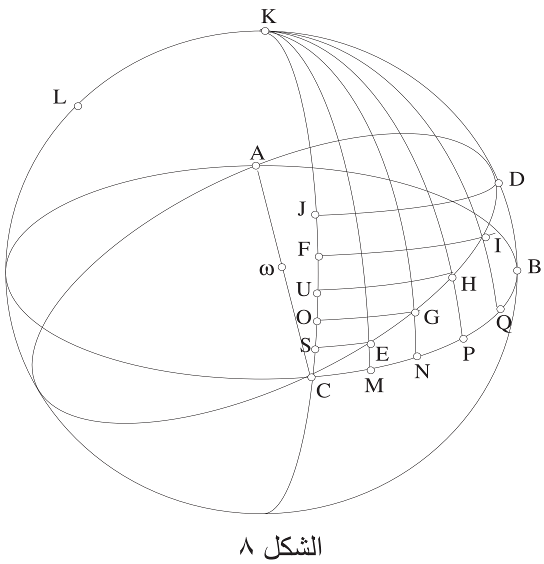
$\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} \geq \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$. والنتيجة هي $\frac{\beta}{\beta_1} > \frac{\alpha}{\alpha_1}$.

إنّ القضايا الأربع الأولى تتعلّق بحساب المثلّثات. وابن الهيثم يقارن فيها بين متباينات لنسب الأقواس وبين المتباينات لِنِسَب الأوتار، الموافقة لها. والخواصّ التي يُبرهنها بهذه الطريقة ترجع إلى دراسة تغيُّرات دالات مثل $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ أو $\frac{\sin\lambda\alpha}{\alpha}$.

١-٢ الهندسة الكروية وحساب المثلثات الكروية

القضية ٥ - الميل : لتكن لدينا على كرة دائرتان عُظمَيان ABC وَ ADC لهما نفس القطر AC. وليكن K وَ L، على التوالي، قطبيهما مع $\widehat{KL}$ أصغر من ربع دائرة، ومع:

$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AD} = \widehat{DC}$ = ربع دائرة.



الشكل ٨

أ) نقسم القوس $\widehat{DC}$ إلى أربعة أقسام متساوية، ولتكن E، G، H، I نقاط القسمة. والدوائر العظام KE، KG، KH، KI وَ KD تقطع الدائرة ABC على النقاط M ، N ، P، Q وَ B .

نُخرِج من نقاط القسمة دوائر موازية للدائرة ABC تقطع الدائرة KC على النقاط S، O، U، F وَ J ؛ فيكون معنا إذاً: $\widehat{CS} = \widehat{ME}$ ، $\widehat{CO} = \widehat{NG}$ ، $\widehat{CU} = \widehat{PH}$ ، $\widehat{CF} = \widehat{QI}$ وَ $\widehat{CJ} = \widehat{BD}$.

ولنلاحظ أنـَّه إذا كانت الدائرة BAC دائرةَ معدّل النهار فإنَّ الأقواس $\widehat{BD}$ ، $\widehat{QI}$ ، $\widehat{PH}$ ، $\widehat{NG}$ وَ $\widehat{ME}$ هي، على التوالي، ميول النقاط D، I ، H، G وَ E .[٣]

وإذا وضعنا: ميل I – ميلD = $\Delta(D, I)$ ، يكون معنا: $\widehat{JF} = \Delta(D, I)$ ؛ وكذلك:

[٣] عندما تكون الدائرةُ ABC دائرةَ معدّل النهار السماوي، فإنّ كـُلاً من القوسين $\widehat{BD}$ وَ $\widehat{QI}$ تـُسمَّى انحرافاً. ولكن، في القسم المكرَّس لعلم الفلك، يُمكن أن تكون الدائرةُ ABC دائرةَ معدّل النهار أو دائرة فلك البروج أو دائرة الأفق. وإنه من الأفضل أن نحتفظ بعبارة الميل.

$\widehat{FU} = \Delta(I, H)$ ، $\widehat{UO} = \Delta(H, G)$ ، $\widehat{OS} = \Delta(G, E)$ وَ $\widehat{SC} = \Delta(E, C)$.

وإذا كان $\widehat{EC} = \widehat{GE} = \widehat{HG} = \widehat{IH} = \widehat{DI}$ ، نبرهن أنّ :

$$\Delta(D, I) < \Delta(I, H) < \Delta(H, G) < \Delta(G, E) < \Delta(E, C)$$

كل الدوائر المَعنيّة بالأمر والتي ليست موازية لمعدّل النهار هي دوائر عظام. والقوسان $\widehat{KM}$ وَ $\widehat{KB}$ متساويتان وعموديتان على القوس $\widehat{CMB}$ ؛ فيكون معنا عندئذ:

(1) $$\frac{\sin \widehat{EC}}{\sin \widehat{CD}} = \frac{\sin \widehat{EM}}{\sin \widehat{BD}}$$ (قاعدة الجيوب)[٤]

فإذاً: $\frac{\sin \widehat{CS}}{\sin \widehat{CJ}} = \frac{\sin \widehat{EC}}{\sin \widehat{CD}}$ ، لأنَّ $\widehat{EM} = \widehat{CS}$ وَ $\widehat{DB} = \widehat{CJ}$. وكذلك معنا:

$\frac{\sin \widehat{CG}}{\sin \widehat{CD}} = \frac{\sin \widehat{CO}}{\sin \widehat{CJ}}$ (قاعدة الجيوب)، فنستنتج أنَّ:

(2) $$\frac{\sin \widehat{CO}}{\sin \widehat{CS}} = \frac{\sin \widehat{CG}}{\sin \widehat{CE}}$$ (قاعدة الجيوب).

ويكون معنا: $\frac{\pi}{2} = \widehat{CD} > \widehat{CE}$ ، فيكون إذاً : $\sin \widehat{CD} > \sin \widehat{CE}$.

نستنتج عندئذ من (1) أنّ $\widehat{CE} > \widehat{EM}$ لأنّ $\widehat{CD} > \widehat{DB}$ ، إذ إنَّ $\widehat{CD}$ هي ربع دائرة، فإذاً $\widehat{CS} > \widehat{CE}$. ويكون معنا أيضاً $\widehat{CO} > \widehat{CG}$.

---

[٤] إنَّ لدينا، في كل مثلث ABC مُشكَّل من أقواس دوائر عظام على كرة ذات نصف قطر مساوٍ للوحدة وذات المركز O:

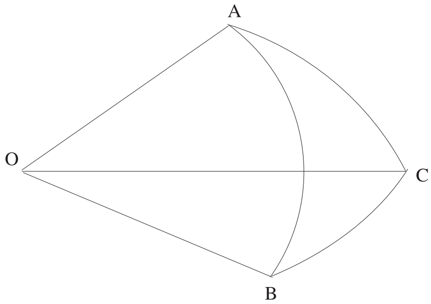
$$\frac{\sin \widehat{BOC}}{\sin A} = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin B} = \frac{\sin \widehat{AOB}}{\sin C} ،$$

أو أيضاً

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin A} = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin B} = \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin C} .$$

فيكون معنا إذاً في المثلثين الكرويين ECM وَ BCD المذكورين في النص:

$\frac{\sin \widehat{EM}}{\sin C} = \frac{\sin \widehat{EC}}{\sin M}$ وَ $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin C} = \frac{\sin \widehat{CD}}{\sin B}$ ؛ ولكن $\sin M = \sin B = 1$ فبذلك نستنتج المعادلة (1).



الشكل ٩

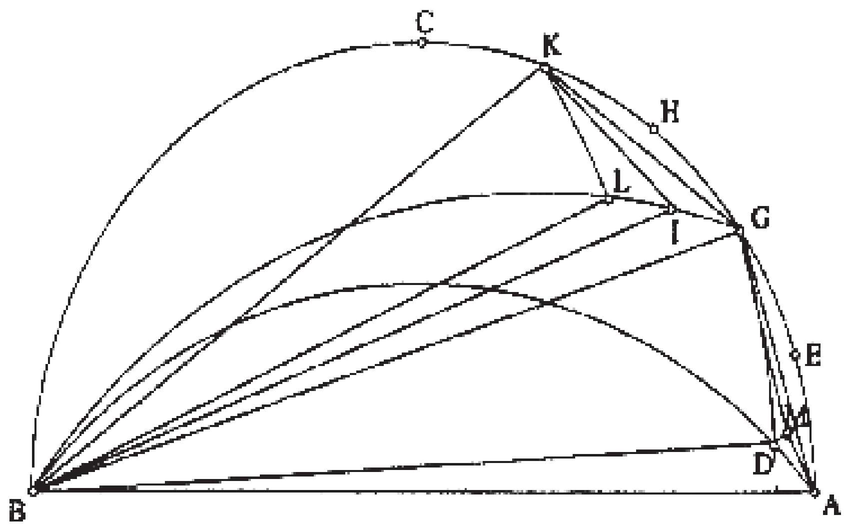
ويكون معنا أيضاً من جهة أخرى: $\overset{\frown}{CG} > \overset{\frown}{CE} > \overset{\frown}{CS}$ (لأنّ $\overset{\frown}{CG} = 2\overset{\frown}{CE}$).

ونستنتج من المعادلة (2) أنّ $\overset{\frown}{CO} > \overset{\frown}{CS}$ ؛ وهكذا فإنَّ القضية ٣، المطبَّقة على المثلثين المشكَّلين من الأقواس المضاعِفة للقوسين $\overset{\frown}{CE}$ وَ $\overset{\frown}{CG}$ وللقوسين $\overset{\frown}{CS}$ وَ $\overset{\frown}{CO}$ ، تعطي:

$\overset{\frown}{CG} - \overset{\frown}{CE} > \overset{\frown}{CO} - \overset{\frown}{CS}$ وَ $\frac{\overset{\frown}{CG} - \overset{\frown}{CE}}{\overset{\frown}{CE}} > \frac{\overset{\frown}{CO} - \overset{\frown}{CS}}{\overset{\frown}{CS}}$ ، فيكون $\frac{\overset{\frown}{GE}}{\overset{\frown}{CE}} > \frac{\overset{\frown}{OS}}{\overset{\frown}{CS}}$.

ولكن $\overset{\frown}{GE} = \overset{\frown}{CE}$ فنحصل على $\overset{\frown}{OS} < \overset{\frown}{CS}$ ، فإذاً: $\Delta(G, E) < \Delta(E, C)$.

ولقد رسم ابن الهيثم، في القسم الثاني شكلاً آخر(هو الشكل ١٠) مُرفَقاً بالشكل الأوّل (الذي هو الشكل ٨)، ولكنه استخدم فيه رموزاً أخرى.



الشكل ١٠

لتكن لدينا نصف دائرة، ABC ، لها نفس قطر الكرة المعلومة، وليكن $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AC}$ ؛ نقسم القوس $\overset{\frown}{AC}$ إلى خمسة أقسام متساوية على النقاط E، G، H وَ K . والنقاط A، E، G، H، K وَ C في هذا الشكل هي الموافقة للنقاط D، I، H، G، E وَ C في الشكل ٨.

نرسم على AB القوس $\overset{\frown}{BDA}$ المشابهة لضعفيْ القوس $\overset{\frown}{CJ}$ الواردة على الشكل الأوَّل؛ ونفترض ضمنياً أنَّ القوس $\overset{\frown}{CJ}$ هي أقل من ربع دائرة. وتقطع الدائرة (B, BG) القوسَ $\overset{\frown}{BDA}$ على النقطة D، ويكون معنا حينئذ $BD = BG$.

يكون معنا: $\widehat{AG} = 2\widehat{AE}$ وَ $\widehat{ACB} = 2\widehat{AC}$، فيكون إذاً $\widehat{BCG} = 2\widehat{CE}$، وبالتالي:

$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BG} = \frac{\sin\widehat{AC}}{\sin\widehat{CE}}$ (الشكل ١٠)؛ وإذا رجعنا إلى أقواس الشكل ٨، تكون هذه النسبة

مساوية لـِ : $\frac{\sin\widehat{CD}}{\sin\widehat{CI}} = \frac{\sin\widehat{DB}}{\sin\widehat{QI}} = \frac{\sin\widehat{CJ}}{\sin\widehat{CF}}$ (قاعدة الجيوب)، وفقاً للمعادلة المشابهة للمعادلة

(1) الخاصّة بالنقطة I ؛ فيكون معنا إذاً : $\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\widehat{CJ}}{\sin\widehat{CF}}$.

ولكن $\widehat{ADB}$ مشابهة لـِ ($2\widehat{CJ}$) كما هو مفروض، فتكون $\widehat{DB}$ إذاً مشابهة لـِ ($2\widehat{CF}$)؛ ويبقى معنا أنَّ القوس $\widehat{AD}$ الواردة على الشكل ١٠ مشابهة لـِ ($2\widehat{JF}$) حيث تكون $\widehat{JF}$ القوس الواردة على الشكل ٨.

نرسم على BG قوساً مساوية للقوس $\widehat{DB}$ ونأخذ على $\widehat{BG}$ النقطة I بحيث يكون $\widehat{AD} = \widehat{GI}$. فيكون معنا إذاً: $\widehat{BCG} - \widehat{AG} = \widehat{BCG} - \widehat{GK} = \widehat{BCK}$ ، فنستنتج أنّ:

$$\widehat{BAG} - \widehat{ABG} = \widehat{BGK}. \qquad (1)$$

وإنّ لدينا من جهة أخرى: $\widehat{BD} = \widehat{BIG}$ وَ $\widehat{AD} = \widehat{GI}$ ،

فنستنتج أنّ: $\widehat{BD} - \widehat{AD} = \widehat{BI}$ ؛

فيكون معنا إذاً:

$$\widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \widehat{IGB}. \qquad (2)$$

ونستنتج من (1) وَ (2) أنَّ: $\widehat{GAD} - \widehat{GBD} = \widehat{KGI}$.

ولتكن M بحيث يكون $AM = AD$ وَ $\widehat{GBD} = \widehat{DAM}$ ، فيكون معنا إذاً:

$\widehat{KGI} = \widehat{GAM}$. والنقطة M هي داخل المثلث AGD، فيكون $\widehat{AGD} > \widehat{AGM}$.

المثلثان GAM وَ GKI متساويان لأنَّ $\widehat{GA} = \widehat{GK}$ ، فإذاً:

$GA = GK$ وَ $\widehat{AD} = \widehat{GI}$ وَ $GI = AD = AM$ ؛ فنستنتج أنَّ : $\widehat{GKI} = \widehat{GAM}$، ويكون إذاً: $\widehat{AGD} > \widehat{GKI}$.

إنَّ لدينا $\widehat{BCA} > \widehat{BCG}$ ، فنستنتج أنَّ: $\widehat{BKG} > \widehat{BGA}$ فيكون معنا إذاً:

$\widehat{BKG} - \widehat{GKI} > \widehat{BGA} - \widehat{AGD}$، فنستنتج أنَّ $\widehat{BKI} > \widehat{BGD}$.

ويكون معنا من جهة أخرى $\widehat{AG} = \widehat{GK}$ وَ $\widehat{AD} = \widehat{GI}$، فنستنتج أنّ:

$\widehat{KBG} = \widehat{ABG}$ وَ $\widehat{GBI} = \widehat{ABD}$ ، وبالتالي يكون: $\widehat{KBI} = \widehat{DBG}$.

إنَّ لدينا في المثلث BKI : $\pi = \widehat{KIB} + \widehat{KBI} + \widehat{BKI}$ ،

وفي المثلث DBG : $\pi = \widehat{BGD} + \widehat{DBG} + \widehat{BDG}$.

ونستنتج من ذلك أنَّ $\widehat{KIB} < \widehat{BDG}$، فيكون: $\widehat{KIB} < \widehat{BGD}$، (المثلث DBG متساوي الساقين)؛ فيكون معنا بالتالي $\widehat{KIB} < \widehat{BKI}$ فيكون $BI > BK$.

تقطع الدائرة (B, BK) إذاً القوس $\widehat{GIB}$ ؛ وليكن ذلك في النقطة L، بحيث يكون:

$\widehat{GI} < \widehat{GL}$ ؛ فيكون معنا إذاً: $\widehat{AD} < \widehat{GL}$.

ونحن نعلم أنَّ $\widehat{BCG} = 2\,\widehat{CE}$ وَ $\widehat{KG} = 2\,\widehat{GE}$ ، فإذاً $\widehat{BCK} = 2\,\widehat{CG}$، فيكون لدينا:

$$\frac{BG}{BL} = \frac{BG}{BK} = \frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{CG}}$$

وإذا رجعنا إلى أقواس الشكل الأول، تُكتَب النسبة السابقة كما يلي:

$$\frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{CU}} = \frac{\sin \widehat{CI}}{\sin \widehat{CH}}$$ (قاعدة الجيوب).

ولكن القوس $\widehat{GLB}$ (المساوية للقوس $\widehat{DB}$) مشابهة للقوس $(2\,\widehat{CF})$؛ والقوس $\widehat{LB}$ هي إذاً مشابهة للقوس $(2\,\widehat{CU})$، والقوس $\widehat{LG}$ مشابهة للقوس $(2\,\widehat{UF})$.

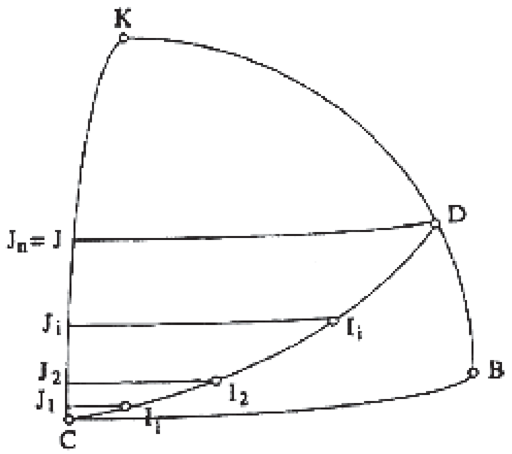
ولكننا قد رأينا أنَّ $\widehat{AD}$ مشابهة لـِ ($\widehat{JF}$ 2) وأن $\widehat{LG} > \widehat{AD}$ ، فيكون إذاً $\widehat{FU} > \widehat{JF}$ أو $\Delta(I, H) > \Delta(D, I)$.

ونبيِّن بنفس الطريقة أنَّ: $\widehat{UO} > \widehat{FU}$ وَ $\widehat{OS} > \widehat{UO}$. فنحصل إذاً على النتيجة المذكورة:

$$\Delta(D, I) < \Delta(I, H) < \Delta(H, G) < \Delta(G, E) < \Delta(E, C).$$

شرح: نُحدِّد موضعَ كل نقطة، P، على الكرة (الشكل ٨) إذا أخرجنا من P دائرة موازية لمعدّل النهار UPH؛ فتكون إحداثيتا P عندئذ: الميلَ $\widehat{CU}$ (وهو قوس من الدائرة العظمى CK) والطالع المستقيم $\widehat{CH}$ (وهو قوس من الدائرة العظمى ADC).

وإذا قسمنا القوس $\widehat{CD}$ إلى عدد n من الأقسام المتساوية على النقاط I_1، I_2، ...، I_i، ...، مع $C = I_0$ و $D = I_n$ ، فإنّ لكل نقطة I_i من القوس $\widehat{CD}$ نقطةً مقابلة J_i من القوس $\widehat{CK}$ بحيث تكون $\widehat{CJ_i}$ ميل النقطة I_i ؛ لنفرض $x_i = \widehat{CI_i}$، $y_i = \widehat{CJ_i}$.

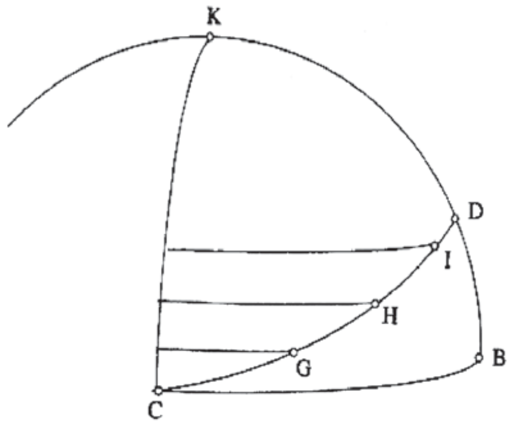


الشكل ١١

إذا كان $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$، تتزايد y من $y_0 = 0$ التي توافق النقطة C إلى $y_n = \widehat{CJ}$ التي توافق النقطة D؛ وَ y هي دالة تزايديّة تماماً بالنسبة إلى المتغيِّر x.

إنّ الفرق $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ، وفقاً للفرضيات، يبقى ثابتاً لكل i من 1 إلى n، ولكن $y_{i+1} - y_i < y_i - y_{i-1} <\ldots< y_2 - y_1 < y_1 - y_0$، لذلك إنّ $y_i - y_{i-1} = (\Delta y)_i$ يتناقص عندما يتزايد x_i .

ب) إنّ البرهان لقوسين متتابعتين مثل $\widehat{CE}$ وَ $\widehat{EG}$ في القسم الأول أو مثل $\widehat{DI}$ وَ $\widehat{IH}$ في القسم الثاني، ثم للقوسين $\widehat{IH}$ وَ $\widehat{HG}$ ، يَستخدِم فقط المعادلة بين الأقواس ثنائيّاً، ولكنه لا يَستخدِم المعلومة التي مفادها أنَّ كل قوس من هذه الأقواس تساوي $\frac{\widehat{CD}}{5}$ أو $\frac{\widehat{CD}}{n}$ بشكل أعّم، ولا تلك التي مفادها أنَّ كلاً من هذه الأقواس لها طرف في C أو D.



الشكل ١٢

يُمكن بالتالي تعميم البرهان السابق لكلّ قوسين متتابعتين متساويتين، سواء إنْ كانتا مشتركتين أم لا مع ربع الدائرة.

لنفرض النقاط G، H، I بحيث يكون $\widehat{HI} = \widehat{GH}$. إذا كان: $x_G < x_H < x_I$ ، يكون معنا: $x_I - x_H = x_H - x_G = \Delta x$ وَ $\Delta(H, I) < \Delta(G, H)$ ، فإذاً:

$$\frac{\Delta(H,I)}{\Delta(G,H)} < \frac{\widehat{HI}}{\widehat{GH}}$$

وإذا استخدمنا رموزاً أخرى: $x = x_H$ ، $x - h = x_G$ وَ $x + h = x_I$ يكون معنا: $y_I - y_H < y_H - y_G$. إذا فرضنا $f(x) = y$ ، يكون معنا إذاً:

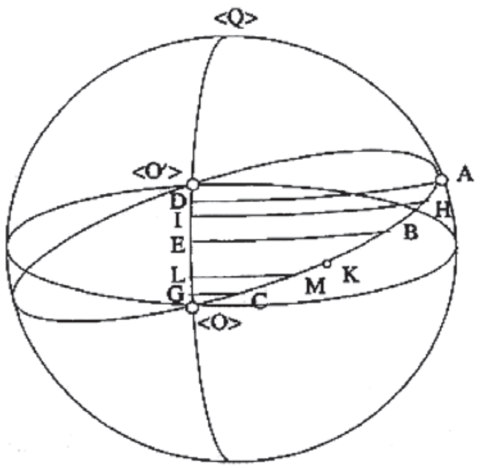
$$\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2} < f(x)$$ ؛

نحن نعلم أنَّ هذه المتباينة، مع اتصال الدالة f في فسحة ما، تتضمَّن تقعُّر هذه الدالة لكل x في هذه الفسحة ولكل $0 < h$. ولقد أثبت ابن الهيثم بالتحديد، كما نرى فيما يلي، بالطريقة التي تُطبِّق استدلالَ الخُلف على القضية العكسية، خاصيَّةَ من هذا النوع.

ولنلاحظ أن القسم الأهمّ من هذه الدراسة يُمكن عرضُه بلغة أخرى مثل لغة تغيُّرات الدالات بواسطة المقارنة بين الفروق المنتهية.

وهذه القضية تُعادل القضية ٥ الواردة في كتاب "الأكر" لثاوذوسيوس، مع برهان أكثر تنميقاً يَستخدِم قاعدة الجيوب.

القضية ٦- ليكن معنا، بشكل أعمّ، قوسان اختياريتان متساويتان أو غيرُ متساويتين، متلاصقتان أو منفصلتان، مشتركتان أو غير مشتركتين.



الشكل ١٣

لتكن O نقطة تقاطع الدوائر العظام المعلومة، ولتكن النقاط A، B وَ C بحيث يكون $\widehat{OA} > \widehat{OB} > \widehat{OC}$، ولتكن D، E ، G نقاط القوس $\widehat{OQ}$ بحيث تكون $\widehat{OD}$، $\widehat{OE}$ وَ $\widehat{OG}$ على التوالي ميول النقاط A، B وَ C .

أ) $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ مشتركتان.

يُمكننا أن نقسم هاتين القوسين إلى أقسام متساوية، عددها p في $\widehat{AB}$ وعددها q في $\widehat{BC}$. يكون معنا إذاً p أقسام غير متساوية في $\widehat{DE}$ وَ q أقسام غير متساوية في $\widehat{EG}$؛ وهذه الأقسام تتزايد في صِغرها كلما ابتعدت عن G (وفقاً للقضية ٥):

$\frac{p}{q}=\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ ؛ ولكن : $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} < \frac{p}{q}$ ، فيكون معنا: $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ أو $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\Delta(A,B)}{\Delta(B,C)}$.

فإذا كان $x_A > x_B > x_C$ ، يكون معنا: $\frac{\Delta(A,B)}{\Delta(B,C)} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$.

ب) $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ غير مشتركتين

استخدم ابن الهيثم استدلال الخُلف لِيُبرهن أنَّ معنا أيضاً: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\Delta(A,B)}{\Delta(B,C)}$.

ولقد بدأ ذلك ببرهان استحالة الفرضية $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$.

لنفرض أنَّ $\widehat{AB}$ مقسومة إلى عدد p من الأجزاء المتساوية: $p\alpha = \widehat{AB}$؛ ولتكن H نقطة على $\widehat{AB}$ بحيث يكون $q\alpha = \widehat{BH}$ $(p > q)$، ولنفرض $\widehat{BC} > \widehat{BH}$.[٥] لتكن I النقطة المرافقة للنقطة H، فيكون الفرقُ بين ميليْ النقطتين H وَ B القوسَ $\widehat{IE}$ ويكون معنا $\widehat{EG} > \widehat{IE}$.

يكون معنا، وفقاً لما سبق $\frac{\widehat{DI}}{\widehat{IE}} < \frac{\widehat{AH}}{\widehat{HB}}$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{IE}} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BH}}$ أو $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{DE}} < \frac{\widehat{BH}}{\widehat{AB}}$.

ولكن، وفقاً للفرضية، $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{\widehat{BH}}{\widehat{BC}} < \frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}}$.

لتكن النقطة K بحيث يكون: $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{HB}}{\widehat{BK}}$ ، فيكون إذاً: $\widehat{BC} > \widehat{BK} > \widehat{BH}$. فيكون معنا إذاً: $\alpha\, q < \widehat{BK} < \widehat{BC}$. وهكذا توجَد حالتان ممكنتان:

١) $\widehat{KC} > \alpha$. يوجَد إذاً عدد m بحيث يكون: $(q+m+1)\alpha > \widehat{BC} > \alpha\,(q+m)$ ؛ وإذا وضعنا $(q+m)\,\alpha = \widehat{BM}$ ، يكون معنا $\alpha > \widehat{MC}$.

٢) $\widehat{KC} < \alpha$. نقسم القوس α إلى أجزاء متساوية متزايدة في صغرها حتّى نحصل على جزء α' مع $\widehat{KC} > \alpha'$ ، فيكون معنا عندئذ نقطة M بين K وَ C بحيث يكون $n\,\alpha' = \widehat{BM}$ وَ $\alpha' > \widehat{MC}$.

---

[٥] يُمكن القيام بهذه القسمة إذا أخذنا $2^k = p$ ، فهي إذاً قابلة للبناء؛ والشرط $\widehat{BC} > \widehat{BH}$ قابل للتحقيق بفضل المقدِّمة التمهيدية ١٠-١ لكتاب الأصول، بشكلها الجديد بعد أن أعاد صياغتها ابن الهيثم(انظر كتاب ابن الهيثم " في قسمة المقدارين المختلفين": ضمن المجلد الثاني، في هذه الموسوعة، ص ٣٠١-٣٠٣.

وهكذا نحصل في الحالتين على نقطة M بحيث تكون القوسان $\widehat{HB}$ وَ $\widehat{BM}$ مشتركتين؛ ونُرفق بالنقطة M النقطةَ L (L هي بين E وَ G) التي تتوافق مع ميلها؛ يكون معنا إذاً:

$\frac{\widehat{HB}}{\widehat{BM}} < \frac{\widehat{IE}}{\widehat{EL}}$.

ولكن كان معنا: $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{HB}}{\widehat{BK}} < \frac{\widehat{BH}}{\widehat{BM}}$، فإذاً: $\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EL}} > \frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}}$، ونستنتج من ذلك أنَّ: $\widehat{EG} > \widehat{EL}$، وهذا غير ممكن.

ملاحظة: إنَّ النص لا يُحدِّد مقدار كل من القوسين $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$.

إذا كان معنا $\widehat{AB} < \widehat{BC}$ وإذا كانت q تحقّق $\alpha q < \widehat{BC} < \alpha (q + 1)$، نضع $\widehat{BH} = \alpha q$ ونحدِّد K كما فعلنا في السابق؛ وتكون K بين B وَ C، فيكون معنا $\alpha > \widehat{KC}$، وهذا ما يتوافق مع الحالة ٢).

بيَّن ابن الهيثم بعد ذلك أنَّ الفرضية:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} \qquad (1)$$

هي أيضاً مستحيلة.

إذا أخذنا H وَ I مثلما فعلنا في الفقرة السابقة، يكون معنا:

$$\frac{\widehat{BH}}{\widehat{BA}} > \frac{\widehat{IE}}{\widehat{ED}}. \qquad (2)$$

ونستنتج من (1) وَ (2) أنَّ: $\frac{\widehat{HB}}{\widehat{BC}} > \frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}}$. فنحدِّد إذاً K بين B وَ C بواسطة المعادلة:

$\frac{\widehat{IE}}{\widehat{EG}} = \frac{\widehat{HB}}{\widehat{BK}}$، ونتمِّم البرهان كما فعلنا في الحالة الأولى.

ملاحظة: كان من الممكن أن نبرهن إذاً أنَّ المتباينة $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}} \leq \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ مستحيلة، من دون أن نميِّز بين الحالتين.

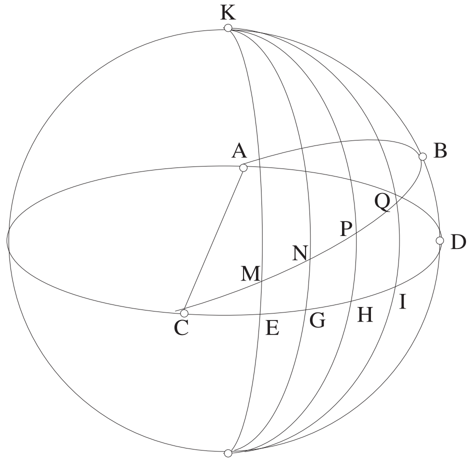
ولقد قام ابن الهيثم، في القضيتين ٥ وَ ٦، بدراسة ميل النقاط الموجودة على ربع دائرة عظمى، وأخذ هذا الميل بالنسبة إلى دائرة عظمى قطبها K.

ودرس في القضية السابعة الطالع المستقيم لنقاط ربع الدائرة العظمى الأولى بالنسبة إلى الدائرة العظمى الثانية التي تلعب دور معدّل النهار.

وهكذا تكون هذه القضية نتيجة مباشرة للقضية ٥ في الحالة التي تكون فيها القوسان $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ مشتركتين. ويستخلص ابن الهيثم النتيجة في الحالة العامة باللجوء إلى استدلال خاصّ بهندسة اللامتناهيات في الصغر تُستخدَم فيه مصادرة أرشميدس وبرهان الخُلْف.

ويُمكِننا تلخيص هذه النتيجة إذا قلنا إنّ الميل دالة مقعَّرة بالنسبة إلى موضعِ النقطة، على الدائرة ACO، المحسوبِ انطلاقاً من النقطة C.

القضية ٧- الطالع المستقيم: تُمَثِّل الدائرةُ العظمى ADC ذات القطر AC والقطب K دائرةَ مُعدِّل النهار. لتكن ABC دائرة عظمى، ذات القطر AC، في مستوٍ يُشكِّل زاوية α مع المستوي ADC. ونفرض أنّ $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{AD}=\widehat{DC}$.



الشكل ١٤

أ) نقسم $\widehat{BC}$ إلى أجزاء متساوية، ولتكن M، N، P وَ Q نقاط القسمة. الدوائر العظام KM، KN، KP وَ KQ تقطع القوس $\widehat{CD}$ على النقاط E، G، H وَ I . الأقواس $\widehat{CE}$ ، $\widehat{CG}$، $\widehat{CH}$ ، $\widehat{CI}$ وَ $\widehat{CD}$ هي الطوالع المستقيمة، على التوالي، للنقاط M، N، P، Q وَ B .

إذا فرضنا مثلاً أنّ $\delta(M, N)$ هو الفرق بين الطالع المستقيم للنقطة N والطالع المستقيم للنقطة M، يكون معنا:

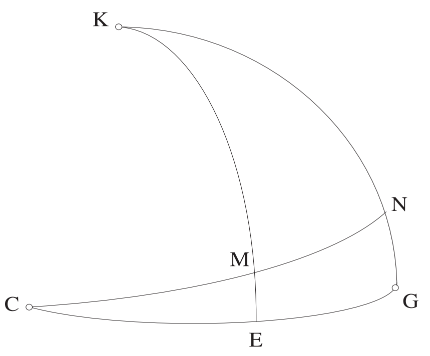
$\widehat{CE} = \delta(C , M)$ ، $\widehat{EG} = \delta(M, N)$ ، $\widehat{GH} = \delta(N , P)$ ، $\widehat{HI} = \delta(P, Q)$ وَ $\widehat{ID} = \delta(Q, B)$.

وإذا كان: $\widehat{CM} = \widehat{MN} = \widehat{NP} = \widehat{PQ} = \widehat{QB}$ ، يكون معنا إذاً:

$. \delta(C, M) < \delta(M, N) < \delta(N, P) < \delta(P, Q) < \delta(Q, B)$

الدوائر المعنية بالأمر هي كلها دوائر عظام والدوائر العظام التي تمرُّ بالنقطة K هي عمودية على الدائرة ADC.

إنَّ لدينا وفقاً لمبرهنة منالاوس: $\frac{\sin \widehat{CM}}{\sin \widehat{MN}} = \frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{EG}} \cdot \frac{\sin \widehat{KG}}{\sin \widehat{KN}}$ ؛



الشكل ١٥

ولكن: $\widehat{CM} = \widehat{MN}$ وَ $\widehat{KG} = \frac{\pi}{2}$ ؛ فيكون معنا $\sin \widehat{CE} < \sin \widehat{EG}$ ، فنستنتج أنَّ:

$\widehat{CE} < \widehat{EG}$ ؛ إنَّ لدينا أيضاً: $\frac{\sin \widehat{CN}}{\sin \widehat{NP}} = \frac{\sin \widehat{CG}}{\sin \widehat{GH}} \cdot \frac{\sin \widehat{KH}}{\sin \widehat{KP}}$

وَ $\frac{\sin \widehat{CN}}{\sin \widehat{MN}} = \frac{\sin \widehat{CG}}{\sin \widehat{EG}} \cdot \frac{\sin \widehat{KE}}{\sin \widehat{KM}}$.

ولكن $\sin \widehat{NP} = \sin \widehat{MN}$، $\sin \widehat{KH} = \sin \widehat{KE} = 1$ وَ $\sin \widehat{KP} < \sin \widehat{KM}$ ،

فيكون معنا: $\sin \widehat{EG} < \sin \widehat{GH}$ ، وبالتالي $\widehat{EG} < \widehat{GH}$.

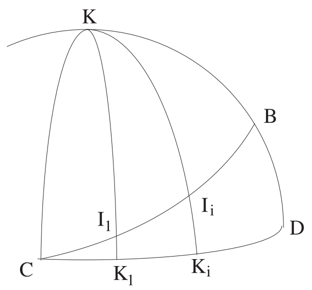
ونبيِّن بنفس الطريقة أنّ $\widehat{HI} < \widehat{GH}$ وَ $\widehat{ID} < \widehat{HI}$ ، وهذا ما يعطي النتيجة.

إنّ دراسة الطالع المستقيم تتمّ بشكل أسرع من دون استخدام أي دليل خاص بهندسة اللامتناهيات في الصغر، لأنـّه قد أمكن تطبيق مبرهنة منالاوس على كل زوج من الدوائر العظام المارّة بالنقطة K.

إنَّ من الواضح أنـَّه يُمكِن إقامة البرهان في الحالة التي يكون فيها عدد n من الأجزاء المتساوية على القوس $\widehat{CB}$. لتكن $C = I_0$ ، I_1،...،I_i،...، $B = I_n$ نقاط القسمة ولتكن K_1، K_i، $D = K_n$ النقاط التي تُحدَّد بها الطوالع المستقيمة.

إذا وضعنا $x_i = \widehat{CI_i}$ وَ $z_i = \widehat{CK_i}$ ، لكل x ∍ $[0, \frac{\pi}{2}]$، فإنّ z تتزايد من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ ويكون

$z_1 - z_0 > z_2 - z_1 > ... > z_i - z_{i\text{-}1} > ... > z_n - z_{n\text{-}1}$ ، فإذاً $z_i - z_{i\text{-}1} = (\delta z)_i$ تتزايد عندما تتزايد x_i.



الشكل ١٦

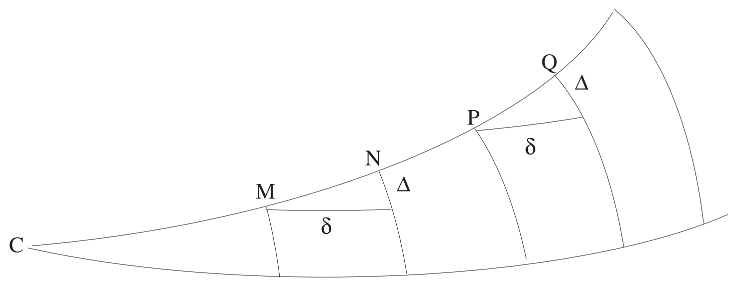
ب) يقول ابن الهيثم بعد ذلك أنّنا، كما فعلنا في حالة الفروق بين الميول، نستخرج من النتيجة المثبتة للفروق بين الطوالع الخاصة بالأقواس المساوية لـِ $\frac{\pi}{2n}$:

- النتيجةَ للأقواس المتساوية المتتابعة وغير المتتابعة، المشتركة وغير المشتركة؛
- وبعد ذلك النتيجةَ للأقواس غير المتساوية. فإذا كانت النقاط M، N، P وَ Q وفقاً لهذا الترتيب على القوس $\widehat{CB}$، نحصل على:

$$\frac{\widehat{MN}}{\widehat{PQ}} > \frac{\delta(M,N)}{\delta(P,Q)}. \qquad (*)$$

وهكذا يكون معنا، إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيتين ٦ وَ ٧:

$$\frac{\Delta(M,N)}{\Delta(P,Q)} > \frac{\widehat{MN}}{\widehat{PQ}} > \frac{\delta(M,N)}{\delta(P,Q)}.$$



الشكل ١٧

هذه القضية تعادل القضية ٦ في كتاب "الكرويات" لثاوذوسيوس. ويُمكن أن نُلخِّص مضمونها إذا قلنا إنّ الطالع المستقيم هو دالـّة محدَّبة بالنسبة إلى موضعِ نقطةٍ على الدائرة ABC محسوبٍ انطلاقاً من النقطة C. لنضع، لأجل ذلك، $x_M = \widehat{CM}$، $x_N = \widehat{CN}$، $x_P = \widehat{CP}$ وَ $x_Q = \widehat{CQ}$، ولنرمز بـِ $g(x)$ إلى الطالع المستقيم للنقطة R بحيث يكون $x = \widehat{CR}$. المتباينة (*) تكتب عندئذ كما يلي:

$$\frac{x_N - x_M}{x_Q - x_P} > \frac{g(x_N) - g(x_M)}{g(x_Q) - g(x_P)}،$$

أي أنَّ:

$$\frac{g(x_Q) - g(x_P)}{x_Q - x_P} > \frac{g(x_N) - g(x_M)}{x_N - x_M}،$$

وهذا يعني أنَّ الدالة g محدَّبة.

١ـ ٣ الهندسة المستوية

القضية ٨[٦]- لتكن لدينا دائرة مركزها D وقطرها AC. ولنأخذ نقطةً E على الخط DC، ولنأخذ على هذه الدائرة الأقواسَ المتساوية $\widehat{AB}$ ، $\widehat{BH}$ وَ $\widehat{HI}$؛ فإذا كانت الأوتار تُحقّق $EC > HI = BH = AB$، فإنّ $\widehat{HEI} > \widehat{BEH} > \widehat{AEB}$.

إنَّ المثلثات ADB، BDH وَ HDI متساوية الساقين ومتساوية فيما بينها. يكون معنا إذاً:

$$\widehat{DIH} = \widehat{DHI} = \widehat{DHB} = \widehat{DBH} = \widehat{DBA} = \widehat{DAB}.$$

ولكنّ $\widehat{DHB} > \widehat{EHB}$، فيكون إذاً: $\widehat{EAB} > \widehat{EHB}$.

---

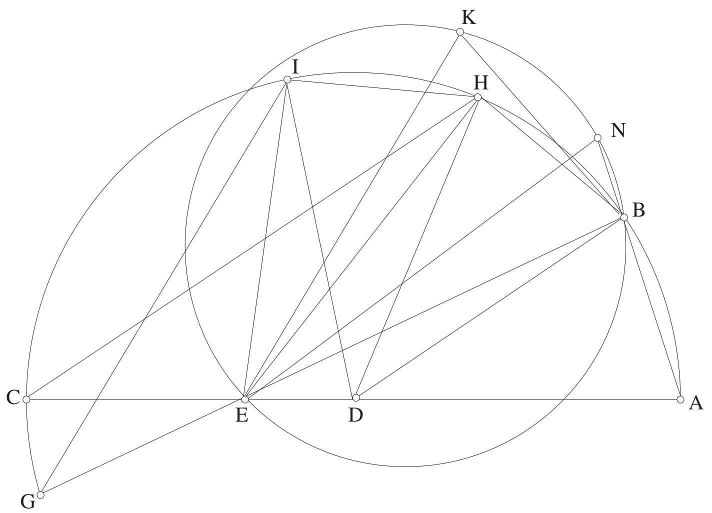
[٦] يجب أن نُقرِّب القضية ٨ من المبرهنتين ١ وَ ٢ في المؤلَّف ٤ لثابت بن قرة؛ وهما المبرهنتان الملخَّصتان في : ريجيس مورلون، علم الفلك العربي الشرقي، ضمن موسوعة تاريخ العلوم العربية (بيروت، ١٩٩٧)، المجلّد الأوَّل، ص. ٦٦-٦٧.

إنّ رباعيَّ الأضلاع $ABHC$ محدّب ومُحاطٌ بالدائرة، فيكون معنا إذاً:

$\widehat{CAB} + \widehat{CHB} = 180^{\circ}$؛ ولكنَّ $\widehat{EHB} > \widehat{CHB}$، فإذاً $\widehat{EHB} + \widehat{EAB} < 180^{\circ}$.

لتكن K بحيث يكون $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ وَ $EB = EK$ ، فيكون معنا إذاً: $\widehat{EAB} = \widehat{EKB}$ ،

فنستنتج أنّ : $\widehat{EHB} + \widehat{EKB} < 180^{\circ}$. ونرسم الدائرة EKB.



الشكل ١٨

إذا سمَّينا α الزاوية المحاطة القابلة للقوس $\widehat{BKE}$، يكون معنا: $\alpha + \widehat{EKB} = 180^{\circ}$؛ ولكنَّ $\widehat{EHB} + \widehat{EKB} = \widehat{EHB} + \widehat{EAB} < 180^{\circ}$، فإذاً $\widehat{EHB} < \alpha$. ويكون معنا من جهة أخرى: $\widehat{EHB} < \widehat{EAB}$، فيكون إذاً: $\widehat{EKB} < \widehat{EHB}$ ؛ فتكون قوسُ الدائرة (EKB)، القابلة لزاوية مساوية لـِ $\widehat{EHB}$، أعظم من القوس $\widehat{EB}$ وأصغر من القوس $\widehat{EKB}$ ، فلتكن هذه القوس $\widehat{EBN}$. ويكون معنا: $\widehat{ENB} = \widehat{EKB} = \widehat{EBK}$ وَ $\widehat{EBK} < \widehat{EBN}$ ،

فنستنتج أنَّ : $\widehat{ENB} < \widehat{EBN}$ وَ $EN < EB$.

إذا رسمنا الدائرة المحيطة بالمثلث EHB، فإنَّ الوتر EB يفصل في هذه الدائرة قطعة مشابهةً للقطعة المفصولة بالوتر EN في الدائرة (EKB)؛ ولكن $EB < EN$، فيكون معنا: الدائرة (EHB) أصغر من الدائرة (EKB).

ونستنتج من المعادلة $\widehat{EKB} = \widehat{EAB}$ ، أنّ الدائرة المحيطة بالمثلث EKB مساوية للدائرة المحيطة بالمثلث EAB (هاتان الدائرتان متناظرتان بالنسبة إلى الخط EB). يكون لدينا إذاً: الدائرة (EHB) أصغر من الدائرة (EAB).

نستنتج من $EA > EC$ أنّ $EC > EI > EH > EB > EA$. إنَّ لدينا، بالفعل،

$\widehat{EBA} < \widehat{DBA} = \widehat{EAB}$ ؛ $\widehat{EHB} < \widehat{DHB} = \widehat{DBH} < \widehat{EBH}$ ، الخ؛

ولدينا من جهة أخرى وفقاً للفرضيات $AB < EC$؛ فيكون معنا إذاً:

$EA > EB > AB$،

فنستنتج أنّ: $\widehat{EBA} > \widehat{EAB} > \widehat{AEB}$ ،

فتكون $\widehat{AEB}$ أصغر من زاوية قائمة. وكذلك تكون $\widehat{BEH}$ أصغر من زاوية قائمة، كما تكون $\widehat{HEI}$ أصغر من زاوية قائمة.

الزاوية $\widehat{AEB}$ في الدائرة (EAB) تُوتّر القوس $\widehat{AB}$ ، والزاوية $\widehat{BEH}$ في الدائرة (EHB) تُوتِّر القوس $\widehat{BH}$ ؛ ويكون معنا:

دائرة(EAB) أكبر من دائرة (EHB) وَ $AB = BH$ (معادلة بين وَتَرَيْن)،

فيكون إذاً: $\widehat{AEB} < \widehat{BEH}$.

يقطع الخطُّ BE من جديد على النقطة G الدائرةَ ذات المركز D. ورباعي الأضلاع $BHIG$ المحاط بهذه الدائرة مُحدَّبٌ، فيكون معنا إذاً:

$\widehat{HBG} + \widehat{HIG} = 180^\circ$ ، ولكنَّ $\widehat{HIG} > \widehat{HIE}$ ، فإذاً: $\widehat{EBH} + \widehat{HIE} < 180^\circ$.

ويكون معنا من جهة أخرى:

$\widehat{EBH} < \widehat{DBH}$ وَ $\widehat{DBH} = \widehat{DIH}$ ، $\widehat{DIH} < \widehat{EIH}$

فيكون إذاً: $\widehat{EBH} < \widehat{EIH}$.

وهكذا يكون معنا للمثلثين BEH وَ HEI نفس الفرضيات التي هي للمثلثين AEB وَ BEH ، فيكون معنا إذاً: $\widehat{HEI} > \widehat{BEH}$ ،

فتكون النتيجة أنّ: $\widehat{HEI} > \widehat{BEH} > \widehat{AEB}$.

ملاحظة: يُمكن الحصول على برهان أسرع من البرهان السابق، إذا استخدمنا حساب المثلثات. إنَّ لدينا: $\widehat{DHB} < \widehat{EHB}$ ، فنستنتج أنّ $\widehat{EAB} < \widehat{EHB}$.

يكون معنا(وفقاً لقانون الجيوب في المستوي) في المثلثين AEB وَ BEH :

$$\frac{AB}{\sin \widehat{AEB}} = \frac{EB}{\sin \widehat{EAB}} \quad \text{وَ} \quad \frac{BH}{\sin \widehat{BEH}} = \frac{EB}{\sin \widehat{EHB}} \text{ ؛}$$

ولكن $AB = BH$ وَ $\sin \widehat{EAB} > \sin \widehat{EHB}$ ، فيكون معنا إذاً: $\sin \widehat{BEH} < \sin \widehat{AEB}$

فنستنتج أنَّ: $\widehat{AEB} > \widehat{BEH}$.

ويكون معنا في المثلثين BEH وَ HEI :

$$\frac{BH}{\sin \widehat{BEH}} = \frac{EH}{\sin \widehat{EBH}} \quad \text{وَ} \quad \frac{HI}{\sin \widehat{HEI}} = \frac{EH}{\sin \widehat{EIH}}$$ (مع $\widehat{EIH} < \widehat{EBH}$)؛ ولكن: $HI = BH$

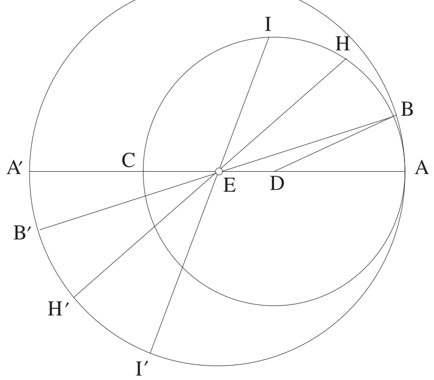
وَ $\sin \widehat{EBH} > \sin \widehat{EIH}$ ، فإذاً $\sin \widehat{BEH} > \sin \widehat{HEI}$ ، وبالتالي $\widehat{HEI} < \widehat{BEH}$.

إنّ هذا الاستدلال المثلّثاتي، الذي يعتبر الجيوب كدالات (عددية) للزوايا، لا يتطلب استخدام عدة دوائر، ولكنه غريب عن رياضيات ذلك العصر. إلا أنـّه يظهر من خلال السطور في استدلال ابن الهيثم.

ويلفت ابن الهيثم النظر إلى أنّ برهان المتباينة للزوايا التي لها الرأس E والتي تقبل الأقواس المتساوية $\widehat{AB}$ ، $\widehat{BH}$ وَ $\widehat{IH}$ لا يَستخدِم نسبةَ القوس $\widehat{AB}$ إلى نصف الدائرة ABC. والبرهان صالح، سواء إنْ كانت النسبة مُنْطَقَةً أو غير مُنطَقةٍ، ولكن من الواضح أنَّ المؤلـّف يفترض ضمنياً أنَّ مجموع الأقواس المعنية بالأمر هو أقلُّ من نصف محيط دائرة.

ملاحظات:

إذا رسمنا الدائرة (E, EA)، فإنّ الخطوطَ BE، HE وَ IE تقطعها على النقاط B'، H' وَ I'.



الشكل ١٩

والنتيجة $\widehat{AEB} < \widehat{BEH} < \widehat{HEI}$ تُؤدّي إلى: $\widehat{A'E'B'} < \widehat{B'E'H'} < \widehat{H'E'I'}$ ، وهذه الزوايا في مركز الدائرة (E, EA) تقبل أقواساً غير متساوية:

$\widehat{A'B'} < \widehat{B'H'} < \widehat{I'H'}$ ؛

فيكون إذاً: $\widehat{AB} = \widehat{BH} = \widehat{IH} \Leftarrow \widehat{A'B'} > \widehat{B'H'} > \widehat{I'H'}$.

لقد درس ابن الهيثم، في هذه القضية، تغيّرات بعض العناصر في شكلٍ معيَّن تبعاً لتغيُّرات عناصر أخرى: وهي هنا تغيُّرات الزوايا ذات الرأس E، مثل الزاوية $\widehat{BEH}$، تبعاً لتغيُّرات الزوايا ذات الرأس D (مركز الدائرة) ، مثل الزاوية $\widehat{BDH}$. ونتعرَّف من خلال هذه الاستدلالات الهندسية على التزايدية والتحدب للزاوية $\widehat{EAB}$ المعتبَرة كَدالـّة للزاوية $\widehat{ADB}$.

لنثبت هاتين الخاصَّتين بطريقة تحليلية. ليكن $\widehat{ADB} = \theta \in]0\,,\,\pi[$ وَ $\widehat{AEB} = \varphi$. فيكون لدينا:

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + a} = tg\varphi$$

، حيث يكون r نصف قطر الدائرة ABC وَ $DA = r > DE = a$.

نحصل بالاشتقاق على:

$$0 < r\frac{r + a\cos\theta}{(r\cos\theta + a)^2} = \left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{d\theta}$$ ،

وهذا ما يُبيِّن تزايدية الدالـّة φ بالنسبة إلى المتغيِّر θ. ولكن

$$\frac{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2}{(r\cos\theta + a)^2} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$$ ؛

فيكون معنا إذاً:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = r\frac{r + a\cos\theta}{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2}$$ ؛

وهذه العبارة الأخيرة هي دالة تناقصية بالنسبة إلى المتغيِّر $\cos\theta$. وهذا ما يجعلنا نستنتج أنَّ الدالة φ محدَّبة، لأنّ $\cos\theta$ دالـّة تناقصية بالنسبة إلى المتغيِّر θ. كما أننا نتحقـَّق فعلاً أنَّ:

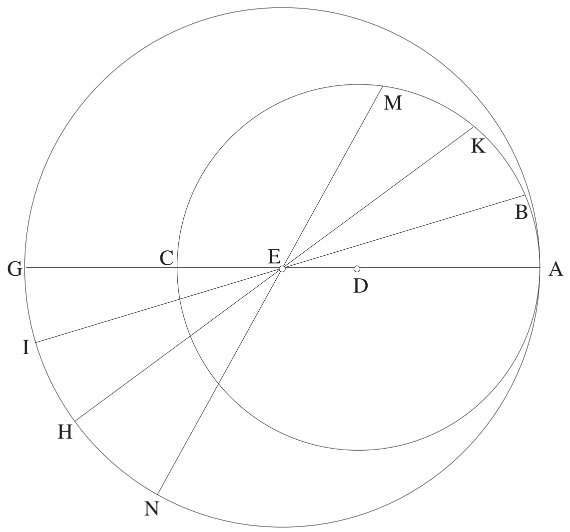
$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = \frac{ar\left(r^2 - a^2\right)\sin\theta}{\left(r^2 + 2ar\cos\theta + a^2\right)^2} > 0$$

في الفسحة $]0\,,\,\pi[$.

وهذا ما يدلُّ على تزايديّة الزوايا $\widehat{AEB}$، $\widehat{BEH}$ وَ $\widehat{HEI}$.

القضية ٩- نأخذ من جديد الدائرة ذات المركز D والقطر AC ، ونأخذ نقطة E على الخط DC، ونرسم الدائرة (E, EA). ونأخذ ثلاثة خطوط اختيارية مارَّة بالنقطة E تقطع الدائرة

(D, DA) على النقاط B ،K وَ M وتقطع الدائرة (E, EA)على النقاط I، H وَ N ؛ فيكون معنا: $\frac{\overset{\frown}{BK}}{\overset{\frown}{KM}} < \frac{\overset{\frown}{IH}}{\overset{\frown}{HN}}$.



الشكل ٢٠

- إذا كانت $\overset{\frown}{BK}$ وَ $\overset{\frown}{KM}$ مشتركتين، توجَد قوس α بحيث يكون: $\alpha.p = \overset{\frown}{BK}$ و $\alpha.q = \overset{\frown}{KM}$. فتتركّب إذاً الزاويتان $\widehat{BEK}$ و $\widehat{KEM}$، على التوالي، من عدد p وعدد q من الزاوايا؛ كل هذه الزوايا غير متساوية وهي تتزايد في العِظم كلما ابتعدنا عن B. وكذلك هي حال الزاويتين المركزيتين $\widehat{IEH}$ وَ $\widehat{HEN}$ اللتين تقبلان القوسين $\overset{\frown}{IH}$ وَ $\overset{\frown}{HN}$. وهكذا تكون كل قوس من القوسين $\overset{\frown}{IH}$ وَ $\overset{\frown}{HN}$ مركَّبة من مجموعة من الأقواس غير المتساوية:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \overset{\frown}{IH} \text{ ،} \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i = \overset{\frown}{HN} \text{ ، مع } \alpha_i < \alpha_{i+1} .$$

يكون معنا إذاً: $p\,\alpha_1 < \overset{\frown}{IH} < p\,\alpha_p$ وَ $q\alpha_{p+1} < \overset{\frown}{HN} < q\alpha_{p+q}$ ؛ ولكن $\alpha_p < \alpha_{p+1}$ ،

فيكون إذاً: $q\alpha_p < \overset{\frown}{HN} < q\alpha_{p+q}$ ، وبالتالي: $\frac{\overset{\frown}{IH}}{\overset{\frown}{HN}} < \frac{p\alpha_p}{q\alpha_p}$ ، فيكون إذاً:

$$\frac{\overset{\frown}{IH}}{\overset{\frown}{HN}} > \frac{p}{q} \text{ أو } \frac{\overset{\frown}{BK}}{\overset{\frown}{KM}} < \frac{\overset{\frown}{IH}}{\overset{\frown}{HN}} .$$

- $\overset{\frown}{BK}$ وَ $\overset{\frown}{KM}$ غير مشتركتين.

يقول ابن الهيثم إنَّ البرهان في هذه الحالة يتمّ كما جرى في القضية ٦ (انظر ص. ٩٣-٩٤).

يُمكن أن نُبرهن، بواسطة استدلال بالخُلف، أنـّه لا يُمكن أن يكون معنا:

$$\frac{\widehat{IH}}{\widehat{HN}} = \frac{\widehat{BK}}{\widehat{KM}} \quad \text{ولا} \quad \frac{\widehat{BK}}{\widehat{KM}} > \frac{\widehat{IH}}{\widehat{HN}} .$$

ملاحظتان:

١) الحالة الخاصة: إذا كان $\widehat{BK} = \widehat{KM}$، كنا قد رأينا أنَّ $\widehat{HN} < \widehat{IH}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{\widehat{BK}}{\widehat{KM}} < \frac{\widehat{IH}}{\widehat{HN}}$.

ويكون معنا في جميع الأحوال: $\frac{\widehat{BK}}{\widehat{KM}} < \frac{\widehat{IH}}{\widehat{HN}}$.

ويمكن أن نُعبِّر عن هذه القضية بالقول: إذا كانت φ_0، φ_1 ، φ_2 ، تتوافق مع ثلاث قِيَم θ_0 ، θ_1، θ_2 للمتغيِّر θ بحيث يكون $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$، يكون معنا:

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_2 - \theta_1} < \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_2 - \varphi_1} .$$

هذه هي صيغة تحدُّب الدالـّة φ للمتغيِّر θ. ولقد أثبتها ابن الهيثم مُفتَرِضاً في البدء أنَّ النسبة $\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_2 - \theta_1}$ مُنْطَقة، وهي الحالة التي طَبَّق فيها القضية ٨؛ ثم مدَّد المتباينة بواسطة الاتصال، كما رأيناه يفعل ذلك أعلاه.

إنّه من الواضح أنَّ ابن الهيثم قد طوَّر طريقة تحليلية يُمكن التعبير عن مراحلها على الشكل التالي:

نريد أن نثبت أنّ الدالـّة $\varphi = f(\theta)$ تزايدية ومُحدَّبة. يبدأ ابن الهيثم، لأجل ذلك، بإثبات التزايدية ثم بإثبات المتباينة:

$$f(\theta+h) - f(\theta) > f(\theta) - f(\theta-h)$$

التي تُعبِّر عن حالة خاصَّة من التحدُّب. ويستنتج من ذلك في المرحلة الثانية أنّ:

$$\frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{f(\theta_1) - f(\theta_0)} > \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 - \theta_0}$$

في الحالة التي تكون فيها هذه النسبة مُنطَقة ؛ وهو يقسم لأجل ذلك الفُسْحَتَيْن $[\theta_0, \theta_1]$ و $[\theta_1, \theta_2]$ إلى p وَ q فسحة مساوية لنفس المقدار α ويُطبِّق المرحلة السابقة. والتعميم إلى الحالة التي تكون فيها النسبة $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 - \theta_0}$ غير مُنْطَقَة يتمّ بالإحالة إلى الاستدلال بالخُلف وفقاً للنموذج الكلاسيكي لطرائق هندسة اللامتناهيات في الصغر(مع مصادرة أرشميدس). والأمر يتعلّق، إذا استخدمنا المصطلحات الحديثة، بتمديد بواسطة الاتصال.

٢) نجد هذه المتباينات ثانية في القسم الفلكي من مؤلَّف ابن الهيثم. تـُمثِّل الدائرةُ ($E,$ EA) الفلكَ المائل لكوكب ما، وتُمثِّل الدائرة (D, DA) الفلكَ الخارج المركز. ويتمّ الحصول على المتباينات السابقة إذا افتـُرِضَ أنَّ الحركة تحدُث من البعد الأبعد A نحو البعد الأقرب C.

إذا حدث الانتقال من C نحو A مروراً بالنقطتين P وَ Q الموافقتين للنقطتين P_1 وَ Q_1 ، يكون معنا $\widehat{CDP} < \widehat{GEP_1}$ ، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{\widehat{GP_1}}{\widehat{P_1Q_1}} > \frac{\widehat{CP}}{\widehat{PQ}} \text{ ، } \frac{\widehat{P_1Q_1}}{\widehat{Q_1M_1}} > \frac{\widehat{PQ}}{\widehat{QM}}$$

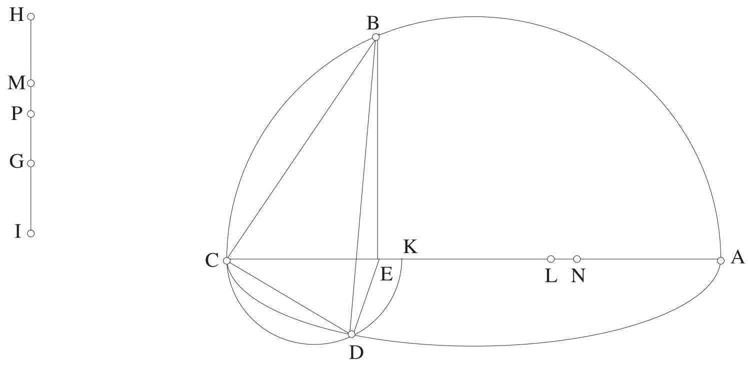
أو

$$\frac{\widehat{CP}}{\widehat{GP_1}} < \frac{\widehat{PQ}}{\widehat{P_1Q_1}} > \frac{\widehat{QM}}{\widehat{Q_1M_1}}.$$

القضية ١٠- ليكن معنا الخطُّ AC على تقاطع مستويين متعامدين، ونصفُ دائرة ABC ذات قطر AC في أحد هذين المستويين، وقطعة من دائرة DA أصغر من نصف دائرة في المستوي الآخر.

لنأخذ النسبة $1 < \frac{\overline{HG}}{\overline{HP}} = k$ (وهذه النسبة محدَّدة بالنقطة P من الخط HG).

نريد إيجاد نقطة D على القوس $\widehat{ADC}$ بحيث يكون $\frac{BD}{DC} > \frac{GH}{HP} > 1$ ، إذا كان $DE \perp AC$ في المستوي ADC وَ $EB \perp AC$ في المستوي ABC.



الشكل ٢١

نُحدِّد النقطتين M وَ I على الخط HPG وفقاً للمعادلة $\frac{HP}{HM}=\frac{HG}{HP}$ (تكون M بين H وَ P)

وللمعادلة $GI = HM$ (تكون I بعد G)؛ فيكون معنا $IM = GH$.

لتكن K على AC بحيث يكون $1< \frac{GH}{MH}=\frac{IM}{MH}=\frac{AK}{KC}$ ، فيكون معنا إذاً $AK > KC$ وَ

$\frac{AK}{KC}=k^2>1$.

يقطع نصفُ الدائرة، ذات القطر KC في المستوي ADC ، القوسَ $\widehat{ADC}$ على النقطة D.

النقطة E، ولتكن مأخوذة بحيث تكون $\widehat{CED}$ زاوية قائمة، تُحقِّق: $CE < CK$. ولتكن على الخطّ AC النقطتان L وَ N المُحدَّدتان بالمعادلتين: $KC = AL$ وَ $CE = AN$ ، فيكون معنا $NE > LK$. ولكن :

$$\frac{LK}{KC}=\frac{AK-AL}{KC}=\frac{AK-CK}{KC}=\frac{GH-MH}{MH}=\frac{GM}{MH}،$$

فيكون إذاً: $\frac{NE}{KC}>\frac{GM}{MH}$.

إنَّ لدينا $\frac{NE}{KC}=\frac{NE\cdot EC}{KC\cdot EC}$ ،

ولكن معنا:

$$DC^2=KC\cdot EC \text{ ، } EB^2-EC^2=AE\cdot EC-AN\cdot EC=NE\cdot EC$$

فإذاً: $\frac{NE}{KC}=\frac{EB^2-EC^2}{DC^2}>\frac{GM}{MH}$.

ولكن

$$BD^2-CD^2=EB^2+ED^2-CD^2=EB^2-(CD^2-ED^2)=EB^2-EC^2$$

فإذاً: $\frac{GM}{MH} > \frac{BD^2 - CD^2}{CD^2}$،

فنستنتج أنَّ: $\frac{GH}{MH} > \frac{BD^2}{CD^2}$،

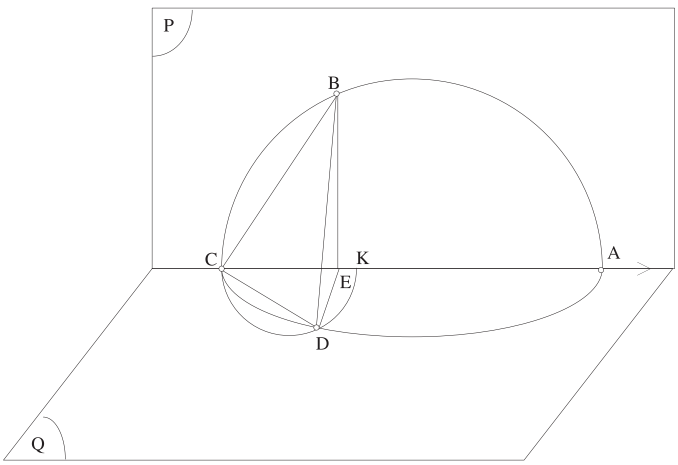
ولكنَّ

$$\frac{GH}{MH} = \frac{GH^2}{MH.GH} = \frac{GH^2}{HP^2}$$

فيكون معنا:

$$\frac{BD}{CD} > \frac{GH}{HP} > 1$$

شرح: إنَّ لدينا تبعاً للفرضيات: $\frac{\overline{HP}}{\overline{HM}} = k = \frac{\overline{HG}}{\overline{HP}}$ ، فيكون إذاً: $1 < k^2 = \frac{\overline{HG}}{\overline{HM}}$.



الشكل ٢٢

لنأخذ نصف دائرة قطرها AC في المستوي P. توجَد على AC نقطة وحيدة K بحيث يكون : $\frac{\overline{KA}}{\overline{CK}} = k^2$.

نرسم، في المستوي Q، العمودي على P، نصف دائرة قطرها KC؛ كل نقطة D، على نصف الدائرة هذا، تتوافق مع نقطة E على AC بحيث يكون $DE \perp AC$ وتتوافق مع نقطة B على نصف الدائرة التي في المستوي P بحيث يكون:

$$.BE \perp AC$$

فيكون معنا إذاً:

$$BE^2 = \overline{CE} \cdot \overline{EA} \quad \text{وَ} \quad ED^2 = \overline{CE} \cdot \overline{EK} \text{ ؛}$$

فنستنتج إذاً أنَّ: $BD^2 = BE^2 + ED^2 = \overline{CE}\cdot\left(\overline{EA}+\overline{EK}\right) = \overline{CE}\cdot\left(2\overline{EK}+\overline{KA}\right)$.

وإنَّ معنا من جهة أخرى: $CD^2 = \overline{CE}\cdot\overline{CK}$،

فيكون معنا إذاً: $\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{\left(2\overline{EK}+\overline{KA}\right)}{\overline{CK}}$.

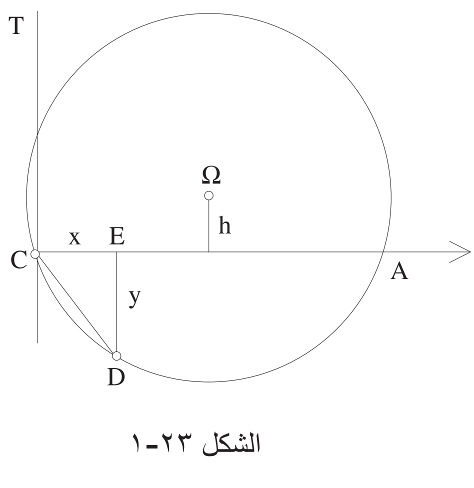
وإذا افترضنا أنَّ AC موجَّهة من C إلى A، يكون معنا:

$0 < \overline{CK}$ ، $0 < \overline{KA}$ وَ $\overline{CK} < \overline{KA}$ ، $0 < \overline{CE} < \overline{CK}$ ، فنستنتج أنَّ: $0 < \overline{EK}$.

ويكون معنا إذاً: $\frac{BD^2}{CD^2} > \frac{\overline{KA}}{\overline{CK}}$ مع $\frac{\overline{KA}}{\overline{CK}} = k^2$ ، وهكذا يكون : $\frac{BD}{CD} > k$.

- كل نقطة D مأخوذة على نصف الدائرة ذات القطر KC تعطي حَلاً لهذه المسألة، وكل نقطة D تتوافق في المستوي Q مع قوس دائرة ADC أصغر من نصف دائرة.
- إذا كانت القوسُ التي هي أصغر من نصف دائرة معلومةً، تكون معنا على هذه القوس نقطة وحيدة تُبْنى بهذه الطريقة وتُعطي حَلاً لهذه المسألة، أي أنّه يكون معنا $k^2 = \frac{\overline{KA}}{\overline{CK}}$.

ولكن، بما أنَّ الشرط في هذه المسألة مُعْطَى على شكل متباينة، فإنَّ كل النقاط D الموجودة على قوس مُعيَّن من الدائرة ADC تكون صالحة لحل المسألة. ويمكن تحديد هذه القوس بالطريقة التالية:



الشكل ٢٣-١

نأخذ في مستوي الدائرة ADC مِحْوَرَيْ الإحداثيّات AC وَ TC. فتكون $(\frac{d}{2}, h)$ إحداثيتَي المركز Ω وَ تكون $(d, 0)$ إحداثيتيْ النقطة A.

إذا كانت $D = (x ، y)$ نقطة على الدائرة، يكون معنا:

$$\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+(y-h)^2=\frac{d^2}{4}+h^2$$

أي أنّ: $x(x-d)+y(y-2h)=0$.

ولكن : $x(d-x)+y^2=BE^2+ED^2=BD^2$ وَ $x^2+y^2=CD^2$ ، فيُكتَب شرط المسألة على الشكل التالي:

$y(y-2h)+y^2>k^2(dx+2hy)$ ، أي أنَّ $k^2dx<2y^2-2hy-2k^2hy$ وهذا ما يفرض أن تكون النقطة D خارج القطع المكافئ ذي المعادلة:

$$k^2dx=2y^2-2h(1+k^2)y ،$$

والمحور: $y=\frac{h}{2}(k^2+1)$ ،

والرأس الذي له الإحداثيتان: $\left(-\frac{(1+k^2)^2h^2}{2k^2d},\ \frac{h}{2}(k^2+1)\right)$.

النقطة C، التي هي أصل الإحداثيات، توجد على القطع المكافئ، في حين أنَّ النقطة $A=(d\ ,\ 0)$ هي في داخله : إنَّ الخطَّ ذا المعادلة $y=0$ يقطع بالفعل القطع المكافئ على النقطة C ، على يسار النقطة A. ويقطع القطعُ المكافئ قوسَ الدائرة ADC على نقطة وحيدة D_0، ويجب أن تكون النقطة D المطلوبة على القوس $\overset{\frown}{CD_0}$. وتُحدَّد D_0 بمعادلة من الدرجة الثالثة[٧].

لنأخذ هذه المسألة نفسها، مع الافتراض بأن الزاوية $\widehat{DEC}$ حادّة.

لتكن D النقطة التي نحصل عليها كما فعلنا في الحالة السابقة، ونرفق بها النقطتين S وَ O بحيث يكون $DS\perp AC$ وَ $OS\perp AC$ ، فيكون معنا إذاً: $k<\frac{DO}{DC}$.

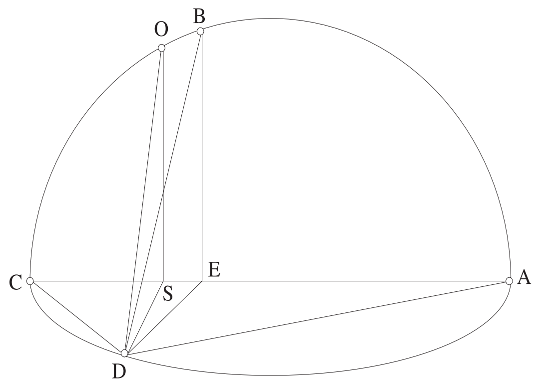
---

[٧] $x_0\,(x_0-d)=y_0\,(y_0-2h)$ وَ $2y_0\,[y_0-(1+k^2)h]=k^2d\cdot x_0$، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{x_0-d}{k^2d}=\frac{2h-y_0}{2(y_0-(1+k^2)h)} \quad \text{وَ} \quad x_0=d\frac{y_0(2-k^2)-2h}{2(y_0-h(1+k^2))} ؛$$

ويكون معنا بعد ذلك:

$$4y_0\,(y_0-h(1+k^2))^2=k^2d^2\,(y_0\,(2-k^2)-2h).$$



الشكل ٢٣-٢

لتكن النقطة E على$[CA]$ بحيث تكون $\widehat{CED}$حادَّة (لدينا $\widehat{CSD} < \widehat{CED}$ فيكون $CE > CS$)؛ ولتكن B على نصف الدائرة المعلومة بحيث يكون $EB \perp AC$.

نريد أنْ نبرهن أنَّ: $\frac{BD}{DC} > k$.

شرح:

لنضع $x_0 = \overline{CS}$ ، $x = \overline{CE}$ ، $d = \overline{CA}$ وَ $a = \overline{SD}$ مع $x_0 < \frac{d}{2}$ وَ $d > x > x_0$. فيكون معنا إذاً:

$$a^2 + dx_0 - x_0^2 = x_0(d - x_0) + a^2 = OS^2 + SD^2 = OD^2 \qquad (١)$$

$$BE^2 = x(d - x) \text{ ، } a^2 + (x - x_0)^2 = DS^2 + SE^2 = DE^2$$

$$a^2 + (x - x_0)^2 + x(d - x) = DE^2 + BE^2 = BD^2$$

$$a^2 + dx - x_0(2x - x_0) = BD^2 . \qquad (٢)$$

ونحصل من (١) وَ (٢) على:

$$BD^2 > OD^2 \Leftrightarrow 0 < d(x - x_0) - 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow 0 < (d - 2x_0)(x - x_0).$$

وهذه المتباينة مُحققَة لأنَّ $x_0 < x$ وَ $2x_0 < d$. فيكون معنا إذاً: $OD < BD$ ، فنحصل على النتيجة: $\frac{BD}{CD} > k$.

ملاحظة: يكون معنا أيضاً: $BD < AD$ ، لأنـَّه يُمكن أن نكتب:

$$a^2 + x_0^2 + d(d - 2x_0) = a^2 + (d - x_0)^2 = AD^2 \text{ ،}$$

$$a^2 + x_0^2 + x(d - 2x_0) = BD^2 \text{ ، } d - 2x_0 > 0 \text{ ،}$$

ويكون معنا: $d > x$. فإذاً، عندما ترسم E $[SA]$، تتزايد x من x_0 إلى d ، وترسم B القوس OA ويتزايد الطول BD ، فيكون معنا $AD > BD > OD$.

أخذ ابن الهيثم، بعد ذلك، أقواساً مبنيّة على OD أو على BD ، مفترِضاً أنَّ كلَّ قوس من هذه الأقواس هي جزء من دائرة مساوية لدائرة ADC ؛ وهذا يرجع أيضاً إلى أخذ الدائرة ADC وإلى وضع وترين $O'D$ وَ $B'D$ بحيث يكون $DO = O'D$ وَ $DB = B'D$. فيكون معنا عندئذ: $DA > DB' > O'D > DC$ ، فنستنتج أنَّ:

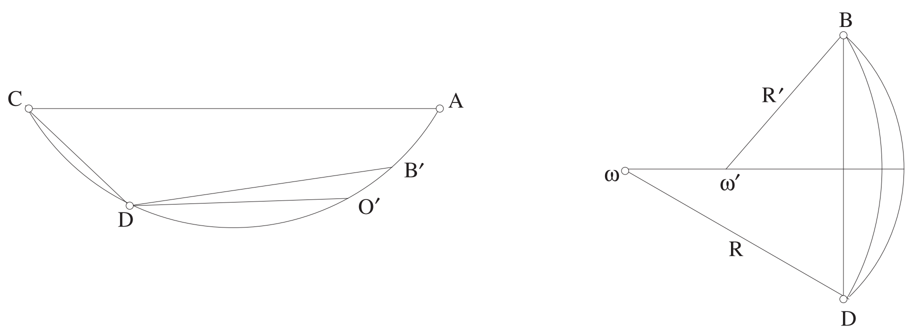
$$\widehat{DC} < \widehat{DO'} < \widehat{DB'} < \widehat{DA}$$

وَ $\widehat{DO'} + \widehat{DC} < \widehat{DA} + \widehat{DC} <$ نصف دائرة، وكذلك أيضاً: $\widehat{DB'} + \widehat{DC} <$ نصف دائرة.

فنستنتج وفقاً للقضية الأولى أنَّ:

$$k < \frac{DO'}{DC} < \frac{\widehat{DO'}}{\widehat{DC}} \quad \text{وَ} \quad k < \frac{DB'}{DC} < \frac{\widehat{DB'}}{\widehat{DC}} .$$

والنتيجة هي نفسها إذا أخذنا القوسين $\widehat{DO}$ أو $\widehat{DB}$ من دائرة أصغر من الدائرة ADC.



الشكل ٢٤

لتكن معنا إذاً قوسُ $\widehat{DB}$ ودائرتان هما (ω, R) وَ (ω', R')، تَمُرّان بالنقطتين B وَ D مع $R > R'$. والقوس $\widehat{DB}$ من الدائرة (ω') هي خارج الدائرة (ω)، فطولها إذاً أكبر من طول القوس $\widehat{DB}$ من الدائرة (ω). فيكون معنا إذاً: $k < \frac{DB}{DC} < \frac{\widehat{DB}}{\widehat{DC}}$.

ملاحظة: إنَّ محور الدائرة ABC، في هذه القضية ١٠، هو المنصِّف العمودي للخط AC في المستوي ADC. ومركز الدائرة ADC هو على هذا المُنَصِّف، فهو إذاً مركز كرة توجَد

عليها الدائرتان ABC وَ ADC. والخاصِّيّة المُثبَتة في القضية ١٠ ستُستَخدَم عدة مرات في قسم الفلك من مؤلّف ابن الهيثم (انظر ص. ٤١٧، ٤٣١).

القضيتان ١١ وَ ١٢: نأخذ بعين الاعتبار، في هاتين القضيتين، خاصِّيّةَ نقاط دائرة من دوائر العرض على الكرة السماوية. لتكن ABC دائرة نصف النهار، ولتكن A وَ C القطبين السماويين، ولتكن DNE دائرة موازية للأفق ذات قطر DE.

القضية ١١- نفترض أنَّ A وَ C على الأفق (المكان المعني بالأمر هو في هذه الحالة نقطة على دائرة الاستواء الأرضية). تقطع دائرة معدّل النهار، ذاتُ المركز G، دائرةَ نصف النهار على النقطة B، وَيقطع الخطُّ BG الخطَّ DE على النقطة O. لنأخذ ثلاث دوائر موازية لدائرة معدّل النهار تكون مراكزها F، S وَ Q، وتقطع على التوالي دائرة نصف النهار على النقاط H، I وَ K، كما تقطعُ الدائرةَ الأفقيةَ DNE على النقاط L، M وَ P ؛ ومُستوياتُها تقطع الخط DE على النقاط X، J وَ U. ونفترض أنَّ:

$DX < DJ < DO < DU < DE$ ، فيكون معنا عندئذ: $\frac{LH}{HD} > \frac{MI}{ID} > \frac{NB}{BD} > \frac{PK}{KD}$.

إنَّ مُستويَ دائرة نصف النهار (CBA)عموديٌّ على مستوي دائرة معدّل النهار وعلى مستويات الدوائر الموازية لمعدّل النهار. تسمح المتباينتان $DX < DJ < DO$ بالحصول على $OJ < OX$ ، فنحصل على $MJ > LX$ ، لأنَّ $OD^2 - OX^2 = LO^2 - OX^2 = LX^2$، ولأنَّ $OD^2 - OJ^2 = MO^2 - OJ^2 = MJ^2$.

ويكون من جهة أخرى: $SJ = QX$ وَ $\widehat{QXL} = \widehat{SJM}$ = زاوية قائمة، فيكون إذاً $\widehat{XQL} < \widehat{JSM}$. ويكون معنا أيضاً $\widehat{JSM} < \widehat{OGN}$. ويكون معنا $2\widehat{HLX} = \widehat{XQL}$ ، لأنَّ $\widehat{XQL}$، في الدائرة ذات المركز Q ، هي زاوية مركزية موتـرّة للقوس $\widehat{HL}$، وَ $\widehat{HLX}$ هي زاوية محاطة توتـّر قوساً مساوية للقوس $\widehat{HL}$ (إنـّها قوس متناظرة مع القوس $\widehat{HL}$ بالنسبة إلى الخط QX). ويكون معنا أيضاً $2\widehat{IMJ} = \widehat{JSM}$ وَ $2\widehat{ONB} = \widehat{OGN}$، فنستنتج أنَّ:

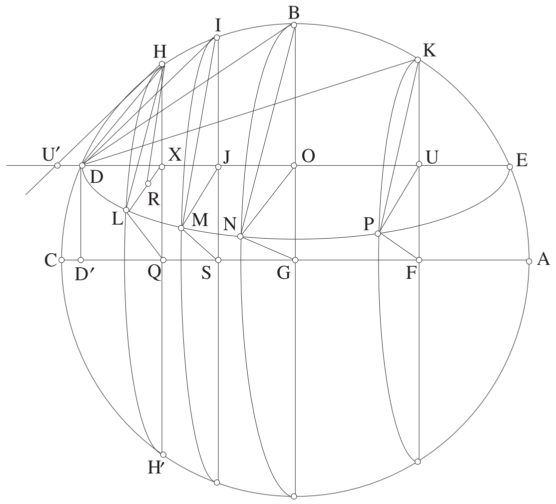
$$\widehat{HLX} < \widehat{IMJ} < \widehat{ONB} ،$$

وبالتالي يكون: $\widehat{NBO} < \widehat{MIJ} < \widehat{LHX}$.

لتكن النقطة R على الخط LX بحيث يكون $\widehat{MIJ} = \widehat{XHR}$ ؛ المثلثان HXR وَ IJM هما قائما الزاوية ومتشابهان، فيكون معنا إذاً: $\frac{RH}{HX} = \frac{MI}{IJ}$.

ولكن $HR < HL$ فيكون إذاً: $\frac{HL}{HX} > \frac{MI}{IJ}$.

ويُبرهَن بنفس الطريقة أنَّ: $\frac{MI}{IJ} > \frac{NB}{BO}$.



الشكل ٢٥

إنَّ لدينا $\widehat{BDO} < \widehat{IDJ} < \widehat{HDX}$ وبالتالي يكون: $\widehat{DBO} > \widehat{DIJ} > \widehat{DHX}$. لتكن النقطة U'على الخط DX بحيث يكون: $\widehat{DIJ} = \widehat{U'HX}$ $(ID//HU')$، فيكون معنا: $\frac{IJ}{ID} = \frac{HX}{HU'}$؛

ولكن: $HU' > HD$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{JI}{ID} > \frac{HX}{HD}$؛ وكنا قد رأينا أنَّ: $\frac{MI}{IJ} > \frac{HL}{HX}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{MI}{ID} > \frac{HL}{HD}$ ،

ويكون معنا أيضاً: $\frac{NB}{BD} > \frac{MI}{ID}$.

ونبيِّن، بنفس الطريقة، للدائرة (F, FK) أنّ:

$$KU < BO \text{،} \quad UP < NO \text{ وَ } KP < BN \text{؛}$$

ولكنّ $KD > BD$ ، فيكون إذاً: $\frac{KP}{KD} > \frac{NB}{BD}$ ؛ فيكون معنا إذاً: $\frac{KP}{KD} > \frac{NB}{BD} > \frac{MI}{ID} > \frac{HL}{HD}$.

لنلاحظ أنَّ $\sin \widehat{HDX} = \frac{HX}{DH}$، حيث توتِر الزاويةُ $\widehat{HDX}$ القوسَ $\widehat{HE}$. وهذه القوس تتناقص، عندما تنتقل النقطة X على DE من D إلى E، من الحدّ θ، وهي الزاوية المحصورة بين خط التماس في النقطة D وبين DE عندما تكون X في D، إلى الحدّ 0 عندما تكون X في E.

وتتزايد LX عندما تنتقل X من D إلى O، فالزاوية $\widehat{LQX}$ تتزايد إذاً، لأنَّ المسافة $GO = QX$ تبقى ثابتة. وتتزايد بالتالي الزاوية $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQX}$، وتتزايد أيضاً النسبة $\sin \widehat{HLX} = \frac{HX}{HL}$. وهكذا تتناقص $\frac{HL}{HD} = \frac{HL}{HX} \cdot \frac{HX}{DH}$ عندما تتزايد XD من 0 إلى DO.

ملاحظة: إذا تطابقت DE مع AC يكون $GO = 0$ ، حيث تبقى الزاوية $\widehat{HLX}$ ثابتة ومساوية لـِ $\frac{\pi}{4}$ ، فتبقى إذاً النسبة $\frac{HL}{DH}$ ثابتة أيضاً.

وتتناقص HL عندما تنتقل X من O إلى E، بينما تتزايد DH، وبالتالي فإنَّ النسبة $\frac{HL}{DH}$ تتناقص.

القضية ١٢- نفترض أنّ القطب A بين الأفق وسمت الرأس. لم تعد الدائرة (G, GB) تُمثِّل معدّل النهار، ولكن مُسْتَوِيَها يمرّ كما هي الحال في القضية ١١ في O وسط DE. وذلك أنَّ G في هذه الحالة مُحدَّدة بوصفها المسقطَ العموديّ للنقطة O ، وسط DE ، على القطر AC ، وَ B هي نقطة دائرة نصف النهار على امتداد GO. تظهر لنا ثلاث حالات:

١) AC تقطع DE على النقطة Ω، بعد النقطة E؛

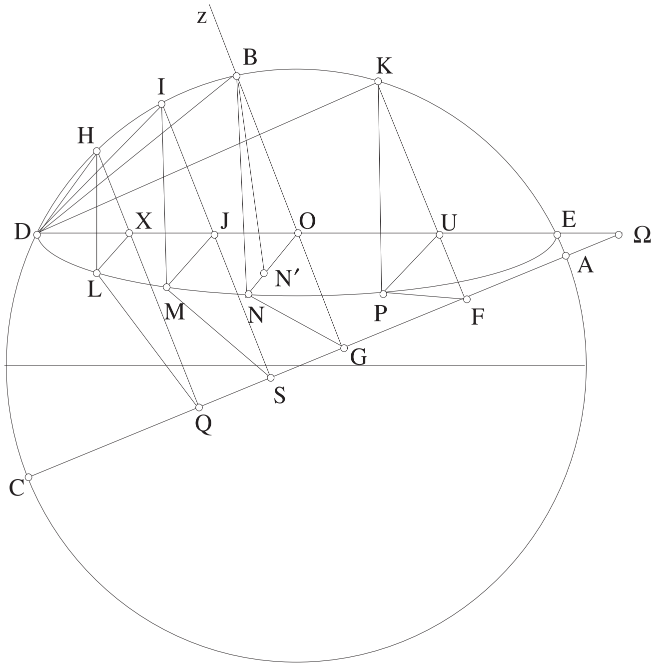
٢) AC تقطع DE على النقطة E $(A= E =\Omega)$؛

٣) AC تقطع DE بين E وَ O التي هي وسط DE.

١) إنَّ الخطوط HQ، IS ، BG وَ KF ، كما كان معنا في السابق، عمودية على AC ، فنستنتج أنَّ: $UF < OG < JS < XQ$ ؛ وكذلك إنَّ الخطوط LX، MJ ، NO وَ PU عمودية على دائرة نصف النهار، فهي إذاً عمودية على DE ؛ فيكون معنا:

$\widehat{DXL} = \widehat{DJM} = \widehat{DON} = \widehat{DUP} =$ زاوية قائمة؛

$\widehat{LXH} = \widehat{MJI} = \widehat{NOB} = \widehat{PUK} =$ زاوية قائمة.



الشكل ٢٦

إنَّ ON، من جهة أخرى، هو نصف قطر الدائرة $DLMNPE$، فيكون إذاً:

$NO > MJ > XL$ وَ $UP < NO$. ويكون معنا: $XQ > JS$ وَ $XL < MJ$ ، فإذاً:

$\frac{XQ}{XL} > \frac{JS}{MJ}$ ،

أي أن: $\text{cotg}\ \widehat{LQX} > \text{cotg}\ \widehat{MSJ}$، فيكون إذاً $\widehat{LQX} < \widehat{MSJ}$.

إنَّ الزاوية المحاطة $\widehat{HLX}$، في الدائرة (Q, QH)، تقبل قوساً مساوية للقوس $\widehat{HL}$، والزاوية المركزية $\widehat{LQH}$ تقبل القوس $\widehat{HL}$، فيكون إذاً: $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQH}$ ؛ ويكون أيضاً:

$\widehat{IMJ} = \frac{1}{2}\widehat{MSJ}$ وَ $\widehat{ONB} = \frac{1}{2}\widehat{NGB}$ ، فيكون : $\widehat{HLX} < \widehat{IMJ}$ ؛ ويكون أيضاً:

$\widehat{IMJ} < \widehat{ONB}$.

يكون معنا عندئذ: $\sin\widehat{HLX} = \frac{HX}{HL}$ وَ $\sin\widehat{IMJ} = \frac{IJ}{IM}$.

يكون معنا إذاً: $\frac{HL}{HX} > \frac{IM}{IJ}$ ؛ ونبيِّن بنفس الطريقة أنَّ: $\frac{IM}{IJ} > \frac{BN}{BO}$.

وينـْتهَي البرهان مثلما انتهى في القضية ١١.

إنّ لدينا، في الواقع $\frac{HX}{\sin\widehat{HDX}} = \frac{DH}{\sin\widehat{DXH}}$ ، حيث تكون الزاوية $\widehat{DXH} = \widehat{DOz}$ (GOz هو عمود المكان) مستقلـّة عن موضع النقطة X عندما تنتقل X على DE ؛ الزاوية $\widehat{DXH}$ توتـّر

القوس $\widehat{HE}$ التي تتناقص عندما يتزايد DX، فإنَّ جيبها إذاً يتناقص، كما تتناقص أيضاً النسبة: $\frac{HX}{DH} = \frac{\sin \widehat{HDX}}{\sin \widehat{AOz}}$.

فتكون معنا إذاً، للدوائر التي تكون مراكزها Q ، S وَ G ، المتباينةُ المزدوجة:

$$\frac{HL}{HD} > \frac{MI}{ID} > \frac{NB}{BD} .$$

البرهان، لهذه الدوائر الثلاث، هو نفسه في الحالات الثلاث ١)، ٢) وَ ٣)، لأنّ معنا في جميع الأحوال: $XQ > JS > OG$ وَ $XL < JM < ON$ ،

فيكون معنا بالتالي: $\frac{\pi}{2} > \widehat{NGO} > \widehat{MSJ} > \widehat{LQX}$، فنستنتج من ذلك أنّ:

$$\frac{\pi}{4} > \widehat{BNO} > \widehat{IMJ} > \widehat{HLX} .$$

دراسة دائرة مثل الدائرة (F, FK)

يكون معنا في الحالة ١) (انظر الشكل ٢٦) أو في الحالة ٢) عندما تكون E وَ A متطابقتين: $OG > UF$ وَ $ON > UP$ ؛ فلا تَمْكن المقارنة بين النسبتين $\frac{OG}{ON}$ وَ $\frac{UF}{UP}$. ويُمكن أنْ يكون معنا:

أ) $\frac{OG}{ON} > \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{OGN} < \widehat{UFP} \Leftarrow \widehat{ONB} < \widehat{UPK}$

ب) $\frac{OG}{ON} = \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{UPK} = \widehat{ONB}$

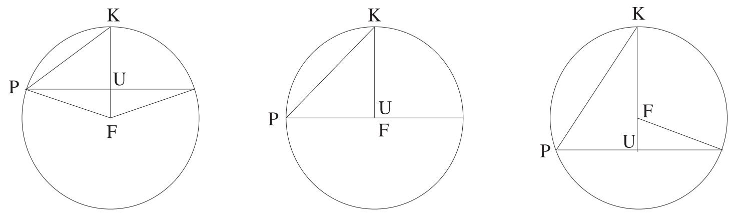
ت) $\frac{OG}{ON} < \frac{UF}{UP} \Leftarrow \widehat{UPK} < \widehat{ONB}$

ويُمكن أن يكون معنا في الحالة ٣)، حيث تكون Ω بين O وَ E:

- U بين O وَ Ω ؛ فتكون U في هذه الحالة بين K وَ F، فيكون معنا: $\widehat{KPU} < \frac{\pi}{4}$ ؛ وتكون الحالات الثلاث أ)، ب)، ت) ممكنة.
- U متطابقة مع النقطة Ω، فيكون في هذه الحالة: $U = F = \Omega$ وَ $\widehat{KPU} = \frac{\pi}{4}$.

• U بين E وَ Ω ؛ فتكون F، في هذه الحالة بين U وَ K ، فيكون معنا $\widehat{KPU} < \frac{\pi}{4}$ ؛

فيكون إذاً: $\widehat{ONB} < \widehat{KPU}$ (الحالة ت).



الشكل ٢٧

ويكون معنا، في الحالتين أ) وَ ب)، $\widehat{KPU} \leq \widehat{ONB}$؛ والدائرة (KP) تكون أصغر من الدائرة (BN)، لأنّ كليهما بين معدّل النهار وبين القطب A، والدائرة(KP) تكون أقرب من القطب. يكون معنا إذاً $KP < BN$.

إنّ لدينا، من جهة أخرى $KD > BD$ ، فيكون إذاً: $\frac{BN}{BD} > \frac{PK}{KD}$.

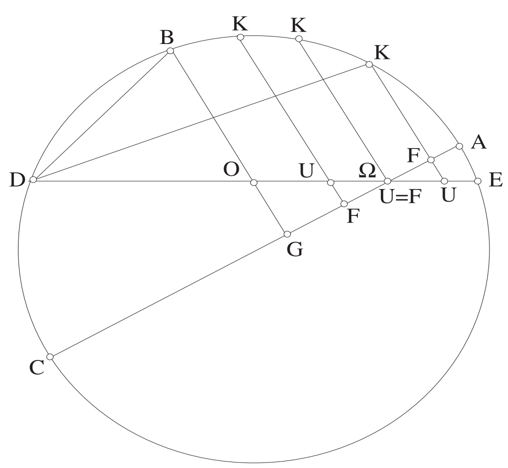
ويكون معنا، في الحالة ت)، $\widehat{KPU} > \widehat{ONB}$ فيكون معنا $\widehat{KPU} < \widehat{ONB}$.

إنّ لدينا نقطة N' على ON بحيث يكون $\widehat{PKU} = \widehat{OBN'}$، ويكون المثلثان OBN' وَ PKU قائمي الزاوية ومتشابهين؛ فيكون معنا: $\frac{BN}{BO} < \frac{BN'}{BO} = \frac{KP}{KU}$.

إنّ لدينا من جهة أخرى: $\frac{UK}{KD} > \frac{BO}{BD}$، فإذاً: $\frac{PK}{KD} > \frac{NB}{BD}$.

إذا كانت دائرة $(P'K')$ أقرب إلى القطب A من الدائرة (PK)، يكون معنا : $\frac{K'P'}{K'D} > \frac{KP}{KD}$.

يكون معنا إذاً في جميع الأحوال: $\frac{KP}{KD} > \frac{BN}{BD} > \frac{MI}{ID} > \frac{LH}{HD}$.

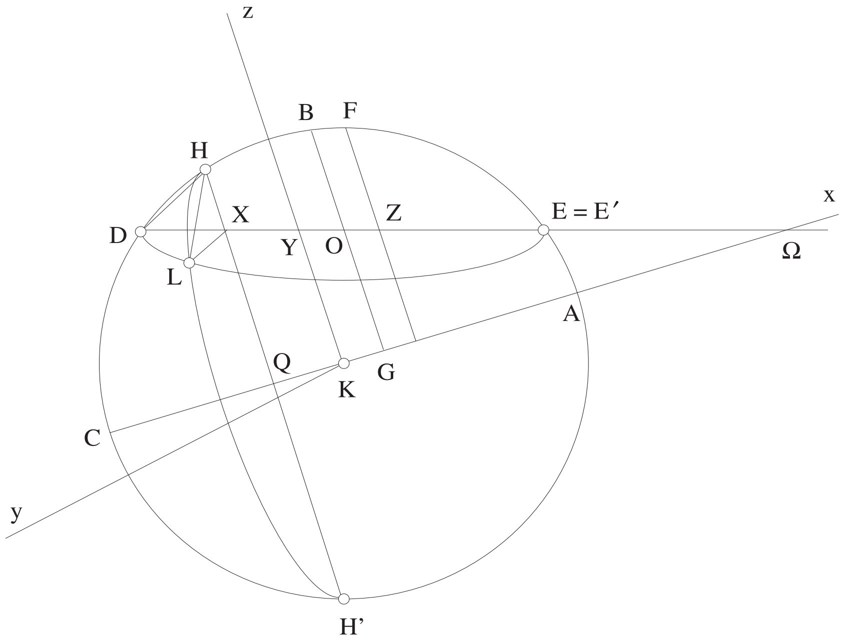


الشكل ٢٨

شرح القضيتين ١١ وَ ١٢:

لِنُعطِ الآن برهاناً بطريقة تحليلية للقضيتين ١١ وَ ١٢ المأخوذتين معاً.

لنأخذ كرةً ذات مِحور AC ومركز K ودائرةً صغيرة DLE ذات قطرDE في مستوي منصف النهار ABC (الشكل ٢٩-١)؛ وهذا القطر موازٍ للمحور AC، في حالة القضية ١١، ويقطع هذا المحور على النقطة Ω، في حالة القضية ١٢. لتكن النقطة F وسط القوس $\widehat{DE}$ ولتكن O وسط DE.



الشكل ٢٩-١

لنفترض أنّ القطبَ A موجود بين الأفق (الذي هو دائرة عظمى موازية لـِ DLE) وسمت الرأس (الذي هو F قطب الدائرة DLE). لتكن HLH' دائرة متغيِّرة ذات المحور AC؛ يقطع قطرها في المستوي ABC الخطَّ DE على النقطة X؛ نريد أن نثبت أنَّ النسبة $\frac{HL}{HD}$ تتناقص دوماً عندما تنتقل X على DE من D إلى E ، أي عندما تنتقل H على القوس $\widehat{DE'}$، حيث تكون $E = E'$ إذا كانت E فوق AC وحيث تكون E' مُتناظِرة مع النقطة E بالنسبة إلى ـِ AC في الحالة المعاكسة.

لنرمز بـِ α إلى الزاوية المُتَمِّمَة لعرض النقطة F، وسط القوس DE ، أي أنَّ $\alpha = \widehat{AKF}$ ، ولنرمز بـِ β إلى الزاوية $\widehat{EKF}$ التي هي الفرق بين الزاويتين المتمِّمتَيْن

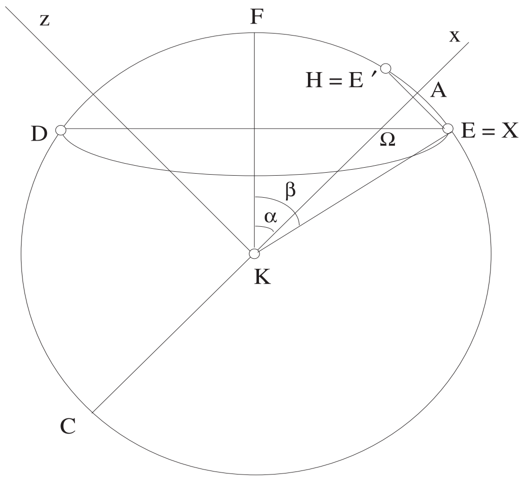
لعرضيْ E وَ F. ولتكن الزاوية θ الفرق بين الزاويتين المتمِّمتَيْن لعرضيْ F وَ H :

$\widehat{HKF} = \theta$ التي تتغيَّر قيمتها من (β -) عندما تكون H في D، إلى β إذا كان $\alpha \geq \beta$ ، أو إلى $2\alpha - \beta$ إذا كان $\alpha < \beta$ ، عندما تكون H في E' . وذلك أنّ العمود HX على AK، في هذه الحالة، هو $E\,E'$ عندما تكون X في E ؛ فتكون النقطة H حينئذ متطابقة مع E' (انظر الشكل ٢٩-٢). يكون معنا عندئذ:

$$\theta = \left(\overrightarrow{KE'}, \overrightarrow{KF}\right) = \left(\overrightarrow{KE'}, \overrightarrow{KA}\right) + \left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) + \left(\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KF}\right) = 2\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) + \beta$$ ،

ولكن $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KE}\right) = \left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KF}\right) + \left(\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{KE}\right) = \alpha - \beta$ ،

فيكون إذاً: $\theta = 2\alpha - \beta$.



الشكل ٢٩-٢

تُكتب معادلةُ القطر DE على الشكل التالي:

$$x \cos \alpha + z \sin \alpha = r \cos \beta \qquad (1)$$

إنّ لدينا وفقاً للفرضيات $\frac{\pi}{2} \geq \beta$ وَ $\alpha > 0$. والإحداثية الأولى x للنقطة X تساوي :

$r \cos(\alpha - \theta) = KQ$ ، مثل إحداثية H الأولى، لذلك فإن إحداثيتها الثالثة z تكون:

$$z = \frac{r}{\sin\alpha}\left(\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha - \theta)\right)$$.

يكون معنا : $H'H.\ HX = HL^2$ (الدائرة HLH') ، مع:

$$HH' = 2r \sin(\alpha - \theta)$$ ،

$$HX = r\sin(\alpha - \theta) - z = \frac{r}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha\sin(\alpha - \theta) + \cos\alpha\cos(\alpha - \theta) - \cos\beta\right)$$

$$.2r\frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\sin\alpha}=r\frac{\cos\theta-\cos\beta}{\sin\alpha}=HX \qquad (2)$$

ويكون معنا من جهة أخرى:

$$،2r\sin\frac{\beta+\theta}{2}=HD \qquad (3)$$

لأنَّ هذا الوتر يُقابل الزاويةَ المركزية $\widehat{HKD}=\beta+\theta$. وهكذا يكون:

$$\frac{HL^2}{HD^2}=2r\frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\sin\alpha}\cdot 2r\sin(\alpha-\theta)\cdot\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\beta+\theta}{2}} \qquad (4)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\beta+\theta}{2}}$$

يكون معنا[^]: $(\beta-\alpha)^+\le\frac{\beta-\theta}{2}\le\beta$ وَ $0\le\frac{\beta+\theta}{2}\le\inf(\alpha,\beta)$ ؛ وهكذا تكون $\sin\frac{\beta-\theta}{2}$ دالة تناقصيّة للمتغيِّر θ وتكون $\sin\frac{\beta+\theta}{2}$ دالة تزايديّة للمتغيِّر θ.

أما $\sin(\alpha-\theta)$، حيث يكون $|\alpha-\beta|\le\alpha-\theta\le\alpha+\beta$ ، فهي دالة تزايدية للمتغير θ إذا كان $\theta\ge\alpha-\frac{\pi}{2}$ وتناقصيّة إذا كان $\theta\le\alpha-\frac{\pi}{2}$.

لتكن Y نقطة التقاطع بين DE والمحور Kz ؛ إذا كانت النقطة X بين Y وَ E يكون معنا: $\theta\ge\alpha-\frac{\pi}{2}$ ، فتكون النسبة $\frac{HL^2}{HD^2}$ تزايدية. هذه النتيجة كافية إذا كانت النقطة Y أبعد من D خارج الكرة، أي إذا كان $\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}$.

أما في الحالة المعاكسة، حيث يكون $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$، فتكون Y بين D وَ E ، فيجب إعطاء برهان آخر عندما تكون X بين D وَ Y. تتزايد HX، وفقاً لِـ (2)، إذا كان $\theta\le 0$ ، أي عندما تكون X بين D والنقطة Z التي لها نفس الإحداثية الأولى ($r\cos\alpha$) لسمت الرأس F (وتكون H في F).

[^] إنَّ $\sup(x, 0)=x^+$ يرمز إلى القسم الموجِب من العدد x.

يكون معنا:

$$\frac{HL^2}{HD^2} = \frac{HH'}{HX} \cdot \frac{HX^2}{HD^2}$$ ،

حيث تكون النسبة:

$$\frac{HH'}{HX} = \frac{2r\sin(\alpha-\theta)}{r\sin(\alpha-\theta)-z} = 2\left(1+\frac{z}{r\sin(\alpha-\theta)-z}\right)$$

تناقصية بين D وَ Z، لأن z تتناقص في حين أنَّ: $r\sin(\alpha-\theta)-z = HX$ تتزايد.

وتكون، من جهة أخرى، النسبةُ :

$$\frac{HX}{HD} = \frac{\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\alpha} \qquad (5)$$

تناقصية عندما تنتقل X على DE من D إلى E؛ وهكذا تكون $\frac{HL^2}{HD^2}$ تناقصية أيضاً عندما تنتقل X على ZE من E إلى Z. وإذا كانت Z أبعد من E خارج الكرة، أي إذا كان: $2\alpha \leq \beta$، تكون هذه النتيجة كافية. وإن لم يكن كذلك، فإنَّ Y تكون على يسار Z لأن $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$، فيتمِّم كلٌّ من البرهانين البرهانَ الآخر؛ وتتناقص $\frac{HL}{HD}$ عندما تنتقل X على DE من D إلى E.

ملاحظات:

١) يقوم ابن الهيثم هنا بدراسة تغيُّر نسبة في حالة أكثر تعقيداً وإعداداً من الحالات السابقة.

وهو يقوم باستدلاله، كما بيَّنا أعلاه، بطريقة مختلفة في فُسْحَتَيْن لتغيُّر X : بين E وَO ، ثم بين D وَ O ، حيث تكون O وسط DE. ولنلاحظ أنَّ النقطة O ذات الإحداثية الأولى $r\cos\alpha$ $\cos\beta$ توجد دائماً بين Y وَ Z .

٢) تَرِدُ الزاويتان $\widehat{HDX} = \frac{\beta-\theta}{2}$ وَ $\widehat{HXD} = \alpha$ في العبارة (5)؛ الزاوية الأولى هي الزاوية المحاطة التي توتِّر القوس $\widehat{HE}$، والزاوية الثانية ثابتة. توصَّل ابن الهيثم إلى نفس العبارة للنسبة $\frac{HX}{HD}$ باستخدام تناسب جيوب الزوايا إلى الأضلاع المقابلة لها في المثلّث HDX.

٣) القضية ١١ تخصّ الحالة التي يكون فيها $\alpha = \frac{\pi}{2}$؛ وهذا ما يُبسِّط الحسابات لأنَّ $\sin\alpha = 1$ وَ $\cos\alpha = 0$، فتبقى $z = r\cos\beta$ ثابتة،

وَيكون: $HX = r(\cos\theta - \cos\beta)$. وتكون النقاط Y، O وَ Z ، في هذه الحالة، متطابقة.

٤) يَعتبر ابن الهيثم أنَّ $\frac{HL}{HX}$ مساوية لِـ $\frac{1}{\sin\widehat{HLX}}$؛ وهكذا يكون:

$$\frac{1}{\sin^2\widehat{HLX}} = \frac{HL^2}{HX^2} = \frac{HH'}{HX}.$$

ولكن $\widehat{HLX} = \frac{1}{2}\widehat{LQX}$ (زاوية محاطة في الدائرة HLH')؛ فلذلك يستنتج ابن الهيثم اتجاه تغيُّر $\frac{HH'}{HX}$ من اتجاه تغيُّر الزاوية $\widehat{LQX}$. ولكنَّ $\widehat{LXQ}$ زاوية قائمة، فيكون إذاً:

$$\frac{LX}{XQ} = \operatorname{tg}\widehat{LQX}.$$

تبقى العبارة $XQ = r\cos\beta$ ، في حالة القضية ١١، ثابتةً، فلذلك تتغيَّر الزاوية $\widehat{LQX}$ بنفس اتجاه تغيُّر LX. وتكون العبارة $z = XQ$ ، في الحالة العامة للقضية ١٢، تناقصيّة دائماً وتتزايد LX عندما تنتقل X بين D وَ O.

٥) إذا كانت Ω بين O وَ E ، أي إذا كان $\beta \leq \alpha$ ، يُميِّز ابن الهيثم بين الحالات التي تكون فيها X بين O وَ Ω وبين الحالات التي تكون فيها X بين Ω وَ E . ولقد سمحت لنا الرموز التحليلية بتجنُّب هذا التمييز، إذ إنَّ لدينا ببساطة $z > 0$، عندما تكون X بين Ω وَ E.

٦) لنحسب حَدَّيْ النسبة $\frac{HL}{HD}$ عندما تكون X بين D وَ E. يظهر، وفقاً للعبارة (4)، أنَّ $\frac{HL^2}{HD^2}$ تقترب من اللانهاية عندما تقترب X من D وتصبح θ عندئذ مساوية لِـ $(-\beta)$.

إذا كان $\beta \geq \alpha$ ، يكون معنا $\theta = \beta$ عندما تكون X في E فيكون إذاً $\frac{HL^2}{HD^2} = 0$ ؛ وإذا كان بعكس ذلك $\beta > \alpha$، يكون معنا:

$\theta = 2\alpha - \beta$ وَ $\frac{HL^2}{HD^2} = \frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha}$ ، أي $\frac{HL}{HD} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$ وهو حدٌّ منتهٍ.

٧) يُمكن أن ندرس أيضاً تغيُّر العبارة $\frac{HL^2}{HD^2}$ من خلال دراسة إشارة مُشتَقَّتها؛ يكفي لذلك أن ندرس إشارة بَسْط (صورة الكسر) مشتقَّة العبارة:

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}}{\sin\frac{\beta+\theta}{2}}.$$

و يساوي بَسْط هذه المشتقَّة :

$$-\cos(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\theta)\cos\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\theta)\sin\frac{\beta-\theta}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta)\cos\theta-\cos(\alpha-\theta)\cos\beta+\sin\beta\sin(\alpha-\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta\right)$$

وهكذا يجب أن ندرس إشارة العبارة: $\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$ التي لها المشتقَّة:

$$\sin(\alpha+\beta-\theta)-\sin(\alpha-\theta)\cos\theta+\cos(\alpha-\theta)\sin\theta=\sin(\alpha+\beta-\theta)+\sin(2\theta-\alpha) \qquad :(6)$$

$$=2\sin\frac{\beta+\theta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$$

ويكفي أن نُحدِّد إشارة $\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$، إذ إننا نعرف أنَّ $\sin\frac{\beta+\theta}{2}\geq 0$. نتحقَّق أنَّ: $0\leq\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\leq\frac{3\pi}{2}$ ، في جميع الحالات؛ لذلك فإنَّ $\cos\left(\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\right)$ يكون موجباً إذا كان: $\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}\leq\frac{\pi}{2}$، ويكون سالباً إذا كان: $\alpha+\frac{\beta-3\theta}{2}>\frac{\pi}{2}$. وهكذا تكون المشتقَّة (٦) موجبة إذا كان $\theta\geq\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، وسالبة في الحالة المعاكسة.

وإذا كان $\alpha+2\beta<\frac{\pi}{2}$، يكون معنا دائماً $\theta\geq-\beta>\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، لذلك فإنَّ:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

تتزايد دوماً إلى أن تصل إلى:

$\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$ ، إذا كان $\alpha>\beta$ ،

أو إلى $\cos(2\beta-\alpha)-\cos(\alpha-\beta)\cos(2\alpha-\beta)=-\sin(\beta-\alpha)(2\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha+\sin\beta)$

إذا كان $\alpha<\beta$؛

وتكون هذه العبارة في كلتا الحالتين سالبة، لذلك تبقى العبارة:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

دائماً سالبة.

وهكذا تتناقص $\frac{HL^2}{HD^2}$ في هذه الحالة.

إذا كان $\frac{\pi}{4}<\beta-\alpha$، يكون معنا: $\theta\leq 2\alpha-\beta<\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$ ، فلذلك تتناقص $\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$ باستمرار ابتداء من :

$$\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)<0 .$$

ونرى بذلك أنَّ $\frac{HL^2}{HD^2}$ تتناقص دوماً، في هذه الحالة أيضاً.

وإذا كان معنا أخيراً $\alpha\geq\beta-\frac{\pi}{4}$ وَ $\alpha\geq\frac{\pi}{2}-2\beta$ فإنَّ العبارة:

$$\cos(\alpha+\beta-\theta)-\cos(\alpha-\theta)\cos\theta$$

تمرُّ بحدٍّ أدنى في $\theta=\frac{2\alpha+\beta-\pi}{3}$. وتكون قيمتاها القُصوَيان :

$$\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\leq 0$$

وَ

$$\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\cos\beta=-\sin\beta\sin(\alpha-\beta)\leq 0$$

إذا كان $\alpha\geq\beta$ ، لأنَّ $\alpha-2\beta\geq-\alpha$ ، أو على التوالي:

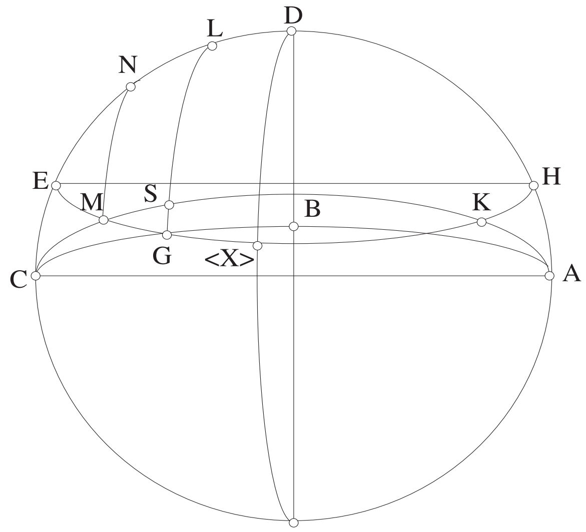
$$\cos(2\beta-\alpha)-\cos(\beta-\alpha)\cos(2\alpha-\beta)=-\sin(\beta-\alpha)(\sin\beta+\sin\alpha\cos(\beta-\alpha))\leq 0$$

إذا كان $\beta\geq\alpha$.

وهكذا تتناقص $\frac{HL^2}{HD^2}$، في جميع الحالات، عندما تنتقل X على DE من D إلى E.

القضية ١٣- لتكن (ABC) دائرة الأفق، وليكن D قطبها، ولتكن (ADC) دائرة نصف النهار ولتكن (HE) دائرة موازية للأفق. ولنأخذ دائرتين موازيتين لمعدّل النهار تقطعان دائرة

نصف النهار على N وَ L وتقطعان الدائرة (HE) على M وَ G. إذا كانت النقاط على دائرة نصف النهار وفقاً للترتيب C، E ، N ، L ، D ، فإنَّ القوس $\widehat{GL}$ تكون أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.



الشكل ٣٠

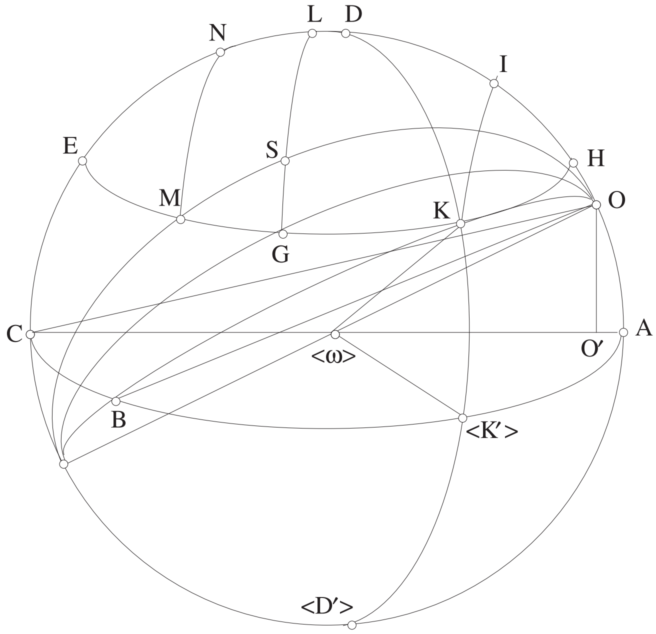
أ) لتكن الكرة منتصبة بالنسبة إلى الأفق. تمرّ دائرة معدّل النهار بالنقطة D وقطباها هما A وَ C. إنَّ مستوي دائرة معدّل النهار هو مستوي تناظرٍ لكل الدوائر ذات القطر AC وللدائرة الأفقية HGE التي يقطعها في X وسط القوس $\widehat{HE}$.

تقطع الدائرةُ (AMC) من جديد الدائرةَ (HGE)على النقطة K وتقطع القوس $\widehat{GL}$ على النقطة S بين G وَ L. القوس المفصولة على LG مشابهة للقوس $\widehat{MN}$. فتكون القوس $\widehat{MN}$ مشابهة إذاً للقوس $\widehat{LS}$ وبالتالي $\widehat{LG}$ هي أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.

ب) لتكن الدائرة مائلةً. ولتكن النقطة O قطبها الظاهر؛ يُمكن أن تكون O بين A وَ H، أو أن تكون O في H أو أن تكون O بين H وَ D.

١) لتكن O أوّلاً بين A وَ H. نُخرج من النقطة O دائرةً عظمى مُماسَّةً على النقطة K للدائرة (HGE) وقاطعةً للأفق على النقطة B. يكون معنا $OB < OC$. وذلك لأنَّ النقطة O توجَد على دائرة نصف النهار العمودية على الأفق، فيكون مسقطُها O' على مستوي الأفق تابعاً لـِ CA، ومسافة هذا المسقط إلى A أصغر من مسافته إلى C. فينتج عن ذلك أنَّ كل الخطوط BO' التي تصل O' إلى أية نقطة، B، على دائرة الأفق هي أقلّ طولاً من $O'C$ أو مساوية لـِ $O'C$؛ وكذلك هي حال OB وَ OC .

فيكون إذاً $\widehat{OKB} < \widehat{ODC}$ (وهذان القوسان هما من دائرتين عظميين).



الشكل ٣١

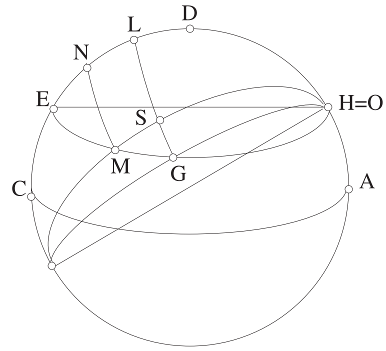
لنأخذ الدائرة العظمى (DK)؛ إنـّها عمودية على الدائرة (CBA) وعلى الدائرة (OKB)، فتكون النقطة B إذاً قطباً لها وتكون القوس $\widehat{BK}$ مساوية لربع دائرة عظمى. ولكن القوس $\widehat{CD}$ مساوية أيضاً لربع دائرة، فيكون إذاً $\widehat{OK} < \widehat{OD}$. ونُخرج من K قوساً من دائرة موازية لمعدّل النهار، ولتكن $\widehat{KI}$ هذه القوس. يكون معنا $\widehat{OI} = \widehat{OK}$، فتكون I إذاً بين D وَ H. تقطع الدائرتان (OM) وَ (GO) القوس $\widehat{KI}$ على نقطتين مختلفتين.

النقطة M هي بين G وَ E ؛ ومستوي الدائرة OM هو إذاً بين مستوي الدائرة العظمى GO وبين مستوي دائرة نصف النهار.

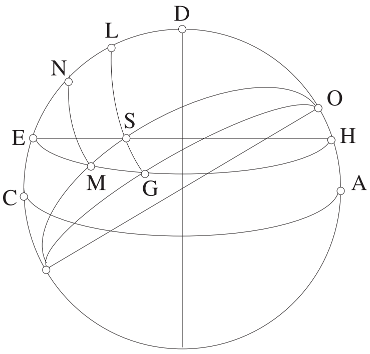
شرح:

يُمكن أن نعتبر هذه القضيّةَ مقدِّمةً، أيْ قضيّة تمهيدية. والنتيجة بديهية، وفقاً للتحديدات المعطاة في نصّ القضية حول النقاط C، E ، N ، L وَ D:

إنّ مستويَ الدائرة العظمى (OM)، إذا كانت النقطة O قطب دائرة معدّل النهار $(A = O$ أو $A \neq O)$، يكون في جميع الأحوال بين مستوي الدائرة العظمى (GO) ومستوي نصف النهار؛ والقوس $\widehat{MO}$ تقطع إذاً القوس $\widehat{LG}$ على النقطة S، والقوسان $\widehat{LS}$ وَ $\widehat{MN}$ متشابهتان؛ وبالتالي تكون $\widehat{LG}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{MN}$.



الشكل ٣٢



الشكل ٣٣

٢) القطب هو في النقطة H $(O = H)$،

٣) القطب O هو بين H وَ D.

تكون الدائرة (OM)، في الحالتين ٢) وَ ٣)، بين دائرة نصف النهار والدائرة (GO).

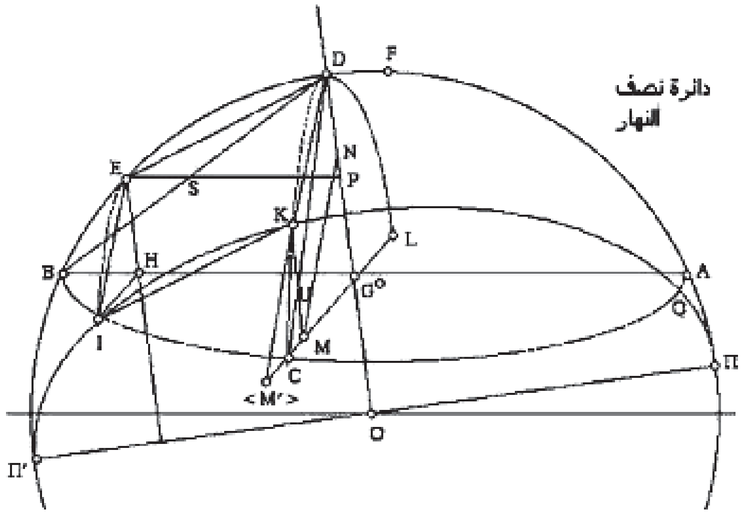
القضية ١٤- لتكن معنا دائرتان موازيتان لمعدِّل النهار تقطعهما دائرةُ نصف النهار على النقطتين D وَ E، وتقطعهما الدائرةُ CBA الموازية للأفق على النقطتين I وَ C، وتقطعهما دائرةٌ مارة بمحور العالم على النقطتين I وَ K.

فإذا كان $\overparen{BE} < \overparen{BD} \leq \frac{1}{2}\overparen{ADB}$ يكون معنا عندئذ $\frac{\overparen{CK}}{\overparen{KI}} > \frac{\overparen{CD}}{\overparen{DB}} > \frac{\overparen{IE}}{\overparen{EB}}$.

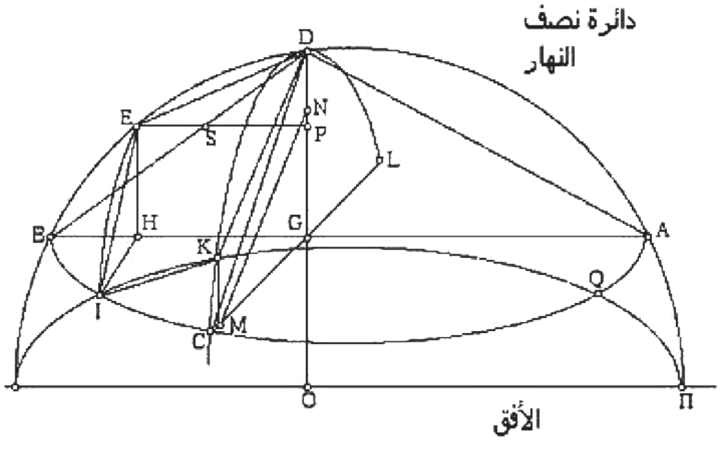
إذا افترضنا أنَّ المستوي CBA فوق الأفق وإذا سمّينا Π القطب الظاهر لدائرة معدّل النهار، يُمكن أن يكون Π على الأفق، أو بين الأفق والنقطة A، أو في النقطة A، أو بين A وسمت الرأس.

إنّ قسميْ الدائرتين IE وَ DC الواقعين فوق الأفق هما نِصفَا دائرة، وذلك في الحالة الخاصة التي تكون فيها CBA دائرة الأفق ويكون القطب Π في النقطة A (هذه هي حالة الكرة المنتصبة).

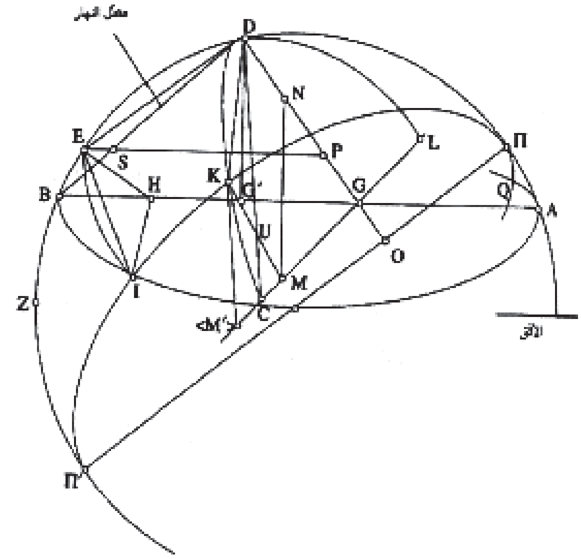
أ) الدائرة *EI* أصغر من الدائرة *CDL*.



الشكل ٣٤ : القطب الظاهر Π هو فوق الأفق، $\widehat{BD} \leq \frac{1}{2}\ \widehat{ADB}$. ويُفترض أنّ النقطة D هي على دائرة معدّل النهار أو أنّ D وَ E بين دائرة معدّل النهار والنقطة B. النقطة O، مركز الدائرة CKD، هي إمّا على الأفق وأمّا تحت الأفق. مركز الدائرة EI هو تحت الأفق.



الشكل ٣٥: الحالة الخاصة: الكرة المنتصبة. القطب Π هو على الأفق وَ $\widehat{BD} \leq \frac{1}{2}\ \widehat{ADB}$. مراكز كل الدوائر المتوازية هي إذاً على الأفق.



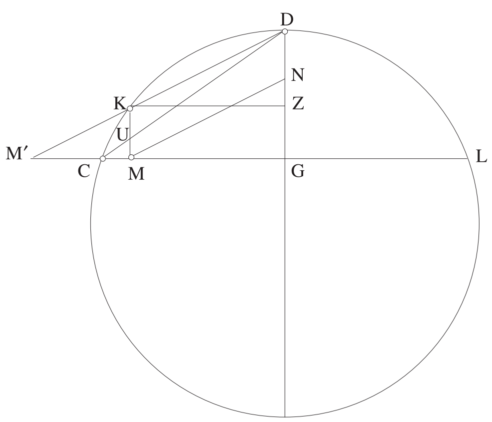
الشكل ٣٦: القطب Π هو فوق الأفق، $\widehat{BD} \le \frac{1}{2}\widehat{ADB}$. النقطتان D وَ E هما من جهتيْ معدّل النهار.

مركز الدائرة EI هو تحت الأفق. مركز الدائرة CKD هو فوق الأفق.

يكون معنا: $DG \perp CG$ وَ $EH \perp HI$. نُخرِج KM وَ MN بحيث يكون $CG \perp KM$ وَ $DK // MN$ ، فيكون معنا إذاً $DN = KM$ وَ $DK = MN$.

القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{KD}$ متشابهتان، ولكنّ الدائرة CDL أكبر من الدائرة EI ، فيكون إذاً $EI < DK$ وَ $EI < MN$. المثلثان EHI وَ NGM متشابهان، فيكون معنا إذاً $EH < NG$.

نُخرِج EP بحيث يكون $BG // EP$ ، فيكون معنا $EH = PG$ ؛ وتكون N إذاً بين P وَ D، وتكون P بين N وَ G. الخطّ DB يقطع EP على النقطة S ، فيكون معنا:



الشكل ٣٧

$\widehat{DSP} = \widehat{DBH} >$ زاوية قائمة. فتكون الزاوية $\widehat{DSE}$ إذاً منفرجة ويكون: $DE > DS$.

- إذا كانت الدائرةُ LDC دائرة معدّل النهار أو إذا كانت أقرب إلى القطب المختفي من دائرة معدّل النهار، تكون القوس $\widehat{CDL}$ أصغر من نصف دائرة.
- إذا كانت الدائرة CKD بين دائرة معدّل النهار والقطب الظاهر، فإنها تكون أقرب إلى دائرة معدّل النهار من الدائرة EI.

- إذا كانت الكرة منتصبة، فإنّ قسم الدائرة CDL الذي هو فوق الأفق يساوي نصف دائرة، فتكون القوس $\widehat{CDL}$، إذاً ، وبالأحرى القوس $\widehat{KDL}$، أصغر من نصف دائرة.
- إذا كانت الكرة مائلة، فإنَّ قسم الدائرة CDL، الذي هو فوق الأفق، يكون أكبر من نصف دائرة.

إذا رمزنا بـِ X إلى القوس، من الدائرة CKD، التي هي تحت المستوي CBA، فإنّ هذه القوس X أكبر من القوس المشابهة لـِ $2\widehat{EI}$؛ إنَّ هذه القوس، بالفعل، أكبر من قسم الدائرة CKD الذي هو تحت الأفق، وقسمُ الدائرة EI الذي هو فوق المستوي CBA، أصغر من قسم هذه الدائرة الذي هو فوق الأفق؛ فيكون معنا: $X > 2\widehat{DK}$. فنستنتج إذاً أنّ:

$$2\widehat{DK} + \widehat{CK} < X + \widehat{CK}$$

$$\widehat{DK} + \widehat{CD} < X + \widehat{CK}$$

ولكن $\widehat{CD} = \widehat{DL}$ فيكون: $\widehat{LK} < X + \widehat{CK}$. وهكذا تكون القوس $\widehat{LK}$ أصغر من نصف دائرة، لأنَّ $\widehat{LK} + \widehat{CK} + X$ تُشكِّل الدائرةَ بكاملها.

يكون معنا إذاً، في جميع الأحوال: $\widehat{KCL} <$ زاوية قائمة ، وهذا ما يجعل M بين C وَ G لأنَّ $KM \perp CG$. الخط CD يقطع KM على النقطة U. نُخرِج من النقطة K الخط KM' بحيث يكون $DC \parallel KM'$ ، فيكون معنا: $MM' > MC$، فيكون إذاً: $KM' > KC$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{KC}{KM} > \frac{KM'}{KM}$، فيكون: $\frac{KC}{KM} > \frac{CU}{UM}$ ؛ ولكن $\frac{CD}{DG} = \frac{CU}{UM}$ ، فيكون:

$$\frac{KC}{KM} > \frac{CD}{DG}. \qquad (\alpha)$$

يكون معنا من جهة أخرى: $DE > DS$ وَ $ND < PD$، فإذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{PD}{DS}$. ولكن:

$$\frac{DG}{DB} = \frac{PD}{DS} \text{ وَ } ND = MK \text{ ،}$$

فيكون إذاً:

$$(\beta) \qquad \frac{MK}{DE} > \frac{DG}{DB}.$$

نستنتج من (α) وَ(β) أنّ: $\frac{KC}{DE} > \frac{CD}{DB}$ ، أو بعد التبديل أيضاً:

$$\frac{DB}{DE} > \frac{CD}{CK} \text{ أو } \frac{DB}{KI} > \frac{CD}{CK} \qquad (\text{لأنَّ } KI = DE).$$

- إذا كانت الدائرة منتصبة، يكون معنا: $DG \perp AB$؛ ولكنَّ معنا وفقاً للفرضيات: $\overset{\frown}{BD} \geq \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$ ؛ فيكون بالتالي $AG \geq GB$ ، فإذاً $AG \geq \frac{1}{2}AB$. ولكن $GC \leq \frac{1}{2}AB$، فيكون إذاً: $AG \geq GC$، ومن ذلك: $AD \geq DC$؛ فنستنتج أنَّ $\widehat{DCG} \geq \widehat{DAG}$ ، فتكون $\overset{\frown}{BD}$ أصغر من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{DL}$ أو مساوية لها. ولكن $\overset{\frown}{DL} = \overset{\frown}{DKC}$ ، فتكون القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{DKC}$ مساوية للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو أعظم منها.
- إذا كانت الكرة مائلة، وإذا كان $DG' \perp AB$ ، تكون G' بين G وَ B، ويكون: $\frac{1}{2}AB \geq G'A$:

- إذا كان $\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$ ، يكون $G'A = \frac{1}{2}AB$ وَ $GA > \frac{1}{2}AB$ ، فيكون إذاً $\frac{1}{2}AB > GC$ وَ $GD > DG'$. ولكن معنا:

$$\widehat{DCG} \text{ tg} = \frac{DG}{GC} \text{ و } \widehat{DAB} \text{ tg} = \frac{G'D}{G'A}\text{،}$$

فنستنتج أن: $\widehat{DAB} > \widehat{DCG}$ ،

فتكون القوس $\overset{\frown}{DL}$ أعظم من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها، وتكون القوس $\overset{\frown}{DKC}$ أكبر من القوس المشابهة للقوس $\overset{\frown}{BD}$ أو مساوية لها.

- إذا كان $\widehat{BD} < \frac{1}{2}\widehat{ADB}$ ، يكون $G'A > \frac{1}{2}AB$؛ ولكن $GC \leq \frac{1}{2}AB$، فيكون إذاً $AG' > GC$ وَ $DG' < GD$ ، فيكون معنا أيضاً: $\widehat{DAB} < \widehat{DCG}$، فنستنتج أنَّ القوس $\widehat{DKC}$ أعظم من القوس المشابهة للقوس $\widehat{BD}$ أو مساوية لها.

وهكذا تكون القوس $\widehat{DKC}$ ، في جميع الحالات، أكبر من القوس المشابهة للقوس $\widehat{BD}$ أو مساوية لها.

لقد برهنّا أنَّ $\frac{BD}{DE} > \frac{CD}{CK}$ ؛ فيكون معنا إذاً وفقاً للقضية ٤ (الخاصة بدائرتين مختلفتين):

$$\frac{\widehat{BED}}{\widehat{DE}} > \frac{\widehat{CKD}}{\widehat{CK}}.$$

فإذا بدّلنا يكون معنا: $\frac{\widehat{CKD}}{\widehat{BED}} > \frac{\widehat{CK}}{\widehat{DE}} = \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$.

فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{\widehat{CKD}-\widehat{CK}}{\widehat{BED}-\widehat{DE}} = \frac{\widehat{KD}}{\widehat{EB}} > \frac{\widehat{CKD}}{\widehat{BED}} > \frac{\widehat{CK}}{\widehat{DE}}$ ؛[٩]

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ القوس $\widehat{KD}$ مشابهة للقوس $\widehat{EI}$ وأنَّ $\widehat{KI} = \widehat{DE}$، يكون معنا:

$$\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} < \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} < \frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}}.$$

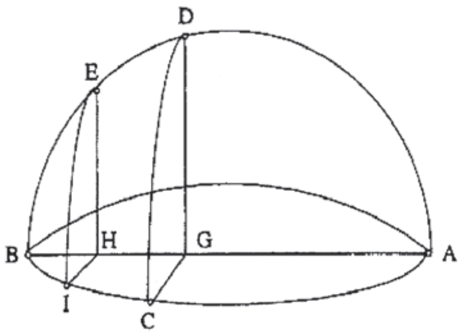
لقد استبدل ابن الهيثم، هنا، القوس $\widehat{KD}$ بالقوس $\widehat{EI}$ المشابهة لها؛ ولكن معنا، في الحالة المعنية، $\widehat{KD} > \widehat{EI}$، لأننا افترضنا أنَّ نصفَ قطر الدائرة CKD أكبر من نصف قطر الدائرة EI. لكنَّ القوسين $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{KD}$ موتَّرتان بنفس الزاوية في دائرتين مختلفتين، فيُمكن الظن أنَّ ابن الهيثم كان يفكّر عند إقامة برهانه في الزوايا، في حين أنّه صاغ برهانه معبِّراً بالأقواس ؛ وهذا ما أدّى إلى الالتباس. وهكذا لا يُمكن الحصول على النتيجة المرجوّة بهذه الطريقة.

تبقى لدينا المتباينة $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} < \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}$.

يلفت ابن الهيثم النظر إلى أنّ البرهانَ نفسَه صالحٌ إذا كانت الدائرةُ ABC دائرةَ الأفق.

---

[٩] $b(a-c) > a(b-d) \Leftrightarrow ab-bc > ab-ad \Leftrightarrow bc < ad \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$، فإذاً $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ ؛ فإذاً $a > c$ وَ $b > d \Leftarrow$ $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-d}$.



الشكل ٣٨

القطبان هما النقطتان A وَ B، في الحالة الخاصة التي تكون فيها الكرة منتصبة.

لنأخذ دائرةً اختيارية، تمرّ بالنقطتين A وَ B، وتقطع دائرتين موازيتين لدائرة معدّل النهار ولا تقطع الدائرة CBA. وهذه الأخيرة تمرّ بالنقطتين I وَ C، فتكون النقطة K ملتصقة بالنقطة C. القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{DC}$ متشابهتان، ولدينا وفقاً للفرضيات $\widehat{EB} < \widehat{DB}$؛ فيكون معنا إذاً:

$$\frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}} < \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}\text{ ،}$$

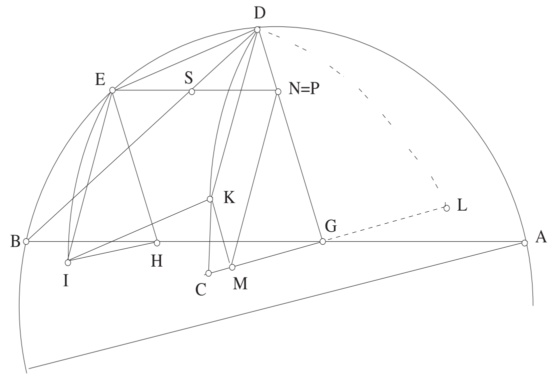
وذلك لأنَّ:

$$\frac{\widehat{EI}}{\widehat{CD}} = \frac{EH}{DG} = \frac{\sin\widehat{BE}}{\sin\widehat{BD}} < \frac{\widehat{BE}}{\widehat{BD}}.$$

ب) **لنفرض أنَّ الدائرة (EI) مساوية للدائرة (DC)** .

تكون هاتان الدائرتان متناظرتين بالنسبة إلى مستوي دائرة معدّل النهار.

إذا رمزنا، كما فعلنا سابقاً، بِـ X إلى قوس الدائرة (DC) التي هي تحت المستوي ABC، يكون معنا: X أكبر من القوس المشابهة لِـ $2\widehat{EI}$ ، فيكون إذاً: $X > 2\widehat{DK}$، سواء أكانت الكرة منتصبة أم مائلة. يكون معنا إذاً: $X + \widehat{CK} > \widehat{LK}$ ؛ وبالتالي تكون $\widehat{KCG}$ أصغر من زاوية قائمة، وتكون M بين C وَ G .



الشكل ٣٩

القوسان $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{DK}$ متساويتان، فيكون إذاً: $DK = EI$ وَ $DK \parallel EI$؛ ويكون معنا أيضاً: $MN = EI$ وَ $MN \parallel EI$. ونستنتج من ذلك أنّ: $GN = EH$. الخط الموازي لِـ AB، الخارج من E، يمرّ إذاً بالنقطة N ويكون $P = N$ وَ $KM = PD$.

يكون معنا: $DS < DE$، لأنّ الزاوية $\widehat{DSE}$ منفرجة، فإذاً: $\frac{PD}{DE} > \frac{PD}{DS}$؛ ولكنَّ $\frac{DG}{DB} = \frac{PD}{DS}$، $\frac{PD}{DE} = \frac{KM}{KI}$ (لأنَّ $DE = KI$)؛ فيكون إذاً: $\frac{KM}{KI} > \frac{DG}{DB}$.

ولكن، من جهة أخرى، $\frac{CD}{DG} > \frac{CK}{KM}$ ($\widehat{DCG} < \widehat{KCM}$)، فيكون إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

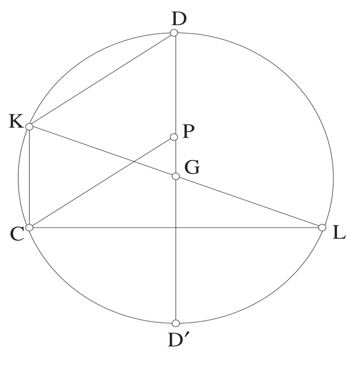
ننهي البرهان كما فعلنا سابقاً، ويكون معنا: $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} > \frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}}$.

درس ابن الهيثم الحالتين الخاصتين التاليتين:

- إذا كانت الدائرة (CBA) أفقاً، وإذا كانت الكرة مائلةً، يكون معنا:

$\widehat{KD} = \widehat{EI} = \widehat{CD'}$ ،

حيث تكون D' النقطة المقابلة قطرياً للنقطة D على الدائرة CDL، فيكون:



الشكل ٤٠

$DD' // KC$ وتكون الزاوية $\widehat{KCL}$ قائمة؛ وبما أنّ في النص: $\overset{\frown}{LDK} = \overset{\frown}{LD'C} + \overset{\frown}{CK}$ ،
يكون معنا عندئذ $M = C$ ، فيكون $PD = KC$ وَ $\frac{PD}{DE} = \frac{PD}{KI} = \frac{KC}{KI}$.

ولكنَّ $\frac{CD}{DB} < \frac{DG}{DB} < \frac{PD}{DE}$، فإذاً: $\frac{KC}{KI} > \frac{CD}{DB}$ ، وننهي البرهان كما فعلنا سابقاً.

- إذا كانت الدائرة (CBA) أفقاً، وإذا كانت الكرة منتصبةً، يكون معنا:

$\overset{\frown}{IE} = \overset{\frown}{DC}$ وَ $\overset{\frown}{DB} > \overset{\frown}{EB}$ ، فإذاً: $\frac{\overset{\frown}{IE}}{\overset{\frown}{EB}} < \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}}$.

تمرّ الدائرة $\Pi I \Pi'$، في هذه الحالة، بالنقطة C $(C = K)$.

ت) **لنفترض أنّ الدائرة (EI) أكبر من الدائرة (DC)** وأنّ الكرة مائلة باتجاه النقطة B.
وهذا ممكن في ثلاث حالات:

* الدائرة (EI) هي دائرة معدّل النهار.

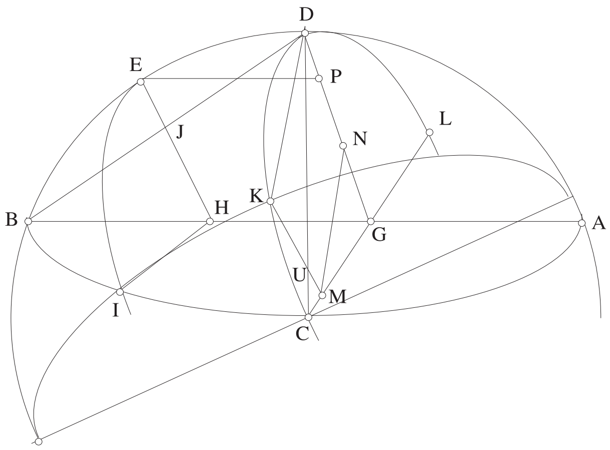
* الدائرتان هما على جهتي دائرة معدّل النهار وتكون (EI) أقرب إلى دائرة معدّل النهار من (CD).

* الدائرتان هما بين دائرة معدّل النهار والقطب الظاهر.

لنفترض أنَّ : $\overset{\frown}{BD} \geq \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$.

الخط BD يقطع EH على النقطة J ؛ ونفترض أنَّ $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{EH}{HJ}$ ، حيث يكون d_1 وَ d_2 على التوالي قطري الدائرتين (EI) وَ (DH)، مع $d_2 < d_1$.

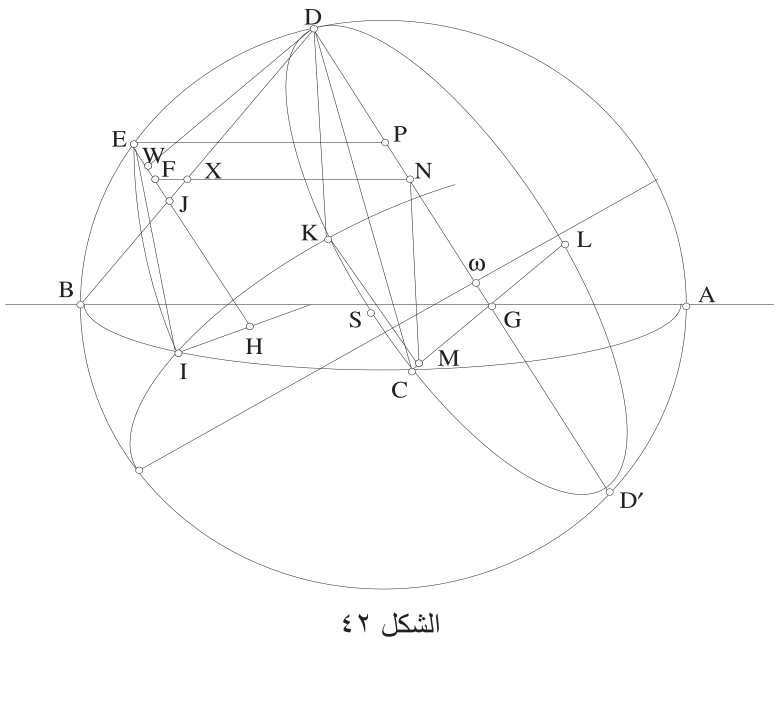
* إذا كانت القوس $\overset{\frown}{LDC}$ أصغر من نصف دائرة، تكون القوس $\overset{\frown}{LDK}$ أصغر من نصف دائرة، ونحصل على النتيجة $\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}} > \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{BD}} > \frac{\overset{\frown}{EI}}{\overset{\frown}{EB}}$.



الشكل ٤١

نكون، في الواقع، من جديد ضمن شروط الحالة التي درسناها على الصفحة ١٠٦ حيث تكون الزاوية $\widehat{KCL}$ حادة وتكون M بين C وَ G وتكون U بين K وَ M ؛ يكون معنا: $\frac{CK}{KM} > \frac{CU}{UM}$، مع $\frac{CU}{UM} = \frac{CD}{DG}$ وَ $ND = KM$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{CK}{ND} = \frac{CK}{KM} > \frac{CD}{DG}$.

* إذا كانت القوس $\widehat{LDC}$ أكبر من نصف دائرة، وإذا رمزنا بـِ X إلى قسم هذه الدائرة الذي هو تحت ABC، حيث يكون X أصغر من نصف دائرة، وإذا أخرجنا CS بحيث يكون $DG//CS$، يكون معنا: $\frac{1}{2}X = \widehat{DS}$ (وهذه القوس متناظرة مع نصف القوس X بالنسبة إلى مركز الدائرة CDL).



الشكل ٤٢

لنفترض أنَّ: $\overset{\frown}{IE} \geq$ (قوس مشابهة للقوس X)، أي أنَّ: $\overset{\frown}{IE} \geq$ (قوس مشابهة للقوس $2\overset{\frown}{DS}$)[١٠].

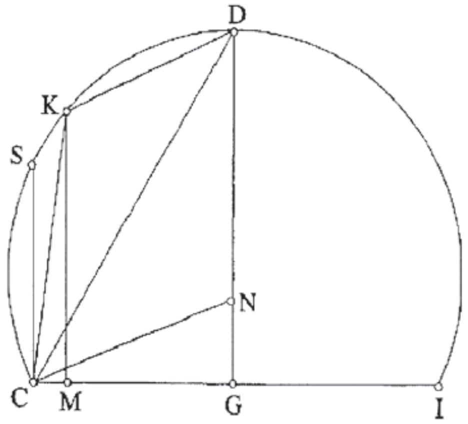
ولكن $\overset{\frown}{IE}$ وَ $\overset{\frown}{DK}$ قوسان متشابهتان. نفترض إذاً أنَّ $2\overset{\frown}{DS} \leq \overset{\frown}{DK}$. يكون لدينا ثلاث حالات ممكنة:

(أ) $\overset{\frown}{IE} >$ (قوس مشابهة للقوس $\overset{\frown}{DS}$) <= $\overset{\frown}{DK} < \overset{\frown}{DS}$

(ب) $\overset{\frown}{IE} =$ (قوس مشابهة للقوس $\overset{\frown}{DS}$) <= $\overset{\frown}{DS} = \overset{\frown}{DK}$

(ت) $\overset{\frown}{IE} <$ (قوس مشابهة للقوس $\overset{\frown}{DS}$) <= $\overset{\frown}{DS} < \overset{\frown}{DK}$

(أ) $\overset{\frown}{DS} > \overset{\frown}{DK}$، تكون K إذاً بين D وَ S لأنَّ الزاوية $\widehat{KCG}$ حادة وتكون النقطة (ب)



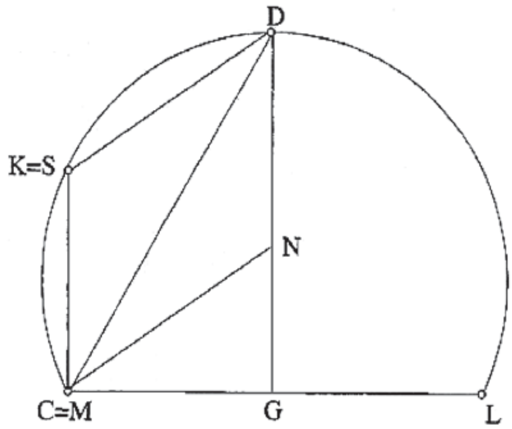
الشكل ٤٣

M بين G وَ C. يكون معنا: $\frac{CD}{DG} > \frac{CK}{KM}$ وَ $KM = ND$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{CD}{DG} > \frac{CK}{ND}$.

(ت) $\overset{\frown}{DS} = \overset{\frown}{DK}$ ، فيكون $S = K$ ، $C = M$ ، $ND = KM = CK$ ،

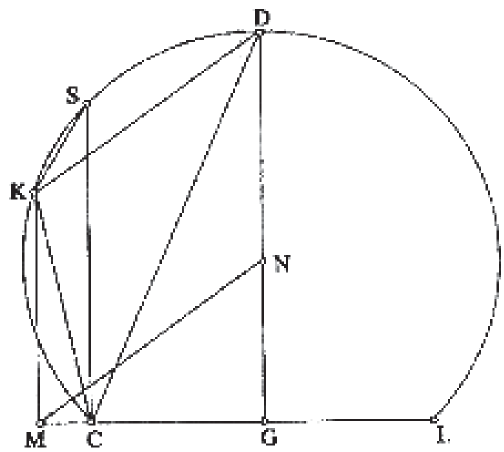
$1 = \frac{CK}{ND} = \frac{CK}{KM}$ ، $\frac{CD}{DG} > \frac{CK}{KM}$ أو $\frac{CD}{DG} > \frac{CK}{ND}$.

[١٠] انظر التعليق الإضافي [٤]



الشكل ٤٤

(ت) $\widehat{DS} < \widehat{DK}$، فتكون K بين C وَ S. ولكن $\widehat{EI}$ مشابهة للقوس $\widehat{DK}$ التي تحقق $2\,\widehat{DS} \geq \widehat{DK}$، فيكون إذاً: $\widehat{SK} \leq \widehat{DS}$، $\widehat{SCK} \leq \widehat{SCD}$، فنستنتج أنَّ: $\widehat{SCK} \leq \widehat{CDG}$.



الشكل ٤٥

نُخرِج KM، بحيث يكون $CG \perp KM$، فتكون M أبعد من C؛ فيكون معنا: $MG > CG$ وَ $KM < GD$. نُخرِج MN بحيث يكون $KD \,//\, MN$، فيكون معنا:

$KM = ND$، وَ $\widehat{MKC} = \widehat{KCS} \leq \widehat{CDG}$.

إذا كان: $\widehat{KCS} = \widehat{CDG}$، يكون عندئذ $\dfrac{CK}{KM} = \dfrac{CD}{DG}$.

إذا كان: $\widehat{KCS} < \widehat{CDG}$ = يكون عندئذ $\dfrac{CK}{KM} < \dfrac{CD}{DG}$.

يكون معنا إذاً : $\frac{CD}{DG} \geq \frac{CK}{ND}$.

وتكون النتيجة في الحالات الثلاث (أ)، (ب) وَ (ت) أنّ: $CK = ND$ أو $\frac{CD}{DG} \geq \frac{CK}{ND}$.

القوسان $\overset{\frown}{DK}$ وَ $\overset{\frown}{EI}$ متشابهتان والدائرة EI هي أكبر من الدائرة DK ، فيكون إذاً: $DK < EI$ وَ $\frac{EI}{DK} = \frac{d_1}{d_2}$.

يكون معنا: $DK = MN$ وبالتالي $MN < EI$. والمثلثان MNG وَ EIH متشابهان، فيكون إذاً: $NG < EH$.

إنّ لدينا من جهة أخرى $AB // EP$ ، فنستنتج أنّ $PG = EH$ ، فيكون معنا إذاً $NG < PG$ وبالتالي $PD < ND$.

ولكنَّ $\frac{EI}{DK} = \frac{EI}{MN} = \frac{EH}{NG} = \frac{d_1}{d_2}$؛ وبما أنَّ $\frac{EH}{HJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$ وفقاً للفرضيات، يكون إذاً: $\frac{EH}{HJ} \geq \frac{EH}{NG}$، فنستنتج أنَّ: $HJ \leq NG$.

١) إذا كان $HJ = NG$ ، يكون عندئذ $NJ // GH$ وَ $\frac{ND}{DJ} = \frac{DG}{DB}$.

ويكون في هذه الحالة: $\frac{EH}{HJ} = \frac{d_1}{d_2}$، فنستنتج أنّ: $\frac{EH}{EJ} = \frac{d_1}{d_1 - d_2}$.

٢) إذا كان $NG > HJ$ نُخرِج NF بحيث يكون $GH // NF$، فيكون معنا: $HJ < HF = NG$ ؛ والخط NF يقطع DJ على X بين J وَ D . يكون معنا:

$\frac{ND}{DX} = \frac{GD}{DB}$ وَ $\frac{EH}{HF} = \frac{d_1}{d_2}$ وَ $\frac{EH}{EF} = \frac{d_1}{d_1 - d_2}$.

نُخرِج DW بحيث يكون $DW \perp EH$، فيكون عندئذ: $2EW = d_1 - d_2$ (لأنَّ DW موازٍ لخط القطبين، أي لمحور الدائرتين EI وَ DC).

يكون معنا، في الحالة ١)، $2EW > EJ$ (لأنَّ $d_1 > EH$).

* إذا كان $\frac{1}{2} d_1 = EH$ ، يكون عندئذ $EW = EJ$ ، $W = J$ ، فيكون معنا إذاً: $DJ \perp EH$ ،

فإذاً: $DJ < DE$.

* إذا كان $\frac{1}{2}d_1 > EH$ ، يكون عندئذ $EW > EJ$ ، فتكون الزاوية $\widehat{DJE}$ منفرجة، ويكون معنا أيضاً: $DE > DJ$.

* إذا كان: $\frac{1}{2}d_1 < EH$ ، يكون عندئذ $EW < EJ$ ، فتكون الزاوية $\widehat{DJE}$ حادة، ولكن $2\ EW > EJ$ ، فيكون إذاً: $WE > WJ$ وَ $DE > DJ$. وهكذا يكون معنا في جميع الحالات: $DE > DJ$.

يكون معنا إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{ND}{DJ}$ ؛ ولكن: $\frac{DG}{DB} = \frac{ND}{DJ}$ ، فيكون إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{GD}{DB}$.

يكون معنا، في الحالة ٢): $d_1 > EH$ ، فينتج عن ذلك أنّ: $2EW > EF$ ، فتظهر لـِ: EF ثلاثة خيارات (كما كان لـِ EJ ، في الحالة ١)):

$EW = EF$ ، $EW > EF$ ، $EW < EF < 2EW$.

ونبيِّن في الحالات الثلاث أنَّ: $DF < DE$ ؛ ولكنَّ الزاوية $\widehat{DXF}$ منفرجة، فيكون: $DX < DF$ ، ويكون معنا إذاً: $DX < DE$ ، وبالتالي: $\frac{ND}{DE} > \frac{ND}{DX}$. ولكن: $\frac{GD}{DB} = \frac{ND}{DX}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{ND}{DE} > \frac{GD}{DB}$.

لقد بيّنّا إذاً، في الحالة (ت)، أنّه إذا كان $d_2 < d_1$ و $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{EH}{HJ}$ ، يكون عندئذ:

$CK = ND$ أو $\frac{CD}{DG} \leq \frac{CK}{ND}$ وَ $\frac{GD}{DB} < \frac{ND}{DE}$.

ولكن $KI = DE$ ، فيكون إذاً:

* إذا كان: $CK = ND$، يكون معنا: $\frac{CK}{KI} = \frac{ND}{DE}$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{CK}{KI} > \frac{GD}{DB}$، وبما أنَّ $CD > DG$، يكون معنا إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

* إذا كان: $\frac{CD}{DG} \leq \frac{CK}{ND}$ وَ $\frac{GD}{DB} < \frac{ND}{DE}$، يكون عندئذ: $\frac{CD}{DB} < \frac{CK}{DE}$، ويكون إذاً: $\frac{CK}{KI} > \frac{CD}{DB}$.

وهكذا نحصل، في جميع الحالات، على: $\frac{DB}{DE} > \frac{CD}{CK}$ ، فنستنتج من ذلك أنَّ:

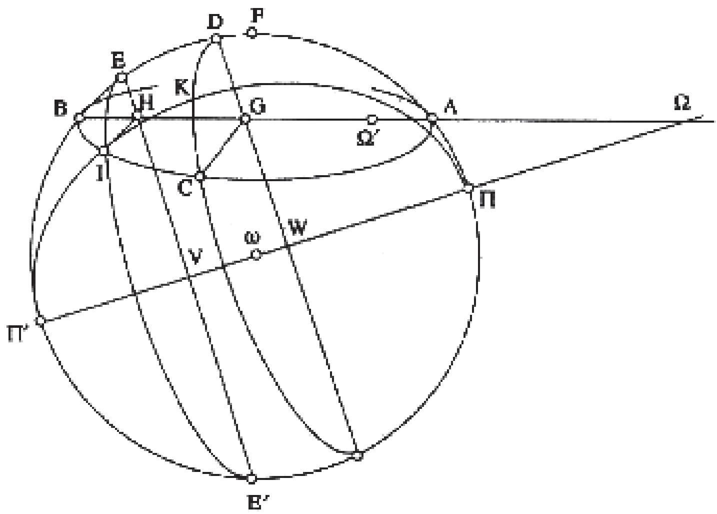
$\frac{\widehat{CD}}{\widehat{CK}} > \frac{\widehat{DB}}{\widehat{DE}}$ أو $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{DE}} < \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}$ ؛ ولكن $\widehat{KI} = \widehat{DE}$ ، فنحصل على: $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} < \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$ ؛ فنستنتج أنّ:

$\frac{\widehat{CD}-\widehat{CK}}{\widehat{BD}-\widehat{DE}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}}$ [11]، أي أنّ: $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} < \frac{\widehat{KD}}{\widehat{EB}}$ ؛ ولكنّ: $\widehat{EI} > \widehat{KD}$ ، فنستنتج أنّ: $\frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}} > \frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} > \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$.

شرح:

يدرس ابن الهيثم أيضاً، في هذه القضية، تغيُّرَ نسبةٍ في حالة مُعقَّدة. يتعلَّق الأمر بإثبات ما يلي:

١) إنَّ النسبة $\frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}}$ تتناقص عندما تنتقل E من B نحو F على دائرة نصف النهار AEB (F هي وسط القوس $\widehat{BA}$)؛



الشكل ٤٦

٢) إنَّ $\frac{\widehat{CD}}{\widehat{BD}} \le \frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$، حيث تكون K نقطةَ تقاطع الدائرة DKC (الموازية مثل EI لدائرة معدّل النهار) مع دائرة نصف النهار ΠKI التي تمرّ بالنقطة I (الشكل ٤٦).

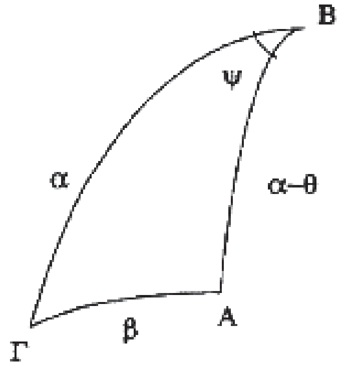
لنضع $\psi = \widehat{EVI}$ وَ $\theta = \widehat{E\omega F}$ (θ محسوبة بالاتجاه المعاكس للزاويتين α وَ β)، فيكون معنا: $\alpha - \theta = \widehat{\Pi\omega E}$ ، فنستنتج أنَّ:

$$\cos\psi = \frac{\overline{VH}}{\overline{EV}} = \frac{z}{r\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} \qquad (1)$$

[11] انظر الحاشية ٩ أعلاه.

حيث تكون z الإحداثية الثالثة للنقطة H (α هي الزاوية المتمّمة لعرضF، وَ $\widehat{A\omega F} = \beta$، انظر شرح القضيتين ١١ وَ ١٢).

إذا كان : $\alpha = \frac{\pi}{2}$، يكون $\cos\psi = \frac{\cos\beta}{\cos\theta}$؛ وإذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون: $\cos\psi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha-\theta)}$



الشكل ٤٧

يكون معنا: $-\beta \le \theta \le \operatorname{Inf}(2\alpha-\beta ،\beta)$ [١٢]، أي أنّ $|\alpha-\beta| \le \alpha-\theta \le \alpha+\beta$، فلذلك يوجَد، على الكرة ذات نصف القطر ١، مُثلَّثٌ ذو الأضلاع α، β وَ $(\alpha\text{-}\theta)$؛ والمعادلة (1) تعني أنّ ψ هي الزاوية المقابلة للضلع β في هذا المثلث $AB\Gamma$ (انظر الشكل ٤٧).

ويكون معنا، بما أنَّ $\widehat{EI} = r\,\psi \sin(\alpha-\theta)$ وَ $r(\beta+\theta) = \widehat{EB}$:

$$\xi = \frac{\psi}{\beta+\theta}\sin(\alpha-\theta) = \frac{\widehat{EI}}{\widehat{EB}} . \qquad (2)$$

ويكون معنا أيضاً من جهة أخرى، إذا كان $\widehat{DWC} = \Psi$ وَ $\widehat{D\omega F} = \Theta$،

$\widehat{DC} = r\,\Psi \sin(\alpha-\Theta)$ ، $\widehat{DK} = r\,\psi \sin(\alpha-\Theta)$

فنحصل على:

$\widehat{CK} = r(\Psi-\psi)\sin(\alpha-\Theta)$ ؛ $\widehat{KI} = \widehat{DE} = r(\Theta-\theta)$ ،

[١٢] تدلُّ Inf على أصغر العددين الموجودين بين القوسين. (المُترجِم)

بحيث يكون:

$$\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}}=\frac{\Psi-\psi}{\Theta-\theta}\sin(\alpha-\Theta) \quad \text{وَ} \quad \frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}}=\frac{\Psi}{\beta+\Theta}\sin(\alpha-\Theta).$$

وهكذا تُكتب المتباينة $\frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}}\geq\frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}}$ ، الخاصة بالحالة ٢)، على الشكل التالي:

$\frac{\Psi-\psi}{\Theta-\theta}\geq\frac{\Psi}{\beta+\Theta}$، وهذا ما يعادل: $\frac{\psi}{\beta+\theta}\leq\frac{\Psi}{\beta+\Theta}$، لأنَّ $\frac{a-c}{b-d}\geq\frac{a}{b}$ تُكتب على الشكل التالي:

$$ab-ad\geq ab-bc،$$

أيْ أنّ $bc\geq ad$ أو $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$.

وإذا وضعنا:

$$\eta=\frac{\psi}{\beta+\theta}، \qquad (3)$$

حيث تـُعرَّف ψ بالمعادلة (1)، نجد أنّ المتباينة الواردة في الحالة ٢) تعني أنَّ η دالة تناقصية للمتغيِّر θ.

ملاحظتان:

1) تناول ابن الهيثم نِسَباً بين أقواس دوائر(ذات أنصاف أقطار مختلفة) بدلاً من النسب بين الزوايا. ولذلك لم يكن بإمكانه عرض النتيجة ٢) على شكل تناقصيَّة الدالة η. وإذا استخدمنا رموز ابن الهيثم، تـُؤدّي التحويلة المستخدَمة إلى:

$$\frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DB}}\leq\frac{\overset{\frown}{DK}}{\overset{\frown}{BE}}.$$

2) يكون معنا $\xi=\eta\sin(\alpha-\theta)$ ؛ وإذا كان $\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$ ، فإنّ $\sin(\alpha-\theta)$ دالـّة تناقصية للمتغيِّر θ، فتكون ١) ناتجة من ٢). وإذا كان، بعكس ذلك، $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$، فإنَّ $\sin(\alpha-\theta)$ تتزايد في الفسحة: $-\beta\leq\theta\leq\alpha-\frac{\pi}{2}$ ، ثم تتناقص في الفسحة التالية:

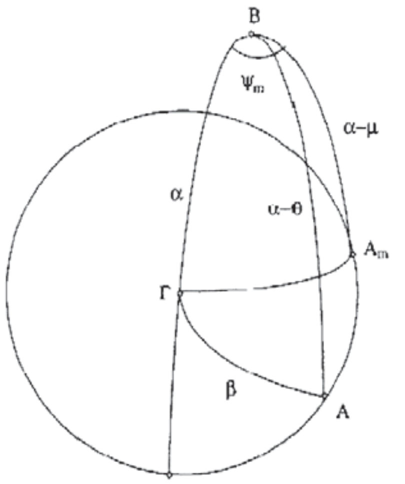
$$\alpha-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq Inf(\beta,2\alpha-\beta).$$

وهكذا تكون ٢) ناتجة من ١) في الفسحة الأولى وتكون ١) ناتجة من ٢) في الفسحة الثانية.

القسم الأول: دراسة الزاوية ψ

لنُثَبِّت القوس $\alpha = \widehat{B\Gamma}$ على الكرة ذات نصف القطر ١؛ الرأس الثالث A للمثلث $AB\Gamma$ هو نقطة تقاطع الدائرة ذات المركز Γ ونصف القطر β، مع الدائرة ذات المركز B ونصف القطر $(\alpha - \theta)$ الذي يتغيَّر في الفسحة $[|\alpha - \beta|, \alpha + \beta]$. يجب التمييز بين حالتين وفقاً للمتباينة $\alpha \geq \beta$ أو للمتباينة $\alpha < \beta$ ؛ في الحالة الأولى، B هي خارج الدائرة γ ذات المركز Γ ونصف القطر β (وتكون B على هذه الدائرة إذا كان $\alpha = \beta$) بينما تكون في الحالة الثانية داخل هذه الدائرة.

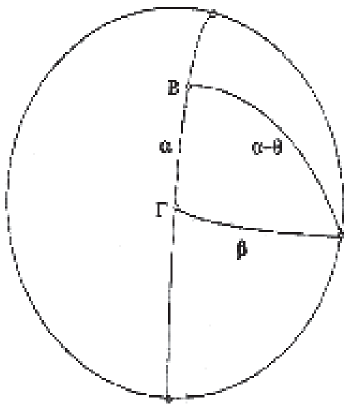
١) الحالة $\alpha \geq \beta$: توجد دائرة عظمى مارة بالنقطة B ومماسَّة للدائرة γ على نقطة A_m.
وعندما تتزايد θ من ($-\beta$) إلى β، تتناقص $(\alpha - \theta)$ من $\alpha + \beta$ إلى $\alpha - \beta$، وتتزايد الزاوية $\psi = \widehat{\Gamma BA}$ من 0 إلى $\widehat{\Gamma BA_m} = \psi_m$ (بين 0 وَ $\frac{\pi}{2}$)، ثم تتناقص من ψ_m إلى 0.
ويكون لدينا، بما أنَّ $\widehat{BA_m\Gamma} = \frac{\pi}{2}$، وباستخدام حساب المثلثات الكروية: $\frac{\sin\psi_m}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}$، أي أنّ $\sin\psi_m = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (انظر الشكل ٤٨) وتبلغ ψ هذه القيمة عندما يكون $\cos(\alpha-\theta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos\mu$ ، أيْ عندما يكون: $\alpha - \mu = \theta$ $(0 \leq \mu < \alpha)$. إذا كان $\alpha = \beta$، يكون $\mu = 0$ وَ $\psi_m = \frac{\pi}{2}$ ؛ ويكون معنا، في الحالات الأخرى، $\alpha - \mu < \beta$ وَ $\psi_m < \frac{\pi}{2}$.



الشكل ٤٨

توجد قيمتان ممكنتان $\theta_+(\psi)$ وَ $\theta_-(\psi)$ لكل قيمة معلومة للمتغيّر $\psi \in [0, \psi_m[$، بحيث يكون: $\theta_-(\psi) < \alpha - \mu < \theta_+(\psi)$.

٢) الحالة $\beta > \alpha$. إنَّ $\alpha - \theta$ تتناقص من $\beta + \alpha$ إلى $\alpha - \beta$ وَ ψ تتزايد من 0 إلى π ، عندما تتزايد θ من $(-\beta)$ إلى $(2\alpha-\beta)$. ولكل قيمة معلومة للمتغيِّر $\psi \in [0, \pi]$، توجد قيمة واحدة ممكنة $\theta_-(\psi) \in [-\beta ، 2\alpha-\beta]$ ، لأنَّ $0 \leq \alpha - \theta$ (انظر الشكل ٤٩).



الشكل ٤٩

ملاحظتان:

١- الإحداثية الأولى، للنقطة Ω، المحسوبة على طول الخط BA ابتداء من منتصفه هي: $r \cos \beta \operatorname{tg} \alpha$، وهي أكبر من $r \sin \alpha = \frac{1}{2} BA$ في الحالة الأولى $(\alpha \geq \beta)$، وهذا يعني أنَّ Ω خارج الكرة. الإحداثية الأولى للنقطة H :

$$\frac{r}{\sin\alpha}\left(\cos(\alpha-\theta)-\cos\alpha\cos\beta\right)$$

تصبح مساوية لِـ $\frac{r\sin^2\beta}{\text{tg}\alpha\,\cos\beta}$ ، عندما يكون $\alpha-\mu=\theta$ ؛ ويكون عندئذ موضع H في النقطة Ω' التي هي النقطة المُرفَقة التوافقية للنقطة Ω بالنسبة إلى لنقطتين A وَ B (الشكل ٤٦).

٢- تكون قيمة ψ، في الحالة الثانية ($\alpha<\beta$)، مساوية لِـ $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون $\alpha-\mu'=\theta$، حيث يكون $\cos\mu'=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$، أي عندما تكون H في Ω ؛ ويكون معنا : $\mu'\leq\alpha$ إذا كان: $\cos\beta\geq\cos^2\alpha$ ، أي إذا كان $\sin\alpha\geq\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

نحن بحاجة، فيما بعد، لدراسة تحدُّب ψ كدالة للمتغيِّر θ. نجد إذا اشتققنا (1):

$$\psi'\sin\psi=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin^2(\alpha-\theta)}\text{،}\qquad(4)$$

حيث يكون $\psi'=\frac{d\psi}{d\theta}$.

ملاحظات:

١- إذا كان $\alpha=\beta$ (Ω في A)، يمكن أن نُبسِّط (4) باختزال الكمية $2\sin^2\frac{\alpha-\theta}{2}$ فنحصل على: $\psi'\sin\psi=\frac{1}{2\text{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha-\theta}{2}}$.

٢- إذا كان $\theta=-\beta$ ، يكون $\psi=0$ وَ $\psi'\sin\psi=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ ، فنستنتج أنّ: $\psi'=+\infty$. إذا كان: $\theta=\text{Inf}(\beta,\ 2\alpha-\beta)$ وَ $\beta\neq\alpha$، يكون: $\psi=0$ أو π وَ $\psi'\sin\psi=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}$، فنستنتج أنّ: $\psi'=$ [إشارة $(\beta-\alpha)$. ∞]. إذا كان: $\beta=\alpha$ وَ $\theta=\alpha$، يكون: $\psi=\frac{\pi}{2}$ وَ $\psi'=\frac{1}{2\text{tg}\alpha}$. إذا كان $\theta=-\beta+u$ ، يكون : $\psi^2\approx\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ عندما يقترب u من 0.

وكذلك إذا كان: $\theta=\text{Inf}(\beta,2\alpha-\beta)-u$ (مع $\alpha\neq\beta$) وَ $\psi=\nu$ أو $\pi-\nu$ على التوالي وفقاً للحالة: $\alpha>\beta$ أو للحالة $\alpha<\beta$ ، نجد أنَّ: $\nu^2\approx\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin|\alpha-\beta|}$.

٣- إذا كان: $\alpha - \mu' = \theta$ ، نجد أنَّ: $\psi' \sin\psi = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

إذا اشتققنا (4) نحصل على:

$$\psi'' \sin\psi + \psi'^2 \cos\psi = \frac{2\cos\alpha\cos(\alpha-\theta) - \cos\beta\left(1+\cos^2(\alpha-\theta)\right)}{\sin\alpha\sin^3(\alpha-\theta)} \quad (5)$$.

لنضع: $\cos\alpha = A$ ، $\cos\beta = B$ وَ $\cos(\alpha - \theta) = X$ ؛ يكون معنا:

$$\cos\psi = \frac{B - AX}{\sin\alpha\,\sin(\alpha-\theta)} \quad (1')$$

$$\psi'\sin\psi = \frac{A - BX}{\sin\alpha\,\sin^2(\alpha-\theta)} \quad (4')$$

$$\left(\psi''\sin\psi + \psi'^2\cos\psi\right)\sin\alpha\,\sin^3(\alpha-\theta) = 2AX - B\left(1+X^2\right) \quad (5')$$.

نحصل من ('1) على:

$$\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi} = \frac{B - AX}{\left(1-A^2\right)\left(1-X^2\right) - (B-AX)^2}\sin\alpha\,\sin(\alpha-\theta)$$
$$= \frac{B - AX}{1 - A^2 - B^2 - X^2 + 2ABX}\sin\alpha\,\sin(\alpha-\theta)$$

فتعطينا المعادلة ('4) عندئذ:

$$\psi'^2\cos\psi\,\sin\alpha\,\sin^3(\alpha-\theta) = \frac{(A-BX)^2(B-AX)}{1-A^2-B^2-X^2+2ABX}$$.

ويكون معنا في النهاية:

$$\psi''\sin\psi\,\sin\alpha\,\sin^3(\alpha-\theta) = 2AX - B\left(1+X^2\right) - \frac{(A-BX)^2(B-AX)}{1-A^2-B^2-X^2+2ABX} = \frac{P(X)}{Q(X)} \quad (6)$$

مع:

$$P(X) = BX^4 - A\left(B^2+2\right)X^3 + 3A^2BX^2 - A\left(A^2+2B^2-2\right)X + B^3 - B \quad (6')$$

وَ

$$Q(X) = 1 - A^2 - B^2 - X^2 + 2ABX \geq 0$$.

إنّ إشارة "ψ هي إشارة $P(X)$ التي سندرسها عندما يكون :

$\cos(\alpha+\beta) \le X \le \cos(\alpha-\beta)$.

يكون معنا:

$$P(\cos(\alpha\pm\beta)) = \cos\beta\cos^4(\alpha\pm\beta) - \cos\alpha\cos^2\beta\cos^3(\alpha\pm\beta) -$$
$$-2\cos\alpha\cos^3(\alpha\pm\beta) + 3\cos^2\alpha\cos\beta\cos^2(\alpha\pm\beta) +$$
$$+2\cos\alpha\sin^2\beta\cos(\alpha\pm\beta) - \cos^3\alpha\cos(\alpha\pm\beta) - \cos\beta\sin^2\beta =$$
$$= -\sin^2\beta\sin\alpha\sin^3(\alpha\pm\beta)$$

وهكذا يكون: $P(\cos(\alpha+\beta)) < 0$ ، فتكون إشارة $P(\cos(\alpha-\beta))$ هي إشارة $\alpha-\beta$ (التي تنعدم عندما يكون $\alpha=\beta$).

إنّ حساب الاشتقاق يعطينا:

$$P'(X) = 4BX^3 - 3A(B^2+2)X^2 + 6A^2BX - A(A^2+2B^2-2)$$

وَ

$$P''(X) = 6\left(2BX^2 - A(B^2+2)X + A^2B\right) = 6(2X-AB)(BX-A)\ ;$$

$$P'(\cos(\alpha\pm\beta)) = 4\cos\beta\cos^3(\alpha\pm\beta) - 3\cos\alpha\cos^2\beta\cos^2(\alpha\pm\beta)$$
$$-6\cos\alpha\cos^2(\alpha\pm\beta) + 6\cos^2\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta) + 2\cos\alpha\sin^2\beta - \cos^3\alpha$$
$$= \frac{5}{2}\sin^2\beta\sin(\alpha\pm\beta)\left(\sin(2\alpha\pm\beta) \mp \frac{3}{5}\sin\beta\right)$$

وهكذا فإنَّ $P'(\cos(\alpha+\beta)) > 0$ تعادل $\sin(2\alpha+\beta) > \frac{3}{5}\sin\beta$. إذا كان $\alpha > \beta$، يكون $P'(\cos(\alpha-\beta)) > 0$، وإذا كان $\alpha=\beta$، يكون $P'(1) = 0$ ؛ وإذا كان $\alpha < \beta$ ، فإنَّ: $P'(\cos(\alpha-\beta)) > 0$ تعادل $\sin(\beta-2\alpha) > \frac{3}{5}\sin\beta$.

ملاحظة: إنَّ لدينا: $\sin(\beta+2\alpha) - \sin(\beta-2\alpha) = 2\cos\beta\sin 2\alpha \ge 0$، فلذلك تكون المتباينة:

$\sin(\beta-2\alpha) > \frac{3}{5}\sin\beta$ متضمِّنة للمتباينة: $\sin(\beta+2\alpha) > \frac{3}{5}\sin\beta$.

المشتقّة الثانية $P''(X)$ تكون سالبة في الفسحة: $\frac{AB}{2} \le X \le \frac{A}{B}$ ، وتكون موجِبة في خارجها.

يكون معنا:

$$P'\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{A^3B^4}{2} - \frac{3A^3B^4}{4} + \frac{3}{2}A^3B^2 - 2AB^2 - A^3 + 2A$$
$$= \frac{A}{4}\left(A^2B^2\left(2-B^2\right) + 4\left(2-A^2\right)\left(1-B^2\right)\right) > 0$$

وتكون إشارة العبارة:

$$P'\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{4A^3}{B^2} - 3A^3 - \frac{6A^3}{B^2} + 6A^3 - 2AB^2 - A^3 + 2A = \frac{2A}{B^2}\left(1-B^2\right)\left(B^2-A^2\right)$$ ،

مطابقة لإشارة α-β (التي تنعدم عندما يكون $\alpha = \beta$).

لنلاحظ أنَّ: $\frac{A}{B} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} > \cos(\alpha+\beta)$ وَ $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta < \cos(\alpha-\beta)$

لأنَّ $\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin(\alpha+\beta) > 0$.

والمتباينة: $\frac{AB}{2} \ge \cos(\alpha+\beta)$ (أو على التوالي: $\frac{A}{B} \le \cos(\alpha-\beta)$) تُكتب:

$\cos\alpha\cos\beta \ge 2\cos(\alpha+\beta)$ ، أيْ $3\cos(\alpha+\beta) \le \cos(\alpha-\beta)$

(أو على التوالي $\cos\alpha \le \cos\beta\cos(\alpha-\beta)$ ، أيْ $0 \le \sin\beta\sin(\alpha-\beta)$ أو أيضاً $\alpha \ge \beta$).

ملاحظة: إذا كان: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، يكون: $\frac{AB}{2} = \frac{A}{B} = 0$، وتكون $0 \le P''(X)$ لقيم X الأخرى. إذا كان $\alpha = \beta$، يكون: $\cos(\alpha-\beta) = 1 = \frac{A}{B}$ ، وتُصبح المتباينة: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\beta) \le \frac{AB}{2}$ معادلة لِـ $\cos 2\alpha \le \frac{1}{3}$، أي أنَّ $0{,}615479709 \le \alpha$ (وهذا العدد أصغر بقليل من $\frac{\pi}{5}$). إذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون: $\frac{AB}{2} = 0$ وَ $\frac{A}{B} = +\infty$.

إنَّ لدينا أربع حالات:

١) $\alpha \ge \beta$ وَ $3\cos(\alpha+\beta) \le \cos(\alpha-\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\cos(\alpha+\beta) \le \frac{AB}{2} < \frac{A}{B} \le \cos(\alpha-\beta)$$

يكون معنا: $\frac{A}{B}=\cos\mu$ ونضع $\frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta=\frac{AB}{2}=\cos\nu$؛ فنرى أنَّ $0\ge P''(X)$، إذا كان: $\alpha-\nu\le\theta\le\alpha-\mu$، وأنَّ $0<P''(X)$، إذا كان غير ذلك. ولنلاحظ أنَّ $\nu>\alpha$.

٢) $\alpha\ge\beta$ وَ $\cos(\alpha-\beta)<3\cos(\alpha+\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\frac{AB}{2}<\cos(\alpha+\beta)<\frac{A}{B}\le\cos(\alpha-\beta)$$،

ويكون $0\ge P''(X)$، إذا كان: $-\beta\le\theta\le\alpha-\mu$ ، أي أنَّ: H بين B وَ Ω' .

٣) $\beta>\alpha$ وَ $3\cos(\alpha+\beta)\le\cos(\alpha-\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\cos(\alpha+\beta)\le\frac{AB}{2}<\cos(\alpha-\beta)<\frac{A}{B}$$،

ويكون $0\ge P''(X)$، إذا كان: $\alpha-\nu\le\theta\le2\alpha-\beta$.

٤) $\beta>\alpha$ وَ $\cos(\alpha-\beta)<3\cos(\alpha+\beta)$ ؛ فيكون عندئذ:

$$\frac{AB}{2}<\cos(\alpha+\beta)<\cos(\alpha-\beta)<\frac{A}{B}$$،

فتبقى $P''(X)$ دائماً سالبة.

وهذه هي جداول تغيرات $P'(X)$ في الحالات الأربع:

1) X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\frac{AB}{2}$		$\frac{A}{B}$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$	↗	+	↘	+	↗	+

2) X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\frac{A}{B}$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$	↘	+	↗	+

3) X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\frac{AB}{2}$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$	$P'(\cos(\alpha+\beta))$	↗	+	↘	$P'(\cos(\alpha-\beta))$

4) X	$\cos(\alpha+\beta)$		$\cos(\alpha-\beta)$
$P'(X)$		↘	$P'(\cos(\alpha-\beta))$

تبقى $P'(X)$، في الحالة الأولى، موجبةً إذا كان: $P'(\cos(\alpha+\beta)) \geq 0$، أي إذا كان: $\sin(2\alpha+\beta) \geq \frac{3}{5}\sin\beta$؛ وتمرّ $P'(X)$ من القِيَم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_1 = \cos(\alpha-\theta_1) \in]\cos(\alpha+\beta) , \frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta[$، أيْ أنَّ $-\beta < \theta_1 < \alpha-\nu$ إذا كان: $\sin(2\alpha+\beta) < \frac{3}{5}\sin\beta$.

ملاحظة: إذا كان $\alpha = \beta$، فإنَّ المتباينة $\sin 3\alpha < \frac{3}{5}\sin\alpha$ تعادل: $\sin\alpha > \sqrt{\frac{3}{5}}$ ، أيْ أنَّ: $\alpha > 0,886077124$ (وهذا العدد يوجَد بين $\frac{\pi}{4}$ وَ $\frac{\pi}{3}$).

تبقى $P'(X)$ موجبة دائماً في الحالة ٢). وتبقى $P'(X)$ موجبة في الحالة ٣) ، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha) \geq \frac{3}{5}\sin\beta$؛ وإذا كان $\sin(\beta-2\alpha) < \frac{3}{5}\sin\beta \leq \sin(\beta+2\alpha)$، يكون $P'(\cos(\alpha+\beta)) \geq 0$ وَ $P'(\cos(\alpha-\beta)) < 0$ ؛ ولذلكَ تمرّ $P'(X)$ من القِيَم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_2 = \cos(\alpha-\theta_2)$ ، مع $\alpha-\nu < \theta_2 < 2\alpha-\beta$. وأخيراً، إذا كان $\sin(\beta+2\alpha) < \frac{3}{5}\sin\beta$ ، يكون $P'(\cos(\alpha\pm\beta)) < 0$ ، فتمرّ $P'(X)$ من القِيَم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_1 = \cos(\alpha-\theta_1)$ ، مع $-\beta < \theta_1 < \alpha-\nu$ ، ثم تمرّ من القيم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لـِ $X_2 = \cos(\alpha-\theta_2)$ ، مع $\alpha-\nu < \theta_2 < 2\alpha-\beta$.

تبقى $P'(X)$ موجبة، في الحالة ٤)، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)\geq\frac{3}{5}\sin\beta$ كما يجري في الحالة ٣)،

وإذا كان $\sin(\beta-2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta\leq\sin(\beta+2\alpha)$، تمرّ $P'(X)$ من القيم الموجبة إلى القيم السالبة عندما يكون X مساوياً لـِ $\cos(\alpha-\theta_2)=X_2$، مع $\alpha-\nu<\theta_2<2\alpha-\beta$. وأخيراً، إذا كان: $\sin(\beta+2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta$، تبقى $P'(X)$ سالبة، ولكن يُمكن أن نتحقَّق أنَّ هذا لا يحدث، لأنَّه متناقض مع المتباينة $3\cos(\alpha+\beta)>\cos(\alpha-\beta)$.

ونرى أنَّ $P(X)$، في الحالتين ١) و٢) الموافقتين للمتباينة $\alpha\geq\beta$، تبلغ وهي تزايدية $P(\cos(\alpha-\beta))\leq 0$، فتبقى $P(X)$ سالبة وتكون ψ دالة مُقعَّرة للمتغيِّر θ.

أما في الحالتين ٣) و ٤) الموافقتين للمتباينة $\alpha<\beta$، فإنَّ $P(X)$ تتزايد من $P(\cos(\alpha+\beta))<0$ إلى $P(\cos(\alpha-\beta))>0$، إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)\geq\frac{3}{5}\sin\beta$؛ لذلك تمرّ $P(X)$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$.

ونرى أنَّ $\alpha-\nu\leq\theta_0<2\alpha-\beta$، لأنَّ:

$$P\left(\frac{AB}{2}\right)=\frac{A^4B^5}{16}-\frac{A^4B^3}{8}\left(B^2+2\right)+\frac{3A^4B^3}{4}-\frac{A^2B}{2}\left(A^2+2B^2-2\right)+B^3-B$$

$$=-\frac{A^4B^5}{16}-\frac{B}{2}\left(1-B^2\right)\left(\left(1-A^2\right)^2+1\right)\leq 0 \quad .$$

إذا كان $\sin(\beta-2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta\leq\sin(\beta+2\alpha)$، تبلغ $P(X)$، وهي تناقصية القيمة $P(\cos(\alpha-\beta))>0$، بعد أن تكون تزايدية في الفسحة $-\beta\leq\theta\leq\theta_2$؛ وهكذا تمرّ $P(X)$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$، كما حصل في الحالة السابقة. ويكون معنا: $\alpha-\nu\leq\theta_0<\theta_2$. وأخيراً، إذا كان $\sin(\beta+2\alpha)<\frac{3}{5}\sin\beta$، فإنَّ $P(X)$ تتزايد فقط في الفسحة: $X_1\leq X\leq X_2$ وتمرّ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة عندما يكون X مساوياً لـِ $\cos(\alpha-\theta_0)=X_0$، مع $\alpha-\nu\leq\theta_0<\theta_2$ كما حصل أعلاه.

ومجمل القول هو أنَّ ψ دالة مُقعَّرة إذا كان $\beta \geq \alpha$ ؛ أما إذا كان، بعكس ذلك، $\alpha < \beta$،
فإنَّ ψ تكون مقعَّرة في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_0$ ، وتكون محدَّبة في الفسحة $\theta_0 \leq \theta \leq 2\alpha - \beta$.
والزاوية θ_0 محدَّدة بالمعادلة $P(\cos(\alpha - \theta_0)) = 0$. ويكون معنا:

$$\cos \mu' = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{B}{A} \quad \text{وَ} \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{B\left(1 - A^2\right)\left(B^2 - A\right)^2}{A^4} \geq 0 \text{ ؛}$$

وهذا يُبيِّن أنَّ: $\cos \mu' \geq \cos(\alpha - \theta_0)$ ، أي أنَّ: $\theta_0 \leq \alpha - \mu'$.

ملاحظة: إذا كان $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ، يكون $X = \cos(\alpha - \theta) = 0$
وَ $P(X) = B^3 - B \leq 0$، وهذا ما يُثبت أنَّ: $\theta_0 \leq \alpha - \frac{\pi}{2}$.

وهكذا يتم المرور، على نقطة انحراف الخط البياني للدالّة ψ، قبل أن يبلغ المتغيرُ θ القيمةَ $\frac{\pi}{2}$. وإذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$ يكون $\theta_0 = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

إذا كان $\frac{\beta}{2} \geq \alpha$، يكون $\theta_0 < 2\alpha - \beta \leq 0$. إذا كان $\alpha > \frac{\beta}{2}$ ، فإنَّ المتباينة: $\theta_0 \geq 0$
تعادل $P(\cos\alpha) \leq 0$ أيْ :

$$(3 - B)\, A^4 - 2(1 + B)\, A^2 + B(1 + B) \geq 0 \qquad (7)\text{،}$$

لأنَّ:

$$P(\cos \alpha) = A^4B - A^4(B^2 + 2) + 3A^4B - A^2(A^2 + 2B^2 - 2) + B^3 - B$$
$$= (B - 1)((3 - B)A^4 - 2(1 + B)A^2 + B(1 + B)) \text{ .}$$

لنضع: $\Pi(x) = (3 - B)x^2 - 2(1 + B)\, x + B(1 + B)$ ؛
فيكون :

$$\Pi(1) = (1 - B)^2 > 0 \quad \text{وَ} \quad \Pi\left(\cos^2\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1+B}{4}(1-B)^2 < 0$$

وَ

$$\Pi(\cos^2\beta) = B(1 - B)^2(1 + B - B^2) > 0\text{،}$$

فيكون إذاً لمتعددة الحدود Π جذرٌ بين $\cos^2\beta$ وَ $\cos^2\frac{\beta}{2}$ وجذر آخر بين $\cos^2\frac{\beta}{2}$ وَ 1 .

إذا فرضنا $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$ ، فإنَّ الشرط (7) يعادل :

$$A^2 = \cos^2\alpha \leq \frac{1+B-(1-B)\sqrt{1+B}}{3-B} = \cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}} ،$$

أيْ أنَّ : $\alpha \geq \alpha_1(\beta)$، حيث تُحدَّد $\alpha_1(\beta)$ بواسطة المعادلة:

$$\cos^2\alpha_1(\beta) = \cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}} \qquad (8)$$

أو

$$\operatorname{tg}^2\alpha_1(\beta) = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\,\frac{\left(2+\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} ،$$

وهذا ما يبيّن أنّ α_1 تزايدية.

ونرى أنَّ: $\alpha_1(0) = 0$ ، وإذا كان المتغيِّر β قريباً من الصفر، يكون معنا:

$$\alpha_1(\beta)^2 \approx \frac{\beta^2}{4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\beta^2}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) ،$$

أيْ أنَّ:

$$\alpha_1(\beta) \approx \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\beta ،$$

أو

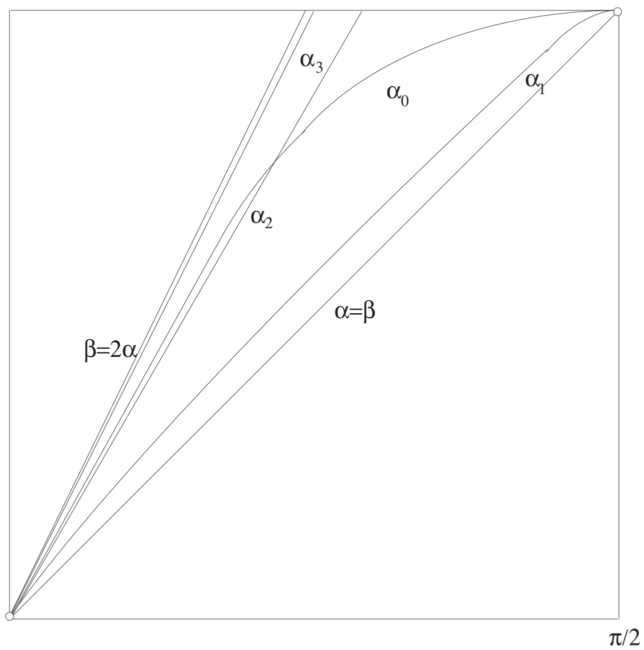
$$\beta \approx \alpha_1(\beta)\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

مع $\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} = 1{,}17157288$ وَ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 0{,}923879533$.

إذا كان $\beta = \frac{\pi}{2}$، يكون معنا $\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$، فإذا وضعنا: $\beta = \frac{\pi}{2} - v$ وَ $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - u$، يكون

معنا: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 u}$، فنستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{v}{2} \approx u^2$ وَ $0 = \left.\frac{d\beta}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=\frac{\pi}{2}}$ (انظر

الشكل ٥٠).



الشكل ٥٠

القسم الثاني : دراسة $\eta = \frac{\psi}{\beta+\theta}$

يكون معنا: $\eta' = \frac{(\beta+\theta)\psi' - \psi}{(\beta+\theta)^2}$ ، فإشارة هذه المشتقّة هي إشارة $[(\beta+\theta)\psi' - \psi]$. إذا كان:

$\theta = -\beta + u$ ، نحن نعلم أنَّ $\psi \approx C\sqrt{u}$ عندما تقترب u من 0، مع $C = \sqrt{\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}}$،

فتقترب إذاً $\eta = \frac{\psi}{\beta+\theta} \approx \frac{C}{\sqrt{u}}$ من $+\infty$ عندما تقترب θ من $-\beta$ ، لأنَّ $\beta + \theta = u$. ونحن

نعلم، وفقاً لِـ (4) أنَّ: $\sin \psi$ تقترب من ψ $\frac{C^2}{2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ ، فيكون إذاً:

$\psi' \approx \frac{C}{2\sqrt{u}}$ وَ $(\beta+\theta)\psi' - \psi \approx -\frac{C}{2}\sqrt{u} < 0$.

إنَّ مشتقَّة $\psi-(\beta+\theta)\psi'$ هي $(\beta+\theta)\psi''$ التي تطابق إشارتها إشارة ψ''؛ لذلك تتناقص $\psi-(\beta+\theta)\psi'$ وتبقى سالبة طالما دامت $\psi'' \geq 0$. فنستنتج أنَّ η تتناقص في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \beta$ في الحالة التي يكون فيها $\beta \geq \alpha$ وفي الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_0$ في الحالة التي يكون فيها $\beta < \alpha$.

لنضع $\theta = 2\alpha-\beta-u$ وَ $\psi = \pi - \nu$ ، إذا كان $\beta < \alpha$؛ لقد رأينا أنّ $\nu \approx C'\sqrt{u}$ عندما تقترب u من 0، مع:

$C' = \sqrt{\dfrac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}$ (انظر الملاحظة ٢، ص. ١٤٦).

الصيغة (4) تعطي:

$$\lim_{u\to 0}\psi'\sin\psi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\ \sin(\beta-\alpha)} = \frac{C'^2}{2}$$ ،

فيكون إذاً $\psi' \approx \dfrac{C'}{2\sqrt{u}}$ ، وبالتالي يكون: $\psi - (\beta+\theta)\psi' \approx 2\alpha\psi' \approx \dfrac{\alpha C'}{\sqrt{u}}$ ، وهذه العبارة تقترب من $+\infty$ عندما يقترب u من 0؛ وكذلك فإنَّ $\eta' \approx \dfrac{C'}{4\alpha\sqrt{u}}$ تقترب أيضاً من $+\infty$. وهكذا فإنَّ $\psi-(\beta+\theta)\psi'$ التي تتزايد في الفسحة $\theta_0 \leq \theta \leq 2\alpha-\beta$ ، تنعدم عندما تبلغ θ في هذه الفسحة قيمة هي θ_3 بحيث يكون $\theta_3 \geq \theta_0 \geq \alpha - \dfrac{\pi}{2}$ (انظر الشكل ٦١)، ثم تصبح موجِبة.

وهكذا تتناقص η في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_3$ ثم تتزايد في الفسحة $\theta_3 \leq \theta \leq 2\alpha-\beta$.

وهكذا نرى أنَّ تناقصية η، عندما يكون $\theta \leq 0$ ، تتطلّب أن يكون $\theta_3 \geq 0$. يكون معنا إذاً: $2\alpha-\beta > 0$ ، أي $\alpha > \dfrac{\beta}{2}$ ، فيجب أنْ تكون $\beta\psi'_0 - \psi_0$، التي هي قيمة $\psi-(\beta+\theta)\psi'$ عندما يكون $\theta = 0$ ، سالبة.

ولكن $\cos\psi_0 = \dfrac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1-2\dfrac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\alpha}$، أيْ: $\sin\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$

وَ: $\psi'_0\sin\psi_0 = \cos\alpha\dfrac{1-\cos\beta}{\sin^3\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^3\alpha}$ ،

فيُكتب الشرط $\beta\psi_0' \le \psi_0$ إذاً: $\psi_0 \sin\psi_0 \ge 2\beta \dfrac{\sin^2 \frac{\psi_0}{2}}{\mathrm{tg}\alpha} = 2\beta \dfrac{\cos\alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^3 \alpha} = \beta\psi_0' \sin\psi_0$

وهذا يعني أنَّ:

$$\frac{\beta}{\mathrm{tg}\alpha} \le \frac{\psi_0}{\mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}}. \qquad (9)$$

لنعرِّف دالة، هي $\alpha_2(\beta)$، بالمعادلة الضمنية: $\dfrac{\beta}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \dfrac{\psi_0}{\mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}}$ $(\frac{\beta}{2} \le \alpha \le \beta)$؛ إنَّ $\dfrac{\beta}{\mathrm{tg}\alpha}$ دالـّة تناقصيّة للمتغيِّر α ، بينما تكون $\dfrac{\psi_0}{\mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}}$ دالة تزايديّة للمتغيِّر α. إنَّ $\dfrac{\beta}{\mathrm{tg}\alpha} - \dfrac{\psi_0}{\mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}}$، بشكل أدقّ، تتزايد بالنسبة إلى المتغير β وتتناقص بالنسبة إلى المتغيّر α؛ فتكون النتيجة أنَّ α_2 تتزايد بالنسبة إلى المتغيِّر β وأن القول ب) (الخاص بتناقصيّة η) صحيح إذا كان: $\alpha \ge \alpha_2(\beta)$. يكون معنا $\alpha_2(0) = 0$، عندما يكون $\beta = 0$، لأنَّ $\beta \ge \alpha_2(\beta)$. ويكون معنا، بالإضافة إلى ذلك، $\sin\dfrac{\psi_0}{2} \approx \dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{1}{2\lambda}$، مع: $\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta} = \lambda$ ؛ وهكذا يكون: $\mathrm{tg}\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}$

وَ $\dfrac{1}{2\lambda\sqrt{4\lambda^2-1}}.tg \sqrt{4\lambda^2-1} = 1$ ، وهذا ما يعطي: $\lambda = 0,667618851$ أو

$\left.\dfrac{d\beta}{d\alpha_2}\right|_{\alpha_2=0} = 1,49786064$. إذا كان: $\beta = \dfrac{\pi}{2}$، يكون $\sin\dfrac{\psi_0}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha}$، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} = \mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2} ،$$

وأنَّ

$$\frac{\pi}{2\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha_2}}\,\mathrm{Arc\,tg}\, 2\sqrt{-\cos 2\alpha_2} ،$$

وهذا ما يعطي $\alpha_2 = 0,933682485$ (وهذا العدد أصغر قليلاً من $\dfrac{3\pi}{10}$)

وَ $\dfrac{\alpha_2}{\beta} = \dfrac{2\alpha_2}{\pi} = 0,594400731$.

ملاحظة: إذا جعلنا $\lambda\beta = \alpha_2$ في (9) ، تكون العبارة $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\lambda\beta}$ دالة تزايدية للمتغيِّر β،

وذلك لكل قيمة ثابتة لِـ λ مع $\lambda \leq \frac{1}{2}$ (القضية ٢)، فإذاً: $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi\lambda}{2}} \leq \sin\frac{\psi_0}{2} \leq \frac{1}{2\lambda}$.

ونستنتج، نظراً إلى أنَّ $\frac{\psi_0}{tg\frac{\psi_0}{2}}$ دالةٌ تناقصية للمتغير ψ_0، أنَّ:

$2\sqrt{4\lambda^2-1}\ \mathrm{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \leq \frac{\psi_0}{\mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}} \leq 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \mathrm{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}}$ ؛ وتكون $\frac{\beta}{\mathrm{tg}\lambda\beta}$، من

ناحية أخرى، وهي دالة تناقصية للمتغيِّر β ، محصورةً بين $\frac{\pi}{2\mathrm{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ وَ $\frac{1}{\lambda}$. يجب إذاً أن يكون

معنا: $\frac{1}{\lambda} \leq 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \mathrm{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}}$ ، وَ $2\sqrt{4\lambda^2-1}\ \mathrm{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \leq \frac{\pi}{2\mathrm{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ ؛

وهاتان المتباينتان تعادلان : $0,579590352 \leq \lambda \leq 0,706698767$.

ولكن، يُمكن أن نُثبِت أنَّ $\frac{\alpha_2}{\beta}$ دالة تناقصية للمتغيِّر β بحيث يكون:

$0,594 \leq \frac{\alpha_2}{\beta} \leq 0,668$ (انظر الشكل ٥٠).

القسم الثالث: دراسة $\xi = \frac{\psi}{\beta+\theta}\sin(\alpha-\theta)$

يكون معنا: $\xi = \frac{\widehat{EI}}{EH}\cdot\frac{EH}{\widehat{EB}} = \frac{\psi}{1-\cos\psi}\cdot\frac{\cos\theta-\cos\beta}{(\beta+\theta)\sin\alpha}$ ؛

وبما أنَّ العبارة $\frac{\cos\theta-\cos\beta}{\beta+\theta} = \frac{2\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\beta+\theta}\cdot\sin\frac{\beta-\theta}{2}$ دالة تناقصية للمتغير θ ، يكفي أن

نثبت أنَّ $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ تتناقص لكي نثبت القول أ). ولكن ψ دالة تزايدية للمتغير θ إذا كان $\alpha \geq \beta$

معَ $\theta \leq \alpha - \mu$ أو إذا كان $\alpha < \beta$ ؛ فيبقى إذاً أنْ ننظر في تناقصية الدالة $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ للمتغيِّر

ψ. يكون معنا:

$$\frac{d}{d\psi}\frac{\psi}{1-\cos\psi}=\frac{1-\cos\psi-\psi\sin\psi}{(1-\cos\psi)^2}=\frac{1}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\left(1-\frac{\psi}{\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}}\right)،$$

ولذلك تكون تناقصية الدالّة $\frac{\psi}{1-\cos\psi}$ معادلة لِـ $\psi\geq\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}$ ،

أي أنَّ: $\delta\leq\psi$، حيث تُحدَّد δ بواسطة المعادلة $\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}=\delta$ $(0<\delta\leq\pi)$؛

وهكذا نجد أنَّ: δ = 2, 33112237 زاوية نصف قطرية (أي أصغر قليلاً من $\frac{3\pi}{4}$).

يكون معنا، في الحالة التي يكون فيها $\beta\geq\alpha$، $\psi\leq\psi_m\leq\frac{\pi}{2}<\delta$ ، فتتناقص ξ إذاً في الفسحة: $-\beta\leq\theta\leq\alpha-\mu$. ونحصل، من جهة أخرى، على نفس النتيجة في الفسحة $\alpha-\mu\leq\theta\leq\beta$، حيث تكون ψ دالة تناقصية للمتغيِّر θ ، إذ إنَّ لدينا في الواقع:

$$\xi=\frac{\widehat{EI}}{EI}\cdot\frac{EI}{EB}\cdot\frac{EB}{\widehat{EB}}=\frac{EI}{EB}\cdot\frac{2\sin\frac{\beta+\theta}{2}}{\beta+\theta}\cdot\frac{\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}،$$

حيث تكون النسبتان الأخيرتان تناقصيتين وفقاً للقضايا ٤ وَ ١١ وَ ١٢، وحيث تكون النسبة الأولى تناقصية عندما يكون: $\theta\geq\alpha-\mu$. وهكذا تكون ξ، في الحالة التي يكون فيها $\beta\geq\alpha$، دالة تناقصية للمتغير θ في كل الفسحة $[-\beta,\beta]$.

لنتناول الآن الحالة التي يكون فيها $\beta>\alpha$: تتناقص ξ في الفسحة $-\beta\leq\theta\leq\varepsilon$، حيث تُعرَّف ε بواسطة المعادلة: $\cos\delta=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\ \cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\alpha\ \sin(\alpha-\varepsilon)}$.

إنَّ ψ، بما أنَّ $\frac{\pi}{2}<\delta$، تمرُّ بالقيمة $\frac{\pi}{2}$ قبل أن تصل إلى القيمة δ والقيمة $\varepsilon>\alpha-\mu'$. إذا كان $\theta=2\alpha-\beta-u$ ، يكون

$$\xi'=\eta'\sin(\alpha-\theta)-\eta\cos(\alpha-\theta)\approx\frac{C'}{4\alpha\sqrt{u}}\sin(\beta-\alpha)،$$

عندما تقترب u من 0 ؛ فنرى إذاً أنَّ ξ' تقترب من $+\infty$ عندما تقترب θ من $2\alpha-\beta$. وهكذا يجب أن تنعدم ξ' بين ε وَ $2\alpha-\beta$ ؛ وإذا كانت θ_4 القيمة الأولى لِـ θ التي تـُعْدِم ξ'،

فإنَّ ξ تتناقص إذا كان $\theta \geq \theta_4$، ولكنها تتزايد بعد ذلك. ويكون معنا، بما أنَّ $\theta_3 \geq \alpha - \frac{\pi}{2}$ (ص. ١٥٦)، $\alpha - \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، إذا كان $\theta \geq \theta_3$ ، فينتج من ذلك أنَّ $\theta_4 \geq \theta_3$. ويُمكن أن نُثبت أنَّ θ_4 هي القيمة الوحيدة التي تُعدِم ξ' وأنَّ ξ تتزايد في الفسحة $\theta_4 \leq \theta \leq 2\alpha - \beta$ (انظر الشكل ٦١). والقول (أ) يكون إذاً صحيحاً فقط إذا كان $\theta_4 \leq 0$، وهذا ما يتطلّب أن يكون $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$. ولكنَّ الشرط: $\theta_4 \leq 0$ ، يعني أنَّ $\xi' \leq 0$ عندما يكون $\theta = 0$، أي أنَّ:

$$\eta_0' \sin\alpha - \eta_0 \cos\alpha = \frac{\beta\psi_0' - \psi_0}{\beta^2}\sin\alpha - \frac{\psi_0}{\beta}\cos\alpha \leq 0 \text{ ،}$$

أو أيضاً: $\beta\frac{\psi_0'}{\psi_0} - 1 \leq \frac{\beta}{\text{tg}\alpha}$ ،

وهذا ما يعادل

$$(10) \qquad \frac{\beta}{\beta + \text{tg}\alpha} \leq \frac{\psi_0}{\text{tg}\frac{\psi_0}{2}}.$$

نُعرِّف دالة، هي $\alpha_3(\beta)$، بواسطة المعادلة:

$$\frac{\beta}{\beta + \text{tg}\alpha_3} = \frac{\psi_0}{\text{tg}\frac{\psi_0}{2}} \text{ ،}$$

حيث يكون: $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha_3}$ $\quad(\frac{\beta}{2} \leq \alpha_3 \leq \beta)$.

فنرى أنَّ α_3 تزايدية وأنَّ $\alpha_3 \leq \alpha_2$ ؛ وتكون (أ) صحيحة في الفسحة : $\alpha \geq \alpha_3(\beta)$.

إنَّ $\alpha_3(0) = 0$ ، عندما يكون $\beta = 0$ ؛ إذا كان $\alpha_3(\beta) \approx \lambda\beta$ عندما تقترب β من 0 ، فإنَّ $\sin\frac{\psi_0}{2}$ يقترب من $\frac{1}{2\lambda}$، وتقترب $\text{tg}\frac{\psi_0}{2}$ من $\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}$ ويكون معنا:

$$1 = \frac{1}{2(1+\lambda)\sqrt{4\lambda^2 - 1}} \text{tg} \sqrt{4\lambda^2 - 1} \text{ ،}$$

فينتج عن ذلك: $\lambda = 0{,}5152252767$، أو: $\left.\frac{d\beta}{d\alpha_3}\right|_{\alpha_3 = 0} = 1{,}94089856$.

إذا كان $\frac{\pi}{2} = \beta$، يكون معنا: $\sin\frac{\psi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\sin\alpha}}$ وَ $\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$ ،

وَ $1 = \sqrt{-\cos 2\alpha_3}\,\operatorname{tg}\frac{1}{\left(2+\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\alpha_3\right)\sqrt{-\cos 2\alpha_3}}$،

فنستنتج أنَّ:

$\alpha_3(\frac{\pi}{2}) = 0{,}8099378632$ (يوجَد هذا العدد بين $\frac{\pi}{4}$ وَ $\frac{4\pi}{15}$)،

وأنَّ $\frac{\alpha_3}{\beta} = \frac{2\alpha_3}{\pi} = 0{,}515622458$.

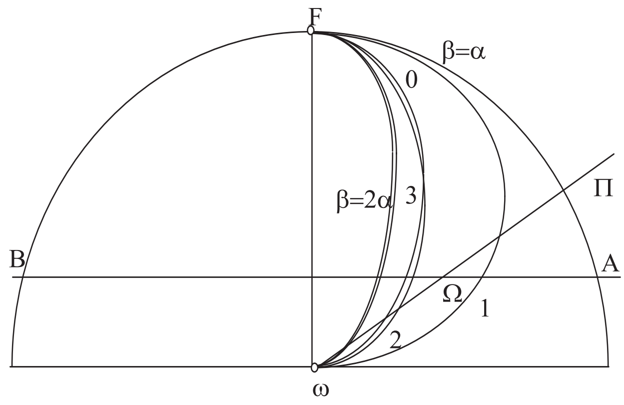
ملاحظة: إنَّ العبارة $\frac{\beta}{\beta+\operatorname{tg}\lambda\beta} = \frac{1}{1+\frac{\operatorname{tg}\lambda\beta}{\beta}}$ هي أيضاً دالة تناقصية للمتغير β وتبقى محصورة بين $\frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}$ وَ $\frac{1}{1+\lambda}$. فإذا جعلنا $\lambda\beta = \alpha_3$ في (10) يكون معنا:

$$\frac{1}{1+\lambda} \le 2\sqrt{-\cos\pi\lambda}\ \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{-\cos\pi\lambda}} \quad \text{وَ} \quad 2\sqrt{4\lambda^2-1}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2-1}} \le \frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

ونحصل من هاتين المتباينتين على $0{,}51 \le \lambda \le 0{,}52$.

ولكن يُمكن أنْ نُثبت أنَّ $\frac{\alpha_3}{\beta}$ هي دالة تزايدية للمتغير β، بحيث يكون: $0{,}5152 \le \lambda \le 0{,}516$ (انظر الشكل ٥٠).

إذا أخذنا محوريْ الإحداثيات ذات نقطة الأصل ω، بحيث يكون المحور الأول عمودياً على ωF (أي موازياً لِـ BA) وبحيث يكون المحور الثاني ωF، فإنَّ إحداثيَّتيْ نقطة التقاطع Ω بين $\Pi'\Pi$ وَ BA تساويان: $r\cos\beta\operatorname{tg}\alpha$ وَ $r\cos\beta$. ونظراً إلى أنَّ الدوال $\alpha_j(\beta)$ ($j=1, 2, 3$) تزايدية، فإنَّ الشروط $\alpha \ge \alpha_j(\beta)$ تعني أنَّ Ω توجَد على يمين المنحني ذي الرقم j على الشكل ٥١.



الشكل ٥١

تكون القضية ١٤ ، في الوضعية $\omega\Pi$، صحيحة، ولكن فقط للمتباينة الثانية.

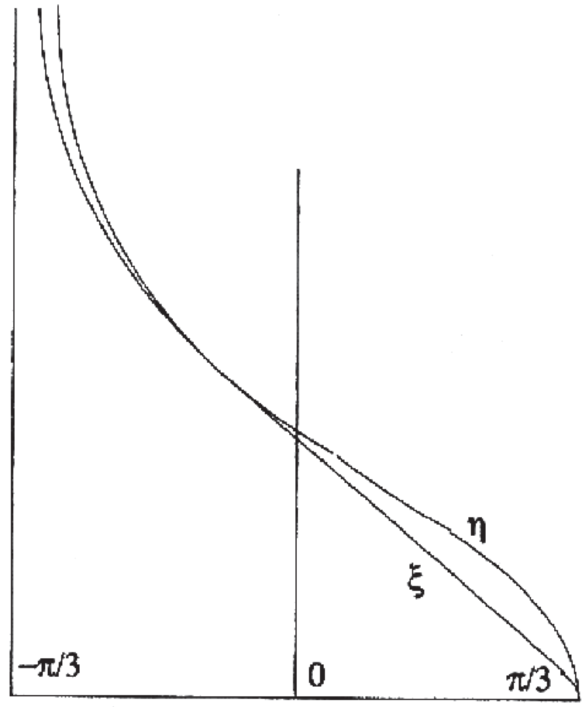
القسم الرابع: أمثلة

لقد اخترنا $\beta = \frac{\pi}{3}$ في كل هذه الأمثلة؛ وقيم αj (β) ($j = 1$، 2 ،3) الموافقة هي على التوالي:

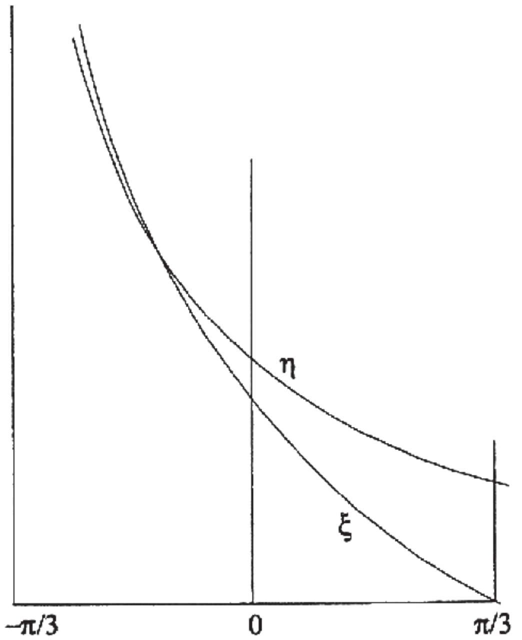
$\alpha_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}932458266$ (يكون معنا $\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}$ ، إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{4}$ وَ $\beta = \frac{\pi}{3}$)،

$\alpha_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}659224289$ وَ $\alpha_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}53978010008$.

إذا كان $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$، فإنَّ ξ وَ η تتناقصان في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ وتكون ψ فيها دالة مقعَّرة بالنسبة إلى لمتغيِّر θ. ولقد رسمنا الخطَّين البيانيين لِـ ξ وَ η عندما يكون $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ (الشكل ٥٢) وعندما يكون $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (الشكل ٥٣).

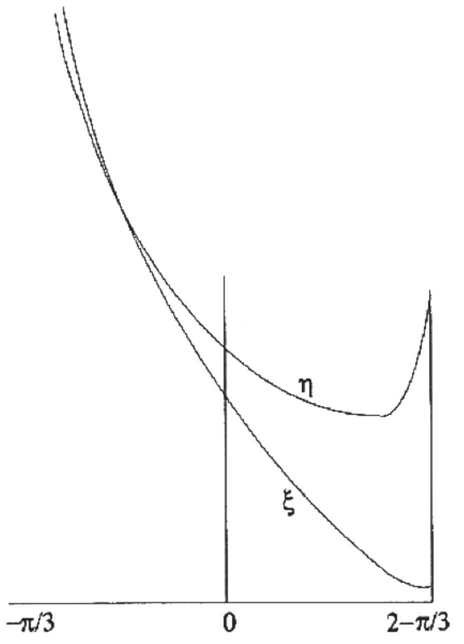


الشكل ٥٢ : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$



الشكل ٥٣: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

إذا كان $\frac{\pi}{3} < \alpha \le 0{,}932458266$ ، تكون ψ مقعّرة في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le 0$ وتتناقص ξ وَ η في هذه الفسحة (الشكل ٥٤، حيث يكون α = 1).



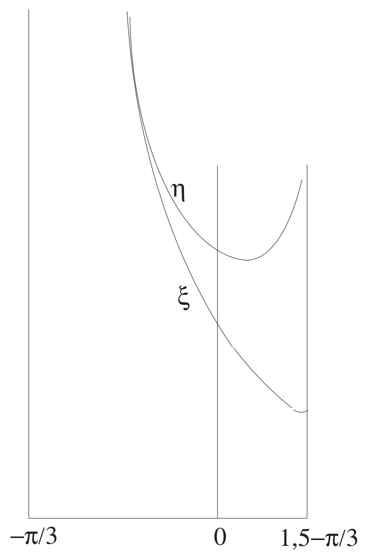
الشكل ٥٤: α = 1

$\theta_3 = 0{,}72055$ ، حد η الأدنى =0,935784028 ، θ_4=0,9500790346 ، حد ξ الأدنى = 0, 0700698854

إذا كان $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < 0{,}932458266$، تكفُّ ψ عن التقعّر عندما تبلغ θ القيمة $\theta_0 < 0$، وتبقى $\psi \geq \frac{\pi}{2}$ إذا بقيت $\theta \geq 0$ ؛ وتتناقص ξ وَ η في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$ (الشكل ٥٥، حيث يكون $\alpha = 0{,}8$). إذا كان $\frac{\pi}{4} > \alpha \geq 0{,}659224289$ تبقى ξ وَ η تناقصيَّتَيْن في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$ ؛ ولكن ψ تكفُّ عن التقعّر عندما تبلغ θ القيمة $\theta_0 < 0$ وتبلغ القيمة $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون $\theta = \mu' - \alpha < 0$ (الشكل ٥٦، حيث يكون $\alpha = 0{,}75$).

إذا كان $0{,}53978010008 \leq \alpha < 0{,}659224289$، تتناقص ξ في الفسحة $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$ ؛ ولكن η تبلغ حداً أدنى عندما تكون θ مساوية لِـ $\theta_3 > 0$ (الشكل ٥٧، حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{5}$، والشكل ٥٨، حيث يكون $\alpha = 0{,}55$).

وأخيراً، إذا كان $\alpha < 0{,}53978010008$ ، فإنَّ كلاً من الدالتَّين ξ وَ η تبلغ حداً أدنى عندما تصل θ على التوالي إلى القيمتين السالبتين θ_3 وَ θ_4 (انظر الشكل ٥٩، حيث يكون $\alpha = 0{,}524$). وإذا كان $\alpha < \frac{\beta}{2}$ فإنَّ θ تبقى دائماً سالبة (الشكل ٦٠، حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{12}$).

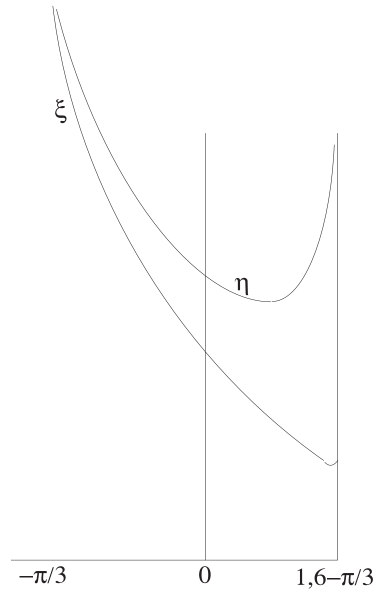


الشكل ٥٦ : $\alpha = 0{,}75$

$\theta_3 = 0{,}15413$، حد η الأدنى = 1,5403285

$\theta_4 = 0{,}4346042281$ ،

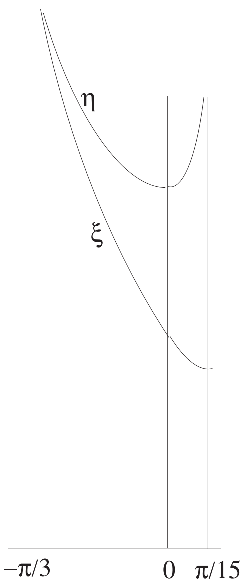
حد ξ الأدنى = 0,576095779



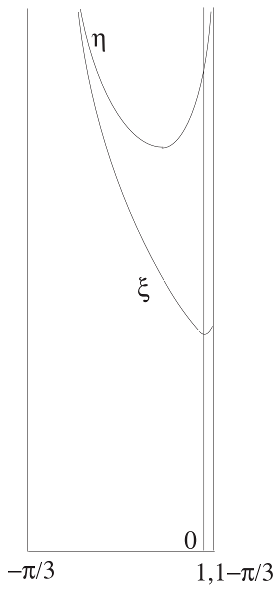
الشكل ٥٥ : $\alpha = 0{,}8$

$\theta_3 = 0{,}24483$ ، حد η الأدنى = 1,40613647

$\theta_4 = 0{,}537776499$، حد ξ الأدنى = 0,452137244



الشكل ٥٧ : $\alpha = \frac{\pi}{5}$



الشكل ٥٨ : $\alpha = 0,55$

$\theta_3 = -0,0503$ ، حد η الأدنى $= 1,9362108$

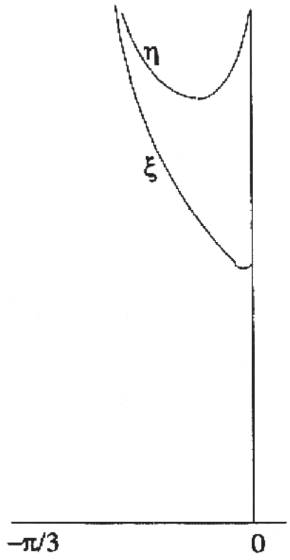
$\theta_4 = 0,1831447956$ ،

حد ξ الأدنى $= 0,949376423$

$\theta_3 = -0,17463$ ، حد η الأدنى $= 2,27086432$

$\theta_4 = 0,021138879$ ، حد ξ الأدنى $= 1,2654303$

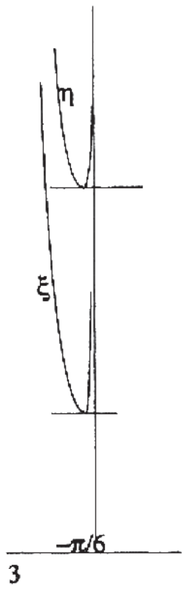
ولقد رسمنا، على الشكل ٦١، الخطوط البيانية للدوالّ: $\theta = \beta - 2\alpha$، $\theta_4(\alpha)$، $\theta_3(\alpha)$ ، $\mu' - \alpha$ وَ $\theta_0(\alpha)$ بالنسبة إلى المتغيِّر $\alpha \in]0, \beta[$ ، عندما تكون $\beta = \frac{\pi}{3}$. الزاوية θ مُلْزَمَة بالتغيّر من β- إلى $\beta - 2\alpha$ ، أيْ أنَّ المنطقة الموجودة تحت الخط القطري $\theta = \beta - 2\alpha$، هي وحدها المفيدة. ويكون القول (أ) صحيحاً تحت منحنى θ_4، بينما يكون القول ب) صحيحاً فوق منحنى θ_3.



الشكل ٥٩ : α = 0,524 ؛ θ_3 = $-0,21518$

حد η الأدنى = 2,40218858

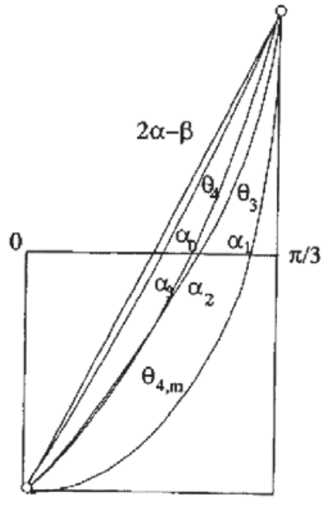
θ_4= $-0, 03261719$، حد ξ الأدنى = 1,3887698



الشكل ٦٠ : $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ، θ_3 = $-0,620835$ ،

حد η الأدنى= 5,099228 ، θ_4 = $-0,566379471$ ،

حد ξ الأدنى = 3,83612407



الشكل ٦١

إنَّ التعقيد في هذه المناقشة الطويلة يُبيِّن أنَّ التحديد المضبوط للشروط التي تؤمِّن صحة هذه القضية كانت حقّاً فوق متناول رياضيات عصر ابن الهيثم، وحتى فوق متناول تلك التي سبقت القرن الثامن عشر.

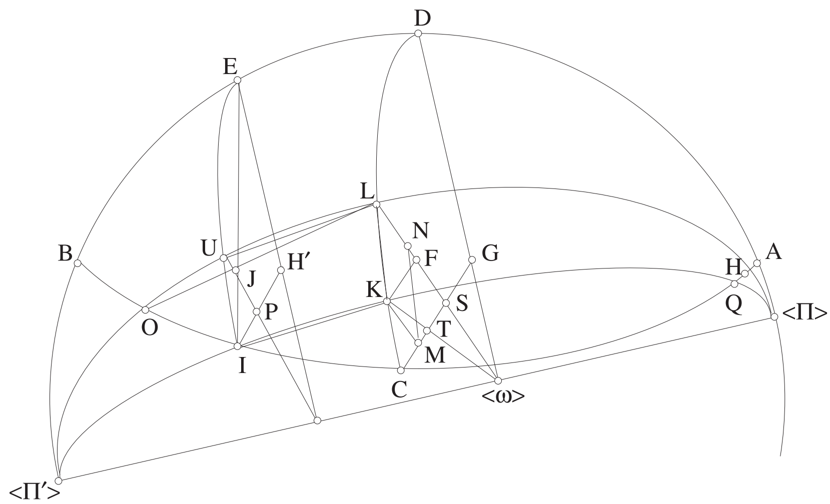
القضية ١٥- لنأخذ الشكل من جديد. الفرضيات الخاصة بالدوائر *ABC*، *EI* وَ *DC* تبقى من دون تغيير: (*ABC*) أفقية، والدائرتان (*EI*) وَ (*DC*) موازيتان لدائرة معدّل النهار(ثلاث حالات).

الدائرة $ADEB$ هي دائرة نصف النهار. ونفترض أنَّ $\widehat{BDA}\ \frac{1}{2} \leq \widehat{BD}$.

ونأخذ، بالإضافة إلى ذلك، دائرة عظمى أخرى مارة بالقطبين؛ هذه الدائرة العظمى تقطع الدائرة ABC على النقطتين O وَH وتقطع القوس $\widehat{EI}$ على النقطة U والقوس $\widehat{DC}$ على النقطة L[١٣].

يكون معنا، وفقاً لهذه الفرضيات، $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} < \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}} < \frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}}$.

نريد أن نبيِّن أنَّ النتيجة المُثبَتة انطلاقاً من دائرة نصف النهار BED تبقى صالحة انطلاقاً من دائرة عظمى مثل الدائرة OUL. إنَّ لدائرة نصف النهار BED وضعاً خاصاً لأنـّها عمودية على الأفق؛ لِنبدلـْها بدائرة اختيارية لنصف النهار؛ هذه القضية تُعمِّم إذاً القضية السابقة.



الشكل ٦٢

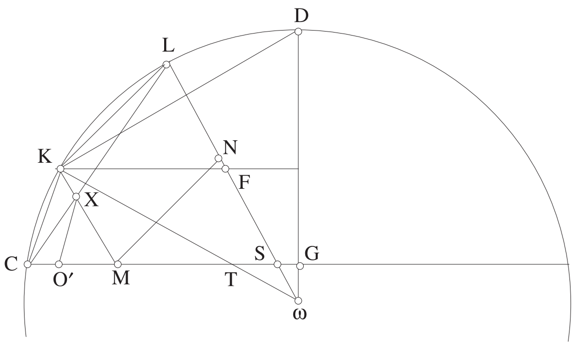
إنّ ω مركز الدائرة DLC موجود على خط القطبين؛ ويقطع الدائرةَ DLC ، إذاً، مُستويَا الدائرتين العظميَيْن IKQ وَ OUL وفقاً لقطرين موجودين على الخطين KT وَ SL.

لنفرض أوّلاً أنَّ قسم الدائرة DLC، الموجود فوق ABC، أصغر من نصف دائرة، فتكون ω إذاً تحت المستوي ABC.

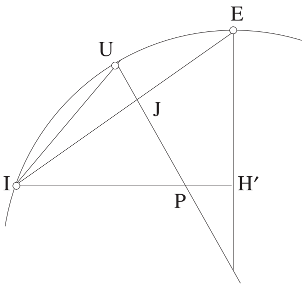
[١٣] النقطة L لها هنا تعريف مختلف عن التعريف السابق.

يكون معنا: $\widehat{DGC}$ زاوية قائمة، $\widehat{LSC}$ زاوية حادة، وَ $\widehat{KTC}$ زاوية حادة. نرفق بالقطر الخارج من K المثلث القائم الزاوية $TG\omega$، ونرفق بالقطر الخارج من L، المثلث $SG\omega$ الذي هو داخل المثلث السابق. يكون معنا إذاً $\widehat{ST\omega} < \widehat{LSC}$، فنستنتج من ذلك أنَّ $\widehat{KTC} < \widehat{LSC}$.

نُخرِج KM بحيث يكون $LS // KM$، فيكون معنا: M هي بين T وَC وَ $KM < LS$؛ ونُخرِج MN بحيث يكون $KL // MN$، فيكون معنا عندئذ: $KL = MN$ وَ $NL = KM$.



الشكل ٦٣ـ١



الشكل ٦٣ـ٢

القوس $\widehat{KL}$ مشابهة للقوس $\widehat{UI}$، فيكون إذاً $\frac{IU}{MN} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{IU}{KL}$.

ليكن UP القطر الخارج من U في الدائرة EI، فيكون معنا $LS // UP$، $CS // PI$، فنستنتج أنَّ: $\widehat{LSC} = \widehat{UPI}$.

نخرج KF بحيث يكون $CG // KF$، فيكون معنا $\widehat{LKF} = \widehat{UIP}$(لأنَّ القوسين $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{LD}$ مشابهتان على التوالي للقوسين $\widehat{UI}$ وَ $\widehat{EU}$). يكون معنا عندئذ $\widehat{NMS} = \widehat{UIP}$، فيكون المثلثان NMS وَ UIP متشابهين وبالتالي: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{UP}{NS} = \frac{IU}{MN}$.

١) فإذا كان إذاً : $d_1 < d_2$، يكون معنا: $UP < NS$، وإذا كان $d_1 = d_2$ يكون معنا $UP = NS$.

إذا استدللنا كما فعلنا في القضية السابقة، نبيِّن أنَّ: $\frac{KM}{KI} < \frac{SL}{LO}$.

ولكنَّ $NL = KM$ وَ $LU = KI$ ، فيكون معنا إذاً $\frac{NL}{LU} > \frac{SL}{LO}$.

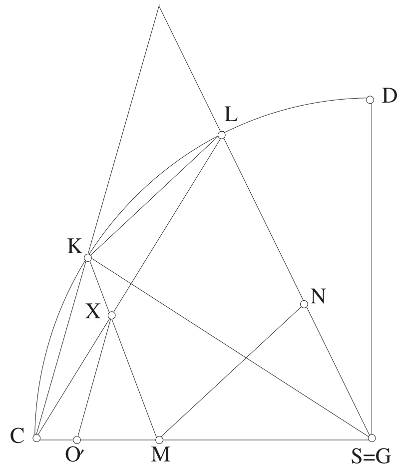
٢) إذا كان : $d_2 < d_1$، وإذا كان $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{UP}{PJ}$ ، نُبيِّن أيضاً أنَّ: $\frac{NL}{LU} > \frac{SL}{LO}$ أو $\frac{KM}{KI} > \frac{SL}{LO}$.

لقد رأينا أنَّ $\widehat{KMC} = \widehat{LSC}$ زاوية حادّة ؛ فإذا أخرجنا من K العمود على CG فإنـَّه يسقط بين M و C. الخط LC يقطع KM على النقطة X، ونُخرج XO' بحيث يكون $CK // XO'$. إنَّ الزاوية $\widehat{KCM}$ حادّة، وفقاً للفرضيات، وكذلك $\widehat{XO'M} = \widehat{KCM}$، فتكون إذاً الزاوية $\widehat{XO'C}$ منفرجة، فنستنتج أنَّ: $XO' < XC$؛ فيكون بالتالي: $\frac{O'X}{XM} > \frac{CX}{XM}$. ولكن $\frac{CX}{XM} = \frac{CL}{LS}$ وَ $\frac{CK}{KM} = \frac{O'X}{XM}$ ، فيكون معنا إذاً : $\frac{CK}{KM} > \frac{CL}{LS}$.

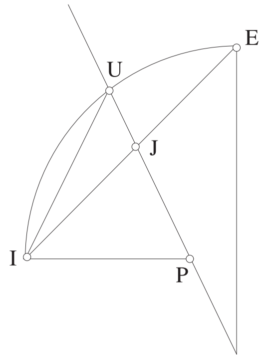
إنَّ لدينا، من جهة أخرى $\frac{KM}{KI} > \frac{LS}{LO}$، فإذاً $\frac{CK}{KI} > \frac{CL}{LO}$، فيكون بالتالي: $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}} > \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}$ ، إذا استخدمنا لازمة القضية ٤. ولكن شروط تطبيق هذه اللازمة، للأسف، لا تتحقّق دائماً (انظر لاحقاً).

إذا كان قسم الدائرة CLD الذي هو فوق المستوي (ABC) مساوياً لنصف دائرة، يكون عندئذ: $G = \omega$ ، وَ $GC = GD$. ويكون القطب الظاهر Π، في هذه الحالة، فوق المستوي ABC. النقطة G موجودة على المحور المار بالقطبين، وهذه النقطة هي، في آن معاً، في المستوي ABC وفي كل من المستويَيْن QKI وَ HLO ؛ وَلذلك تتقاطع الخطوط: AB ، HO وَ QI على النقطة G ($T = S = G$) فتكون الخطوط: $GC = GL = GK$ أنصاف أقطار للدائرة CLD ، وتكون CK وتراً ، فتكون $\widehat{KCG}$ زاوية حادة .

وإذا أخرجنا الخط CK على استقامة إلى ما بعد K، فإنَّه يقطع LG لأنـَّه يقطع GD. نخرج KM بحيث يكون $LG // KM$ ، فتكون M بين C وَ G ، ويكون $LG > KM$. ونُخرج MN بحيث يكون $KL // MN$ ، فيقطع الخطُّ CL الخطَ KM على النقطة X ؛ ونخرج XO' بحيث يكون $KC // XO'$ ؛ وتكون الزاوية $\widehat{XO'C}$ منفرجة، فيكون إذاً: $XO' < XC$.



الشكل ٦٤-١



الشكل ٦٤-٢

ولكن $\frac{CL}{LG}=\frac{CX}{XM}$ وَ $\frac{XO'}{XM}=\frac{CK}{KM}$ فإذاً: $\frac{CL}{LG}>\frac{CK}{KM}$.

المثلث GNM مشابه للمثلث IUP وَ $\frac{IU}{MN}=\frac{UP}{NG}=\frac{d_1}{d_2}$.

إذا كان $d_1 \leq d_2$، يكون معنا إذاً $UP \leq NG$ ، ونحصل كما في السابق على $\frac{GL}{LO}>\frac{NL}{LU}$.

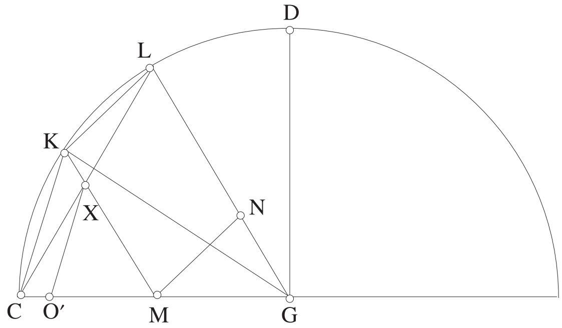
إذا كان $d_2 < d_1$ ، وإذا كان $\frac{UP}{PJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$ يكون معنا أيضاً $\frac{GL}{LO}>\frac{NL}{LU}$ ، فنحصل بالتالي على $\frac{GL}{LO}>\frac{MK}{KI}$.

ولكنَّ $\frac{CL}{LG}>\frac{CK}{KM}$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{CL}{LO}>\frac{CK}{KI}$ ، فنحصل بالتالي، كما حصلنا في الحالة الأولى، على $\frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}>\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$.

نستخلص من هذه النتيجة أنَّ: $\frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}} > \frac{\widehat{CL}-\widehat{CK}}{\widehat{LO}-\widehat{KI}}$، وأنَّ القوس $\widehat{LK}=\widehat{CL}-\widehat{CK}$ مشابهة للقوس $\widehat{UI}$ [١٤] ، فيكون معنا إذاً: $\widehat{UO}=\widehat{LO}-\widehat{LU}=\widehat{LO}-\widehat{KI}$،

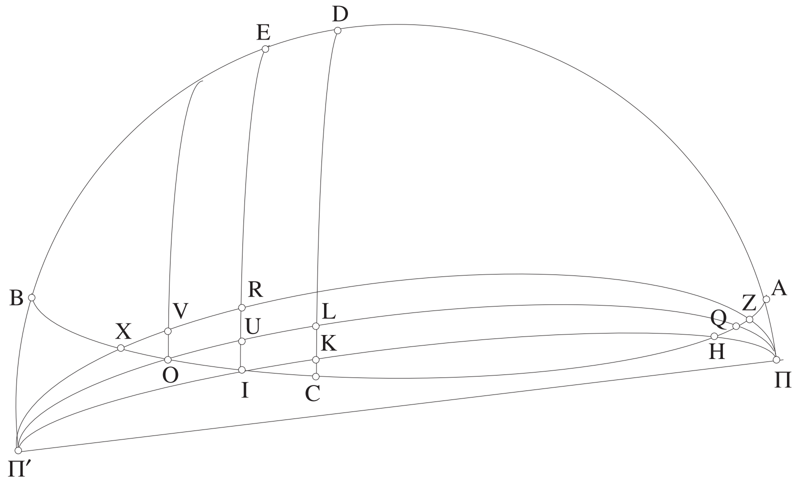
[١٤] يكتب ابن الهيثم هنا المساواة بين القوسين $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{UI}$ ؛ ولكن هاتين القوسين المتشابهتين تنتميان إلى دائرتين مختلفتين. النتيجة ليست إذاً عامة، إذ إنه لا يُمكن الحصول على النتيجة إلا إذا كان $\widehat{UI} \geq \widehat{LK}$ ، أي إذا كان $d_1 \geq d_2$. والقوسان $\widehat{LK}$ وَ $\widehat{UI}$ ، هنا أيضاً، تقابلان نفس الزاوية في دائرتين مختلفتين، ويُمكن الظنّ أن ابن الهيثم كان يقوم بالاستدلال على الزوايا بالرغم من أنه تكلَّم على الأقواس.

$$\frac{\overset{\frown}{UI}}{\overset{\frown}{UO}} > \frac{\overset{\frown}{CL}}{\overset{\frown}{LO}} > \frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}}.$$



الشكل ٦٤-٣

فتكون النتيجة : $\frac{\overset{\frown}{UI}}{\overset{\frown}{UO}} > \frac{\overset{\frown}{CL}}{\overset{\frown}{LO}} > \frac{\overset{\frown}{CK}}{\overset{\frown}{KI}}$.



الشكل ٦٥ [15]

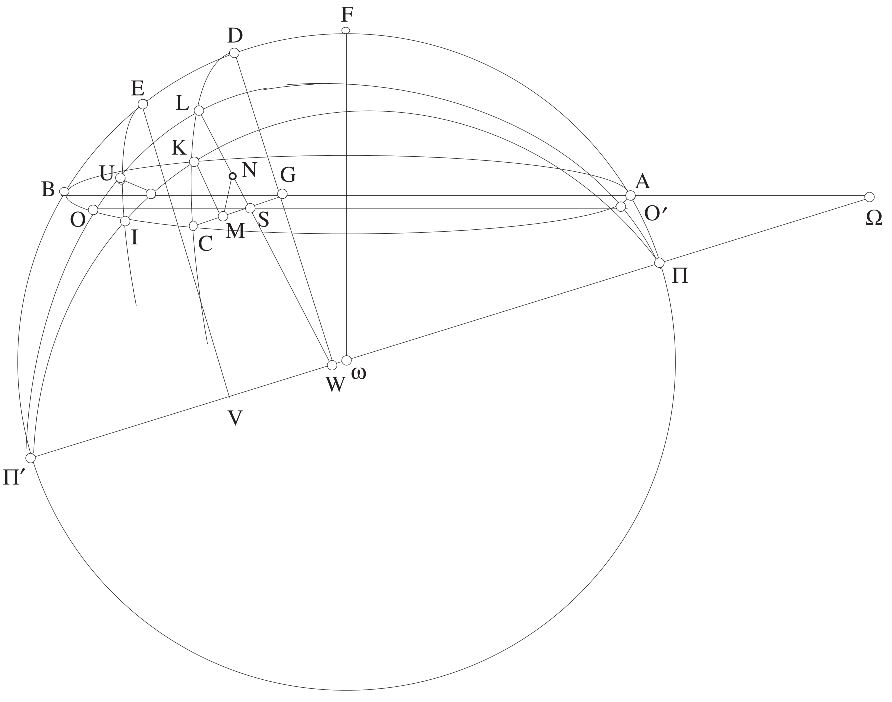
نأخذ دائرة عظمى أخرى ذات قطر $\Pi\Pi'$ تقطع ACB على النقطة X وتقطع القوس EI على النقطة R، ونأخذ الدائرة المارة بالنقطة O والموازية للدائرة IE فتقطع القوس XR على النقطة V.

[15] لقد استُخدم الحرف O قبل هذه المرَّة.

إنَّ الاستدلال، الذي قمنا به في القسم السابق للدائرتين العظميين IKH وَ OLQ اللتين تقطعان الدائرتين المتوازيتين EI وَ CD، ينطبق هنا على الدائرتين العظميين OLQ وَ XRZ اللتين تقطعان الدائرتين المتوازيتين EI وَ OV؛ فنحصل على النتيجة: $\frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}} > \frac{\widehat{IR}}{\widehat{RX}} > \frac{\widehat{OV}}{\widehat{VX}}$.

شرح:

نحتفظ برموز شرح القضية ١٤، مع المتغيِّر الإضافي $\lambda = \widehat{DWL}$ الذي يُحدِّد مستوي نصف النهار OUL المعرَّف بالمعادلة: $y = z \operatorname{tg} \lambda$. يكون معنا: $0 \leq \lambda \leq \Psi$ والموضعان القصويان للمستوي OUL هما المستوي BED (λ =0) ومستوي دائرة نصف النهار للنقطة C ($\lambda = \Psi$) (الشكل ٦٦).



الشكل ٦٦

إذا كان $\widehat{L\omega O} = \varphi$ وَ $\widehat{\Pi\omega O} = \alpha - \Theta + \varphi$ ، فإنَّ إحداثيات النقطة O تكون:

$x = r \cos (\alpha - \Theta + \varphi)$ ، $y = r \sin \lambda \sin (\alpha - \Theta + \varphi)$، $z = r \cos \lambda \sin (\alpha - \Theta + \varphi)$.

أما معادلة المستوي ABC فهي: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = r \cos \beta$، والنقطة O موجودة في المستوي ABC ، فنستنتج أنَّ:

$\cos\beta = \cos\alpha\cos(\alpha-\Theta+\varphi) + \cos\lambda\sin\alpha\sin(\alpha-\Theta+\varphi)$، (1)

وهذه المعادلة تُحدِّد قيمتين للمتغيّر $\varphi \in [0\,,\,\pi]$ تتوافقان على التوالي مع النقطتين O وَ O'؛ والنقطة O تتوافق مع القيمة العظمى للمتغيّر φ.

الزاوية $\widehat{LWC}$ تساوي $\Psi-\lambda$، فإذاً $r(\Psi-\lambda)\sin(\alpha-\Theta) = \widehat{CL}$ ، ويكون معنا: $r\varphi = \widehat{LO}$ ؛ وهكذا يكون: $\frac{\Psi-\lambda}{\varphi}\sin(\alpha-\Theta) = \frac{\widehat{CL}}{\widehat{LO}}$.

وعندما تصل D إلى E، فإنَّ هذه النسبة تُصبح $\frac{\widehat{UI}}{\widehat{UO}}$، ونرى أنَّ المتباينة الأولى تعني أنَّ $\frac{\psi-\lambda}{\varphi}\sin(\alpha-\theta)$ دالةٌ تناقصية للمتغيّر θ إذا كانت λ ثابتة معلومة. وعندما تصل L إلى K فإنَّ نفس النسبة تُصبح $\frac{\widehat{CK}}{\widehat{KI}}$، وتعني المتباينة الثانية أنَّ $\frac{\psi-\lambda}{\varphi}\sin(\alpha-\theta)$ دالة تناقصية للمتغيّر λ إذا كانت θ ثابتة معلومة.

القسم الأول: دراسة الزاوية φ

المعادلة (1) تعطي $\theta_{-}(\lambda) = \theta - \varphi$ ، أي $\varphi = \theta - \theta_{-}(\lambda)$ حيث تكون θ_{-} الدالة المعكوسة للدالة $\theta \mapsto \psi(\theta)$، المعرَّفة في الصفحة ١٤٤. ولكن θ_{-} دالة تزايدية من $-\beta$ إلى $\theta-\mu$ في الفسحة $0 \leq \lambda \leq \psi_m$ إذا كان $\alpha \geq \beta$ ، ومن $-\beta$ إلى $2\alpha-\beta$ في الفسحة $0 \leq \lambda \leq \pi$ إذا كان $\alpha < \beta$. تكون θ_{-} محدَّبة في الحالة التي يكون فيها $\alpha \geq \beta$؛ أما في الحالة التي يكون فيها: $\alpha < \beta$، فإنَّ θ_{-} تكون محدّبة إلى أن تبلغ θ_{-} القيمة θ_0 المعرَّفة بالمعادلة $P(\cos(\alpha-\theta_0)) = 0$ ، ثم تصبح مقعَّرة (انظر ص. ١٥١-١٥٢). وينتج عن ذلك أنَّ φ دالة تناقصية بالنسبة إلى لمتغيّر λ، من $\theta+\beta$ إلى $\theta-\alpha+\mu$ في الفسحة $0 \leq \lambda \leq \psi_m$ إذا كان $\alpha \geq \beta$ ، ومن $\theta+\beta$ إلى $\theta-2\alpha+\beta$ في الفسحة : $0 \leq \lambda \leq \pi$ إذا كان $\alpha < \beta$. وتكون φ مقعَّرة في الحالة $\alpha \geq \beta$؛ وتكون مقعَّرة أيضاً في الحالة $\alpha < \beta$ إذا اقتصرناها على الفسحة:

$0 \leq \lambda \leq \lambda_0$، حيث تُحقِّق λ_0 المعادلة: $\theta_{-}(\lambda_0) = \theta_0$.

يكون معنا: $\cos\lambda-\cos\psi = \frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} - \frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta+\varphi)} =$

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left[\begin{array}{c}(\cos\beta(\sin(\alpha-\theta))-\sin(\alpha-\theta+\varphi))+\\ \cos\alpha\left(\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)-\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta+\varphi)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(-2\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\alpha-\theta+\frac{\varphi}{2}\right)+\cos\alpha\sin\varphi\right)=$$

$$\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(\cos\alpha\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\cos\left(\alpha-\theta+\frac{\varphi}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\left(\cos\alpha\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\left(\cos(\alpha-\theta+\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}+\sin(\alpha-\theta+\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)}\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin(\alpha-\theta+\varphi)}\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$ ،

أيْ أنَّ:

$$\cos\lambda-\cos\psi=2\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{t\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\sin(\alpha-\theta)} \qquad (2)$$

مع

$$t=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin(\alpha-\theta+\varphi)}. \qquad (3)$$

ولكنَّ

$$\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\theta+\varphi)+\cos^2\beta\cos^2(\alpha-\theta+\varphi)}{\sin^2(\alpha-\theta+\varphi)}=t^2$$

$$=\cos^2\lambda\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\lambda.$$

وهكذا نرى أنَّ $t = 0$، تفرض $\sin\lambda = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$، وهذا غير ممكن إلا عندما يكون: $\alpha \geq \beta$ ؛

يكون معنا عندئذ: $\psi_m = \lambda$ $(\lambda \leq \psi_m \leq \frac{\pi}{2})$، فيكون معنا أيضاً $\psi = \psi_m$ وَ $\theta = \alpha - \mu$.

وهكذا نرى أنَّ t لا تنعدم في الفسحة $\psi > \lambda \leq 0$ ، فتحتفظ إذاً بإشارتها.

إذا كان $\lambda = 0$، يكون معنا: $\alpha + \beta = \alpha - \theta + \varphi$ وَ $0 < \sin\beta = t$ ؛ وهكذا تبقى t موجبة ويكون معنا:

$$t = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\lambda} \qquad (4)$$

لنلاحظ أنـَّه، إذا جعلنا $\varphi = \theta - \theta_-(\lambda)$ في (3) ، فإنَّ البَسْط (أي صورة الكسر) يُصبح:

$\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha - \theta_-(\lambda))$ ، فهي دائماً موجبة إذا كان $\alpha > \beta$ وأيضاً إذا كان $\alpha \geq \beta$ ، لأنَّ $\theta_-(\lambda) \leq \alpha - \mu$ وفقاً لتعريف θ_-.

إذا كان $\psi = \lambda$، يكون معنا $0 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(t\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ وَ $\varphi = \theta - \theta_-(\lambda)$ مع $\theta = \theta_-(\psi)$ إذا كان $\alpha < \beta$ أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \leq \alpha - \mu$ ، ولكن $\theta = \theta_+(\psi)$ إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \geq \alpha - \mu$. وهكذا يكون $\varphi = 0$ إذا كان $\alpha > \beta$ أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta \leq \alpha - \mu$؛ وإذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\theta > \alpha - \mu$ ، يكون: $\varphi = \theta_+(\psi) - \theta_-(\psi) > 0$ ،

فيكون إذاً: $\frac{t}{\cos\beta} = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

المعادلة (4)، في شرح القضية ١٤، تُعطي:

$$\varphi'_\lambda = \frac{\sin\lambda\sin\alpha\sin^2(\alpha - \theta_-(\lambda))}{\cos\beta\cos(\alpha - \theta_-(\lambda)) - \cos\alpha} \quad \text{(حيث يكون } \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \varphi'_\lambda\text{)}$$

ونتحقَّق أنَّ هذه العبارة سالبة. وهي تصبح غير منتهية عندما يكون $\alpha \geq \beta$ وَ $\lambda = \psi = \psi_m$ ، إذ يكون معنا عندئذ: $\mu = \alpha - \theta_-(\psi_m)$. لنجعل $\psi = \psi_m$ ، أي $\theta = \alpha - \mu$ وَ $\theta_-(\lambda) = \theta - \varphi = \alpha - \mu - \varphi$ ؛ فيكون معنا:

$$\varphi'_\lambda = \frac{\sin\lambda \sin\alpha \sin^2(\mu+\varphi)}{\cos\beta\cos(\mu+\varphi)-\cos\alpha}.$$

المقام (مخرج الكسر):

$$\cos\beta\cos(\mu+\varphi)-\cos\alpha = \cos\beta\cos\mu\cos\varphi - \cos\beta\sin\mu\sin\varphi - \cos\alpha$$

$$= -2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\beta\sin\mu\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

يعادل $-\varphi\cos\beta\sin\mu$ عندما تقترب φ من 0 ، بينما يقترب البَسْط من $\sin\beta\sin^2\mu$ ؛ وهكذا يكون: $\varphi'_\lambda \approx -\frac{\text{tg}\beta\sin\mu}{\varphi}$.

ولكن، وفقاً للمعادلة (3):

$$t = \frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos(\mu+\varphi)}{\sin(\mu+\varphi)} \approx \varphi\cos\beta؛$$

وإذا كان $\lambda = \psi_m - u$ ، يكون معنا:

$$t^2 = \sin^2\beta - \sin^2\alpha(\sin\psi_m\cos u - \cos\psi_m\sin u)^2$$

$$= (2\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\sin^2 u + \sin\beta\cos\beta\sin\mu\sin 2u،$$

لأنَّ $\cos\psi_m = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\sin\mu$، وهكذا يكون: $t^2 \approx 2\sin\beta\cos\beta\sin\mu\cdot u$ عندما يقترب u من 0 ؛

وهذا ما يعطي: $\varphi \approx 2\sqrt{2u\text{tg}\beta\sin\mu}$ ،

وفي النهاية :

$$\varphi'_\lambda \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{tg}\beta\sin\mu}{2u}} \text{ ،} \qquad (5)$$

عندما تقترب u من 0، إذا كان $\lambda = \psi_m - u$.

القسم الثاني : دراسة $\eta = \frac{\psi-\lambda}{\varphi}$ كدالة للمتغيّر λ

إنَّ العبارة $\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\psi-\lambda}{\varphi}=\frac{-\varphi-(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda}{\varphi^2}$ هي ذات إشارة مضادَّة للعبارة $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$،

والعبارة $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda\right)=(\psi-\lambda)\varphi''_{\lambda^2}$ لها نفس إشارة φ''_{λ^2} لأنَّ $\lambda \leq \psi$. ولقد رأينا أنَّ $\varphi''_{\lambda^2} \leq 0$، إذا كان $\beta \leq \alpha$ ، أو إذا كان $\beta > \alpha$ مع $\lambda \leq \lambda_0$ (حيث يكون $\theta_-(\lambda_0)=\theta_0$)، بينما يكون $\varphi''_{\lambda^2} > 0$ إذا كان $\beta > \alpha$ مع $\lambda_0 < \lambda$.

إذا كان $\beta \leq \alpha$ ، فإنَّ $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تتناقص إذاً ابتداءً من قيمتها الأوّلية : $\theta+\beta=\varphi$ (عندما يكون $\lambda = 0$، حيث يكون $\varphi'_\lambda = 0$) حتى قيمتها النهائية $\varphi = 0$ أو $0 < 2\text{Arc tg}\frac{t}{\cos\beta}$، وفقاً للحالة $\theta \leq \alpha - \mu$ أو للحالة $\theta > \alpha - \mu$ (عندما يكون $\lambda = \psi$).

إنَّ لدينا، بالفعل، $(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda = 0$ عندما يكون $\lambda = \psi$، وذلك يكون حتى في الحالة التي تكون فيها φ'_λ لامتناهية، لأنَّه إذا كان $\lambda = \psi_m - u$، فإنَّ:

$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u\,\text{tg}\,\beta\sin\mu}{2}}=-\frac{u}{2}\cdot\sqrt{\frac{\text{tg}\,\beta\sin\mu}{2u}}\approx(\psi_m-\lambda)\varphi'_\lambda$ تقترب من الصفر عندما يقترب u من الصفر. وينتج عن ذلك أنَّ العبارة $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تبقى موجبة وأنَّ $\frac{\psi-\lambda}{\varphi}$ تتناقص باستمرار. وهكذا تكون متباينة ابن الهيثم الثانية صحيحة في هذه الحالة، وذلك عندما يكون $-\beta \leq \theta \leq \beta$، وَ $0 \leq \lambda \leq \psi$.

وإذا كان $\beta > \alpha$، فإنَّ $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ تتناقص من $\beta+\theta$ إلى حدّ أدنى تبلغه عندما يكون $\lambda = \lambda_0$ ، ثم تتزايد في الفسحة $\lambda_0 \leq \lambda \leq \psi$ ؛ والقيمة النهائية هي $\varphi = 0$ ، فالحد الأدنى يكون إذاً سالباً وتوجَد قيمة وحيدة $\lambda_1 \in]0, \lambda_0[$ تجعل $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ معدومة. يكون معنا: $0 \leq \varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda$ عندما يكون: $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ ، ويكون $\varphi+(\psi-\lambda)\varphi'_\lambda \leq 0$ عندما يكون

$\psi \le \lambda \le \lambda_1$. لنضع $\theta_1 = (\lambda_1)\theta$. نرى أنَّ $\frac{\psi - \lambda}{\varphi}$ تتناقص طالما تحقَّقت المتباينة $\lambda_1 \le \lambda$،

ولكنها تتزايد عندما يكون $\lambda_1 < \lambda$.

وإذا كان $\lambda_1 = \lambda$ يكون $\theta - \theta_1 = \varphi$ ، فيكون معنا إذاً: $\frac{\theta - \theta_1}{\theta'_{-}(\lambda_1)} = \psi - \lambda_1$ ؛ وهذا يعني أنَّ (θ_1, λ_1) هي نقطة تماسّ خط التماسّ مع خط ψ البياني وفقاً للمتغير θ؛ وخط التماسّ هذا هو الخط الخارج من النقطة (θ, ψ) التابعة لهذا الخط البياني (انظر الشكلين ٧٠-٧١)؛ ويكون معنا $\theta_1 \le \theta_0$ ، كما أنَّ تقعُّر ψ في الفسحة $\theta \le \theta_0$ يُبيّن أنَّ θ_1 دالة تناقصية للمتغيِّر θ وأنَّ $\theta_0 = \theta_1$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

ملاحظة: لتكن p قيمة المشتقّة $\frac{d\lambda_1}{d\theta_1}$ عندما يكون: $\theta = \theta_0$ ، أيْ أنـَّها ظلّ زاوية الانحدار لخط التماسّ على نقطة الانحراف. ليكن $\theta = \theta_0 + u$ ، ولتكنَ $\psi = \lambda_0 + pu + qu^3 + \ldots$ القيمة الموافقة لـِψ عندما تقترب u من 0 وحيث تكون q قيمة $\frac{1}{6}\frac{d^3\lambda_1}{d\theta_1^3}$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

إنَّ خطَّ التماسّ، لخطّ ψ البياني، الذي يمرُّ بالنقطة (θ, ψ)، يمسّ هذا الخط البياني على النقطة (θ_1, λ_1) حيث يكون: $\theta_0 - v = \theta_1$ ، $\lambda_0 - pv - qv^3 - \ldots = \lambda_1$ وَ $p + 3qv^2 + \ldots = \frac{d\lambda_1}{d\theta_1}$ ؛

فيكون معنا:

$$\lambda_1 + \frac{d\lambda_1}{d\theta_1}(\theta - \theta_1) = \lambda_0 + pu + 3quv^2 + 2qv^3 + \ldots = \psi = \lambda_0 + pu + qu^3 + \ldots$$

يكون معنا إذاً: $3uv^2 + 2v^3 = u^3$ ، وهذا ما يعطي $\frac{v}{u} = \frac{1}{2}$؛ وهكذا فإنَّ مشتقَّة λ_1 بالنسبة إلى لمتغيّر θ تـُساوي $-\frac{p}{2}$ عندما يكون $\theta = \theta_0$.

عندما يكون $2\alpha-\beta=\theta$ ، تبلغ θ_1 حداً أدنى $\theta_{1,m}$، كما تبلغ λ_1 حداً أدنى $\lambda_{1,m}$. وعندما يكون $2\alpha-\beta-u=\theta$ ، كنا قد رأينا أنَّ $\pi-v=\psi$ مع $v\approx\sqrt{\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}$ عندما تقترب u من 0 . إذا كانت القيمة $2\alpha-\beta-u=\theta$ تتوافق مع $\theta_{1,m}+w=\theta_1$ ، يكون معنا:

$$\lambda_1=\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}w+qw^2+\ldots \quad \text{وَ} \quad \lambda'_1=\lambda'_{1,m}+2qw\ +\ldots,$$

فإذاً:

$$\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}w+qw^2+\ldots+\left(\lambda'_{1,m}+2qw+\ldots\right)\left(2\alpha-\beta-u-\theta_{1,m}-w\right)=\psi$$

$$\lambda_{1,m}+\lambda'_{1,m}\left(2\alpha-\beta-\theta_{1,m}\right)-\lambda'_{1,m}u+2qw\left(2\alpha-\beta-\theta_{1,m}\right)-qw(2u+w)=$$

$$\pi-\lambda'_{1,m}u+2qw\left(2\alpha-\beta-\theta_{1,m}\right)+\ldots\ =$$

وهكذا يكون: $v\approx\sqrt{\frac{2u\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}\approx-2qw\left(2\alpha-\beta-\theta_{1,m}\right)$؛

فنرى أنَّ $q<0$ وأنَّ:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_{1,m}}{-u}\approx-\lambda'_{1,m}\frac{w}{u}\approx\frac{\lambda'_{1,m}}{q\left(2\alpha-\beta-\theta_{1,m}\right)}\sqrt{\frac{\sin\beta}{2u\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}}$$

تقترب من $-\infty$ عندما يقترب u من 0. فإذاً، يكون خط التماسّ على منحني النهاية عمودياً عندما يكون $2\alpha-\beta=\theta$.

وينبغي أن نفرض $\theta_0\leq 0$، في الحالة التي يكون فيها $\beta>\alpha$، لكي نضمن صحّة المتباينة الثانية. ولقد رأينا(في شرح القضية ١٤) أنَّ ذلك يُعادل $\alpha\geq\alpha_1(\beta)$، حيث يكون:

$$\cos^2\alpha_1(\beta)=\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1+\sin^2\frac{\beta}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\ .$$

إذا كان $\alpha>\alpha_1(\beta)$، تتحقّق المتباينة الثانية إذا كان $\theta\leq\theta_0<0$، أو إذا كان $\theta_0<\theta$ مع $\psi>\lambda_1\geq\lambda$.

القسم الثالث : دراسة $\xi = \frac{\psi-\lambda}{\varphi}\sin(\alpha-\theta)$ كدالة للمتغير θ

يكون معنا: $\xi = \frac{\overset{\frown}{CL}}{\overset{\frown}{LO}} = \frac{\overset{\frown}{CL}}{LS}\cdot\frac{LS}{\overset{\frown}{LO}}$ ،

حيث يكون:

$$r\sin(\alpha-\theta)\left(1-\frac{\cos\psi}{\cos\lambda}\right) = LW - SW = LS$$

لأنَّ $r\sin(\alpha-\theta)\cos\psi = WG = SW\cos\lambda$. وهكذا يكون:

$$\sin(\alpha-\theta).\frac{\cos\lambda-\cos\psi}{\varphi}.\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi} = \xi . \qquad (6)$$

ويساوي المضروب الثاني في الجهة اليسرى من هذه المعادلة:

$$\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}.\frac{t\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\beta\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha} ،$$

وفقاً للمعادلة (2)؛ وهو بالبداهة دالة تناقصية للمتغيّر $\varphi = \underline{\theta}(\lambda)-\theta$، فيكون أيضاً دالـّة تناقصية للمتغيّر θ (ولنذَكّر بأنَّ $t \geq 0$). يبقى علينا إذاً أنْ ندرس المضروب الأول $\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi}$. إنَّ لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi} = \frac{\cos\lambda-\cos\psi-(\psi-\lambda)\sin\psi}{(\cos\lambda-\cos\psi)^2} .$$

لذلك تكون $\frac{\psi-\lambda}{\cos\lambda-\cos\psi}$ دالة تناقصية للمتغيِّر ψ، إذا اشترطنا أنَّ:

$$0 \leq (\psi-\lambda)\sin\psi+\cos\psi-\cos\lambda ؛ \qquad (7)$$

يجب أنْ ندرس هذه المتباينة في الفسحة $\lambda \leq \psi \leq \pi$ (حيث تكون λ ثابتة). ولكنَّ العبارة:

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left((\psi-\lambda)\sin\psi+\cos\psi-\cos\lambda\right) = (\psi-\lambda)\cos\psi$$

لها إشارة $\cos\psi$: فالجهة اليمنى من (7) تتزايد في الفسحة $\lambda \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ ، ثم تتناقص في الفسحة $\frac{\pi}{2} \le \psi \le \pi$. وإذا كان $\lambda \le \frac{\pi}{2}$، نكون دائماً في الحالة الثانية، وبما أنَّ الجهة اليمنى في (7) تنعدم عندما يكون $\psi = \lambda$ ، فإنّها تبقى سالبة، فلذلك لا يُمكن أن تتحقَّق (7)، كما أنَّ العبارة $\frac{\psi - \lambda}{\cos\lambda - \cos\psi}$ تتزايد مع ψ. وإذا كان معنا، بعكس ذلك، $\lambda < \frac{\pi}{2}$ ، فإنَّ الجهة اليمنى في (7) تتزايد من 0 إلى قيمة قصوى، هي $0 < \frac{\pi}{2} - \lambda - \cos\lambda$، تبلغها عندما يكون $\psi = \frac{\pi}{2}$، ثم تتناقص حتى القيمة $(-1-\cos\lambda) = -2\cos^2\frac{\lambda}{2} < 0$، التي تبلغها عندما يكون $\psi = \pi$.

توجَد إذاً قيمة (وحيدة) $f(\lambda) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ لِـ ψ تُعدِمُ العبارة $[(\psi - \lambda)\sin\psi + \cos\psi - \cos\lambda]$، وتكون (7) محقّقة إذا كان $\lambda \le \psi \le f(\lambda)$ ، ولا تكون محقّقة إذا كان $\psi > f(\lambda)$.

لندرس الدالة $f(\lambda)$ المعرَّفة بالمعادلة :

(8) $0 = (f(\lambda) - \lambda)\sin f(\lambda) + \cos f(\lambda) - \cos\lambda$ ، مع $\frac{\pi}{2} \le f(\lambda) < \pi$ ،

حيث يكون $0 \le \lambda \le \frac{\pi}{2}$. فإذا كان $\lambda = 0$، نحصل على

$f(0)\sin f(0) + \cos f(0) - 1 = 0$،

أيْ على $f(0) = \operatorname{tg}\frac{f(0)}{2}$ ، وهذا ما يعطي:

$f(0) = \delta = 2,33112237$ زاوية نصف قطرية (انظر شرح القضية ١٤) ؛

إذا كان $\lambda = \frac{\pi}{2}$، نحصل على: $\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\sin f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$، أيْ على: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}]$، والحل الوحيد لهذه المعادلة الأخيرة في الفسحة $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ هو $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. ويكون معنا إذا اشتققنا (8):

$0 = (f'(\lambda) - 1)\sin f(\lambda) + \{(f(\lambda) - \lambda)\cos f(\lambda) - \sin f(\lambda)\} f'(\lambda) + \sin\lambda$ ،

وهذا ما يُعطي:

$$\frac{\operatorname{tg} f(\lambda)}{\operatorname{tg}\frac{f(\lambda)+\lambda}{2}}=\frac{\sin f(\lambda)-\sin\lambda}{\cos\lambda-\cos f(\lambda)}\operatorname{tg} f(\lambda)=f'(\lambda) \qquad (9)$$

لأنَّ $\frac{\cos\lambda-\cos f(\lambda)}{\sin f(\lambda)}=f(\lambda)-\lambda$.

ونرى أنَّ $0 \leq f'(\lambda)$ محقَّقة طالما بقيت $f(\lambda)+\lambda \leq \pi$ (لأن $\operatorname{tg} f(\lambda) \leq 0$).

إذا كان $\lambda = 0$ ، يكون معنا $\pi > \delta = f(0) = f(\lambda) + \lambda$

وَ $1 + f'(\lambda) = 1 + \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} = 0{,}54893386 > 0$، فتتزايد إذاً $f(\lambda) + \lambda$ بدءاً من δ طالما بقيت المتباينةُ $f'(\lambda) \geq -1$ محقَّقةً. وإذا وُجدت قيمة للمتغيّر λ بحيث يكون $f'(\lambda) = -1$ ، يكون لدينا، لهذه القيمة،

$$\operatorname{tg} f(\lambda) = -\operatorname{tg}\frac{f(\lambda)+\lambda}{2} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{f(\lambda)+\lambda}{2}\right)،$$

فنستنتج أنَّ $\lambda = 2\pi - 3f(\lambda)$ ، وهذا ما يفرض $f(\lambda) \leq \frac{2\pi}{3}$.

إذا وضعنا $\lambda = 2\pi - 3f(\lambda)$ في (8)، يكون معنا:

$$(4f(\lambda) - 2\pi)\sin f(\lambda) + \cos f(\lambda) - \cos 3f(\lambda) =$$

$$2\sin f(\lambda)\,(2f(\lambda) - \pi + \sin 2f(\lambda)) = 0 ،$$

وهذا ما يعطي $f(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ ، فإذاً $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ، وهي القيمة التي تجعل (9) غير محدودة . لنفرض $\lambda = \frac{\pi}{2} + u$ وَ $f(\lambda) = \frac{\pi}{2} + v$ ؛ يكون معنا:

$$f'(\lambda) = \frac{\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}}{\operatorname{tg} v}،$$

مع $v \approx f'\left(\frac{\pi}{2}\right)u$ عندما يقترب u من 0 . فنستنتج من ذلك، عند بلوغ النهاية، أنَّ:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}،$$

وهذه المعادلة تعطي $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ (وهو جذرها السالب الوحيد). والخلاصة إذاً هي أنَّ $f'(\lambda) > -1$ وأن $f(\lambda) + \lambda$ تتزايد من δ إلى π فتبقى إذاً محدودة من الأعلى بـِ π ؛ فينتج عن ذلك أن $f'(\lambda) \leq 0$ وأن f تتناقص من δ إلى $\frac{\pi}{2}$ إذا كان $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$.

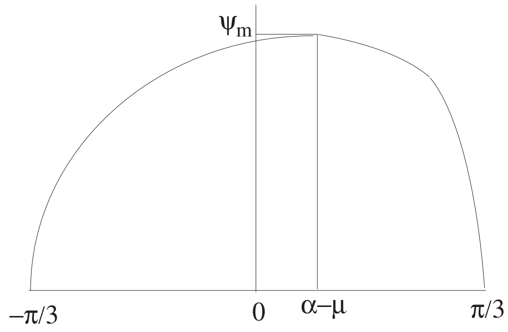
نحن نعرف أنَّ ψ دالة تزايدية للمتغيِّر θ إذا كان $\beta < \alpha$ أو إذا كان $\beta \geq \alpha$ معَ $\alpha - \mu \leq \theta$، فينتج عن ذلك أنَّ $\frac{\psi - \lambda}{\cos\lambda - \cos\psi}$ دالة تناقصية للمتغير θ إذا كان $\alpha < \beta$ مع $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ وَ $\lambda \leq \psi \leq f(\lambda)$، أو إذا كان $\alpha \geq \beta$ مع $\alpha - \mu \leq \theta$، وهي الحالة التي يكون فيها:

$$\lambda \leq \psi \leq \psi_m \leq \frac{\pi}{2}.$$

ويمكن أن نعالج أيضاً الفسحة $\alpha - \mu \leq \theta \leq \beta$ ، في الحالة التي يكون فيها $\alpha \geq \beta$،

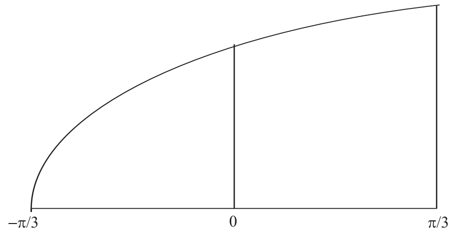
بفضل العبارة: $\xi = \frac{LO}{\widehat{LO}} \cdot$ **!Error.** $\frac{\widehat{CL}}{CL} = \frac{\psi-\lambda}{2\sin\frac{\psi-\lambda}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\psi-\lambda}{2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$،

حيث يكون المُعامِل الأخير تناقصياً كدالة للمتغيِّر φ، فيكون إذاً تناقصياً كدالة للمتغيِّر θ. أما المُعامِلان الأوّلان فهما دالّتان تناقصيتان للمتغيِّر θ، إذا كانتا تناقصيتين للمتغيِّر ψ، أي إذا كان $\alpha \geq \beta$ وَ $\alpha - \mu \leq \theta$. وهكذا تتناقص ξ، عندما يكون $\alpha \geq \beta$ ، كدالة للمتغيّر θ في الفسحة $[-\beta,\beta]$، إذا كان $0 \leq \lambda \leq \psi$، أي عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخط البياني لـِ ψ (انظر الشكلين ٦٧ وَ ٦٨).



الشكل ٦٧ : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha - \mu = 0{,}282288719$ ، $\psi_m = 1{,}11197574$



الشكل ٦٨: $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$

إنَّ تناقصية ξ مُثبتَة، في الحالة التي يكون فيها $\beta < \alpha$، إذا تحقَّق الشرطان $\lambda \leq \frac{\pi}{2}$ وَ $\psi \leq f(\lambda)$، أيْ عندما يكون $\theta \leq \theta_(f(\lambda))$؛ وعندما يكون $\theta = \theta_(f(\lambda))$ ، يكون معنا $\frac{d\xi}{d\theta} > 0$ ، ولكن $\frac{d\xi}{d\theta}$ تصبح لانهائية وموجبة عندما يكون $\theta = 2\alpha - \beta$. فتوجَد إذاً قيمة θ_4 للمتغير θ، بين $\theta_(f(\lambda))$ وَ $2\alpha - \beta$ ، بحيث تمر فيها المشتقّة $\frac{d\xi}{d\theta}$ من القيم السالبة إلى القيم الموجبة؛ ويمكن أن نُثبت أنَّ هذه القيمة وحيدة وأنَّ ξ تتناقص في الفسحة $-\beta \leq \theta \leq \theta_4$ ، قبل أن تتزايد بعد ذلك. وتوجد كذلك، إذا كان $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$ ، قيمة θ_4 بين $\theta_(\lambda)$ وَ $2\alpha - \beta$ بحيث تتناقص ξ حتى تصل θ إلى θ_4 ، ثم تتزايد بعد ذلك. أما المنطقة، من المستوي (θ, λ)، التي يكون فيها قول ابن الهيثم صحيحاً فهي محدَّدة بالمتباينة:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\theta} = \cos(\alpha - \theta) \frac{\psi - \lambda}{\varphi} - \sin(\alpha - \theta) \frac{\varphi\psi' - \psi + \lambda}{\varphi^2} \geq 0 ،$$

أي بالمتباينة:

$$(10) \quad ((\theta - \theta_(\lambda))\, \psi' - \psi + \lambda) \sin(\alpha - \theta) - (\theta - \theta_(\lambda))(\psi - \lambda) \cos(\alpha - \theta) \geq 0$$

وتُحدَّد θ_4 بواسطة المعادلة في (10).

ملاحظة: إذا كان $\theta \leq \alpha - \mu'$ ، يكون $\psi \leq \frac{\pi}{2}$ ويكون معنا $\lambda \leq \psi \leq f(\lambda)$ ، فيكون إذاً $\frac{d\xi}{d\theta} \leq 0$ ، ونستنتج من ذلك أنَّ: $\theta_4 \geq \alpha - \mu'$.

يُمكن أن نتحقَّق أنَّ θ_4 دالة تناقصية للمتغيِّر λ . وحدُّها الأدنى هو $\theta_-(\lambda)$ لأنَّ $\lambda \leq \psi$.

لنجعل $\theta_-(\lambda) + u = \theta$ في المعادلة المأخوذة من (10). يكون معنا: $\psi = \lambda + u\psi'_* + u^2\frac{\psi''_*}{2} + ...$ وَ $\psi' = \psi'_* + u\psi''_* + ...$ ، إذا رمزنا بـِ ψ'_* وَ ψ''_* إلى قيمتيْ المشتقَّتين عندما يكون $\theta = \theta_-(\lambda)$.

فإذا وضعنا ذلك في (10) نجد:

$$u^2\left[\frac{1}{2}\psi''_*\sin\left(\alpha - \theta_-(\lambda)\right) - \psi'_*\cos\left(\alpha - \theta_-(\lambda)\right)\right] + \ldots .$$

وهكذا يُحسَب حدّ θ_4 الأدنى بواسطة المعادلة:

$$(11) \qquad 0 = \psi''\sin(\alpha - \theta) - 2\psi'\cos(\alpha - \theta) .$$

وإذا استخدمنا المعادلة (6) الواردة في شرح القضية ١٤، تتحوَّل هذه المعادلة إلى:

$$(12) \qquad \frac{P(X)}{Q(X)} = 2X(A - BX)$$

أيْ إلى: $R(X) = 2X(A - BX)\,Q(X) - P(X) = 0$.

يكون معنا:

$$R(X) = BX^4 - 3AB^2X^3 + BX^2(3A^2 + 2B^2 - 2) - A^3X + B - B^3 ،$$

حيث يكون $A = \cos\alpha$ ، $B = \cos\beta$ وَ $X = \cos(\alpha - \theta)$. إذا كان $\theta = \alpha - \mu'$، أيْ إذا كان: $X = \cos\mu' = \frac{B}{A}$ ، يكون معنا:

$$R\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A^4}B\left(1 - A^2\right)\left(A^2 - B^2\right)^2 > 0 ،$$

وإذا كان $\theta = 2\alpha - \beta$ وَ $X = \cos(\beta - \alpha)$ ، نجد أنَّ:

$$R(\cos(\beta - \alpha)) = -\sin^2\beta\sin^3(\beta - \alpha)\sin\alpha < 0 .$$

إنَّ دراسة مشابِهة لتلك التي نجدها في شرح القضية ١٤ تُبيِّن أنَّ $R(X)$ تتناقص من $R\left(\frac{B}{A}\right)$ إلى $R(\cos(\beta - \alpha))$ في الفسحة $\cos(\beta - \alpha) \leq X \leq \frac{B}{A}$. وهكذا تنعدم R عندما تبلغ $X = \cos(\alpha - \theta)$ قيمةً محدَّدة متوافقة مع القيمة الدنيا المطلوبة $\theta_{4,m}$ لـِ θ_4 .

إنَّ قول ابن الهيثم صحيح في الحالة التي يكون فيها $\theta_{4,m} \leq 0$، وهذا ما يعادل $0 \leq R(\cos\alpha)$. ولكنَّ:

$(1-B)\,(A^4\,(3B-1)+B(B+1)\,(1-2A^2)) = R(A) = R(\cos\alpha)$ ؛

فتكون المتباينة المطلوبة إذاً:

$0 \leq A^4\,(3B-1) - 2B(B+1)\,A^2 + B(B+1)$.

لنضع $(3B-1)\,x^2 - 2\,B(B+1)\,x + B(B+1) = S(x)$ ؛ فيكون معنا:

$0 < B(B-1)^2\,(3B^2+3B+1) = S(B^2)$ وَ $0 > -(B-1)^2 = S(1)$ ؛

فيكون إذاً لـِ S جذرٌ x_0 بين B^2 وَ 1 ، كما أنَّ $\theta_{4,m} \geq 0$ تعادل:

$\cos^2\alpha_0(\beta) = A^2 \leq x_0$. وهذا ما يعادل الشرط : $\alpha \geq \alpha_0(\beta)$ ، مع:

$$\cos^2\alpha_0(\beta) = \frac{\cos\beta\cos\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{2\cos\beta}}{3\cos\beta - 1} = 2\cos\frac{\beta}{2}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta}}} \qquad (13)$$ ،

أي: $tg^2\alpha_0(\beta) = \sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\;\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta}}$.

نرى أنَّ $\alpha_0(0) = 0$ وأنَّ $\alpha_0^2 \approx \frac{\beta^2\sqrt{2}}{4}$ إذا كانت β تسعى إلى 0؛ وهكذا يكون:

$\left.\frac{d\alpha_0}{d\beta}\right|_{\beta=0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} = 0{,}594603558$ وَ $\left.\frac{d\beta}{d\alpha_0}\right|_{\alpha_0=0} = \sqrt[4]{8} = 1{,}68179283$.

ويكون معنا أيضاً: $\alpha_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ وَ $\left.\frac{d\beta}{d\alpha_0}\right|_{\alpha_0=\frac{\pi}{2}} = \lim_{\alpha_0 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha_0} = 0$.

لقد رسمنا على الشكل ٥٠ الخط البياني لـِ α_0 كما رسمنا على الشكل ٥١ الحد الموافق للنقطة Ω.

يتمّ الحصول على القيمة العظمى $\theta_{4\,M}$ لـِ θ_4 عندما يكون $\lambda = 0$، وهي القيمة التي رمزنا إليها بـِ θ_4 في شرح القضية ١٤.

القسم الرابع: أمثلة

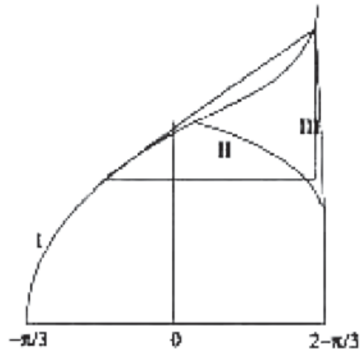
لقد اخترنا نفس القيم العددية التي اخترناها في شرح القضية ١٤: $\beta = \frac{\pi}{3}$ وَ $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ؛ $\frac{\pi}{3}$ ؛ 1؛ 0,8 ؛ 0,75 ؛ $\frac{\pi}{5}$ ؛ 0,55 ؛ 0,524 وَ $\frac{\pi}{12}$ (الأشكال ذات الأرقام من ٦٧ إلى ٧٥).

يكون معنا : $\alpha_0\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}649766287$ بين 0,75 وَ $\frac{\pi}{5}$ وَ $\alpha_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}932458266$، بين 1 وَ 0,8 . لقد رسمنا على الأشكال ذات الأرقام من ٦٩ إلى ٧٥ ثلاثة خطوط مُنْحَنِيَة مُرقَّمة بـِ I، II ، III على التوالي. الخط المنحني I هو الخط البياني لـِ ψ كدالة للمتغيّر θ؛ وهو مرسوم بين النقطة $(-\beta, 0)$ والنقطة $(2\alpha - \beta, \pi)$، إذ إنَّ الدالـَّة تزايدية. والخط المنحني II هو الخط البياني لـِ λ_1 كدالة للمتغيّر θ؛ وهو مرسوم بين النقطة (θ_0, λ_0)، نقطة انحراف الخط I، والنقطة $(2\alpha - \beta, \lambda_{1m})$ ؛ ويكتمل هذا الخط بالخط المستقيم العمودي:

$\theta = 2\alpha - \beta$، $0 \leq \lambda \leq \lambda_{1,m}$.

والخطُّ المماسّ للخط المنحني I على النقطة ذات الإحداثية الثانية العمودية λ_1 يقطع من جديد هذا الخط على النقطة ذات الإحداثية الأولى الأفقية θ (الأشكال ذات الأرقام من ٦٩ إلى ٧١)؛ والدالة λ_1 هي تناقصية للمتغير θ. والخط المنحني III هو المكان الذي تتحرّك فيه النقاط (θ_4, λ)؛ وهو يصل بين النقطة $(\theta_{4,m}, \lambda_{4,m})$ والنقطة $(\theta_{4,M}\ ,\ 0)$. والدالة λ هي تناقصيّة للمتغيِّر θ_4.

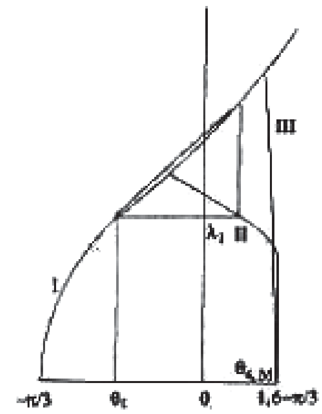
وتكون المتباينة الأولى لابن الهيثم صحيحة عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخطين المنحنيين I وَ III ، بينما تكون المتباينة الثانية صحيحة عندما تكون النقطة (θ, λ) تحت الخطين المنحنيين I وَ II . وهكذا تكون هاتان المتباينتان محقَّقتين في المنطقة المُحَدَّبة الموجودة تحت الخطوط الثلاثة I ، II وَ III.



الشكل ٦٩ : $\alpha = 1$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = 0,220685446$ ، $\lambda_0 = 1,37400009$

$\theta_{1,m} = -0,833589085$ ، $\lambda_{1,m} = 0,663153782$ ، $\theta_{4,m} = 0,876987428$ ،

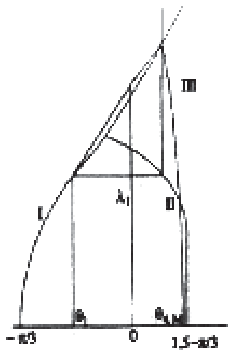
$\lambda_{4,m} = 1,92921309$ ، $\theta_{4,M} = 0,9500790346$



الشكل ٧٠ : $\alpha = 0,8$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,237427409$ ،

$\lambda_0 = 1,333256925$ ، $\theta_{1,m} = -0,8722605915$ ، $\lambda_{1,m} = 0,644350074$ ،

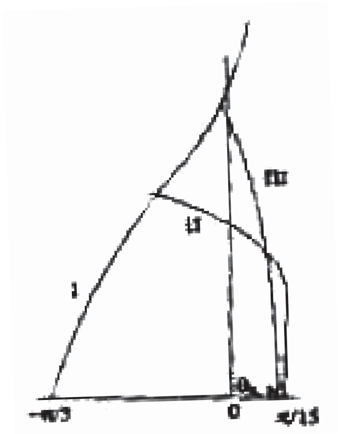
$\theta_{4,m} = 0,349257621$ ، $\lambda_{4,m} = 1,98972898$ ، $\theta_{4,M} = 0,537776499$



الشكل ٧١ : $\alpha = 0,75$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = 0,306153376$ ، $\lambda_0 = 1,33286849$ ؛

$\theta_{1,m} = -0,881787545$ ، $\lambda_{1,m} = 0,642761272$ ؛ $\theta_{4,m} = 0,4346042281$ ،

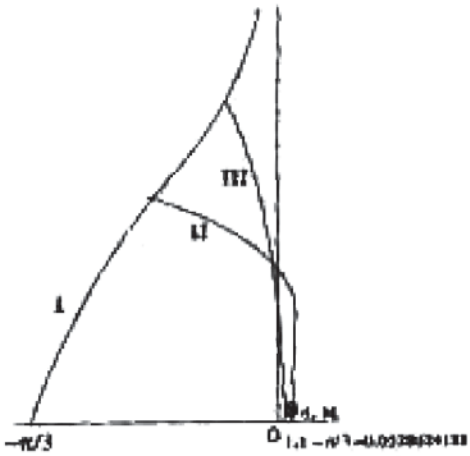
$\lambda_{4,m} = 1,97974742$ ؛ $\theta_{4,M} = 0,229510063$



الشكل ٧٢ : $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,450887379$ ، $\lambda_0 = 1,3408219$

$\theta_{1,m} = -0,904851513$ ، $\lambda_{1,m} = 0,644432659$ ، $\theta_{4,m} = -0,0472107752$ ،

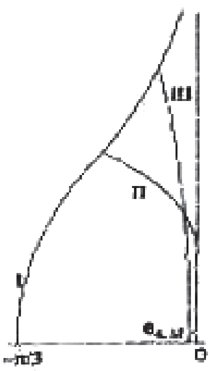
$\lambda_{4,m} = 1,93620825$ ، $\theta_{4,M} = 0,1831447956$



الشكل ٧٣ : $\alpha = 0,55$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,53311435$ ، $\lambda_0 = 1,35133667$

$\theta_{1,m} = -0,919752538$ ، $\lambda_{1,m} = 0,649924588$ ، $\theta_{4,m} = -0,213335252$ ،

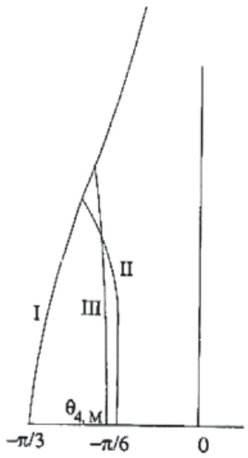
$\lambda_{4,m} = 1,89753524$ ، $\theta_{4,M} = 0,0211388793$



الشكل ٧٤ : $\alpha = 0,524$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,55910491$ ، $\lambda_0 = 1,35583723$

$\theta_{1,m} = -0,9247411$ ، $\lambda_{1,m} = 0,652562409$ ، $\theta_{4,m} = -0,266150532$ ، $\lambda_{4,m} = 1,88337596$ ،

$\theta_{4,M} = -0,0326171933$



الشكل ٧٥ : $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ، $\beta = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\theta_0 = -0,801761542$ ، $\lambda_0 = 1,43427582$
$\theta_{1,m} = -0,978448494$ ، $\lambda_{1,m} = 0,704691461$ ، $\theta_{4,m} = -0,724212075$ ،
$\lambda_{4,m} = 1,72529646$ ، $\theta_{4,M} = -0,566379471$

إنَّ هذه الدراسةَ التحليلية الطويلة، الموضَّحةَ بالأمثال والأشكال، تـُبيِّن أنَّ أقوال ابن الهيثم تـُعَبِّر عن اتجاه التغيُّر لبعض الدوال المتسامية (*fonctions transcendantes*) الكثيرة التعقيد. إنَّ صحّة هذه القضايا خاضعةٌ لبعض الشروط التي لم يكن باستطاعة ابن الهيثم توضيحها؛ وذلك أنَّ صياغتها تتعلـّق برياضيات لم ترَ النور إلا بعد ثمانية قرون من عصره.

ويبقى أنَّ دراسةَ تغيُّر الدوال المثلثاتية، التي قام بها ابن الهيثم بسبب حاجته إليها في بحوثه الفلكية، فتحت الباب أمام ميدان جديد للبحث الرياضي، حيث تـُنَسَّق الطرائق التي يمكن أن تتعلـّق في آن واحد بالدوال وبالمتناهيات في الصغر.

٢- علم الفلك

يشرع ابن الهيثم مباشرة، في هذا القسم الثاني من كتابه، في دراسة الحركات الظاهرة للكواكب السبعة؛ وهو يبدأ بدراسة النيِّرين.

٢-١- الحركة الظاهرة للكواكب السبعة

حركة القمر

يُذكِّر ابن الهيثم أولاً ببعض النتائج التي أثبتها بطلميوس، لكنه لا يَتَبَنَّى الهيئات الفلكية التي عرضها هذا الأخير في كتاب "المجسطي"، ولا سيَّما أنه قد انتقدها في كتاب "الشكوك على بطلميوس"[١٦]. لنذكِّر الآن ببعض هذه النتائج المعروضة من قبل ابن الهيثم.

- إنَّ مركز القمر، في حركته الظاهرة على الكرة السماوية، يبقى في مستوي دائرة عظمى تحمل اسم الفلك المائل.
- الفلك المائل يقطع دائرة فلك البروج وفقاً لخط العقدتين $N'N$ (انظر الشكل ٧٦)، ويُشكِّل زاوية مع مستوي فلك البروج. اعتبر ابن الهيثم هذه الزاوية ثابتة. وهي في الحقيقة تتغيّر قليلاً جداً وتبقى قريبة من ٥ درجات. وهكذا يبقى الفلك المائل ضمن منطقة البروج.

  وتحدث حركةُ مركز القمر على فلكه المائل بالاتجاه المباشر، أي باتجاه توالي البروج (مدَّة الدورة الكاملة عليه تساوي شهراً).
- وتحدث حركة كل من العقدتين على دائرة البروج بالاتجاه التراجعي، أي إلى خلاف توالي فلك البروج (مدَّة الدورة الكاملة عليه تساوي ثماني عشرة سنة وثمانية أشهر).
- مستوي الفلك المائل يدور حول محور قطبي فلك البروج، وكل نقطة من الفلك المائل للقمر ترسم دائرة حول هذا المحور.
- إذا أرجعنا فلك القمر المائل إلى دائرة معدّل النهار نبيِّن أنَّ فلك البروج يُشكِّل مع مستوي معدّل النهار زاوية قدرها ٢٤ درجة وفقاً لبطلميوس، وَ '٣٣ °٢٣ وفقاً لحساب

---

[١٦] انظر : الشكوك على بطلميوس"، تحقيق ع. صبرة وَ ن. شهابي (القاهرة ١٩٧١)، ص. ١٥-١٩.

علماء فلك القرن التاسع، وَ ٢٧' ٢٣° وفقاً للحسابات الأكثر تأخّراً؛ كما أنَّ مستوي فلك البروج يقطع مستوي معدّل النهار وفقاً للقطر $\gamma\gamma'$ (γ وَ γ' هما نقطتا الاعتداليْن).

- الفلك المائل يقطع مستوي معدّل النهار وفقاً لقطر هو MM'.
- إنَّ ميلَ الفلك المائل للقمر بالنسبة إلى معدّل النهار متغيِّرٌ، لأن العقدتين N وَ N' ترسمان فلك البروج.

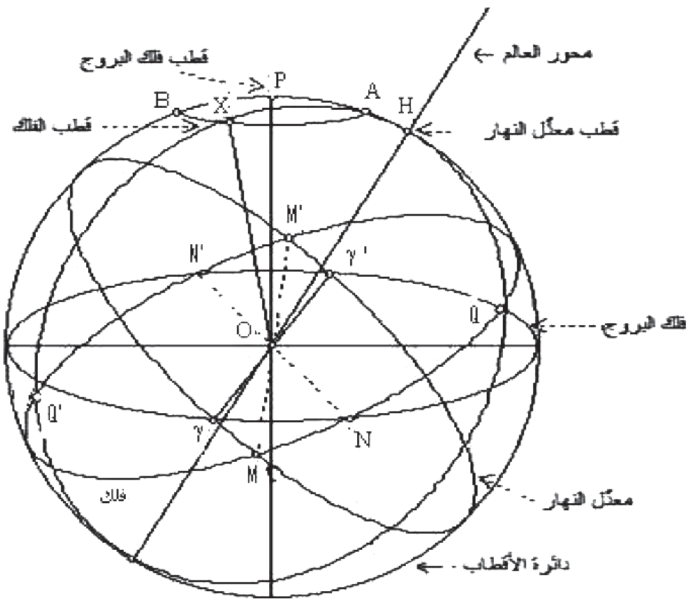
وهكذا فإنَّ ابن الهيثم، بعد أن ذكَّر بهذه النتائج التي اعتبرها مُثبَتَةً- باستثناء النتائج الأخرى التي عرضها بطلميوس- وبعد أن وضَّح المصطلحات، شرع في إعداد الهيئات لحركات الكواكب، بادئاً بهيئة القمر. ولكنه أدخل، لأجل ذلك، مفهوماً جديداً، وهو مفهوم "الزمان المُحصَّل". وهو يرمز بهذه العبارة إلى مدّة الحركة اليومية للقمر(أو لأيِّ كوكب بشكل عام) من معدّل النهار إلى دائرة نصف النهار، وهذه المدّة مُمَثّلَة بقوس من دائرة. كل الحركات التي تدخل في تركيب الحركات الظاهرة هي دائرية مستوية، وهذا ما يسمح تحديداً بقياس الزمن المحصَّل بقوس من دائرة، فيُمكن بذلك إخضاع الزمن المحصَّل لنظرية النسب.

إنَّ الحركة الظاهرة للقمر معقَّدة. وهي نتيجة لثلاث حركات. **الحركة الأولى** هي في مستوي الفلك المائل من الشمال إلى الجنوب، وبالعكس، بالنسبة إلى معدّل النهار- اتجاه هذه الحركة مباشر، أي من الغرب نحو الشرق. **الحركة الثانية** هي حركة الفلك المائل نفسه حول محور فلك البروج أي حركة العقدة. **والحركة الثالثة**، أخيراً، هي الحركة اليومية.

هذا التركيب يولِّد ظاهرة أثارت اهتمام ابن الهيثم إلى حد بعيد. لنفرض أنَّ القمر موجود على النقطة B من فلكه. والنقطة B هي نقطة على الكرة السماوية، فهي تنتقل إذاً بالحركة اليومية على دائرة موازية لدائرة معدّل النهار. والقمر يُشارك أيضاً في هذه الحركة. والنقطة B هي نقطة على الفلك المائل، فهي إذاً خاضعة أيضاً لحركة العقدة على دائرة موازية لفلك البروج. والقمرُ نفسه أيضاً خاضعٌ لهذه الحركة. وهو يتحرَّك، بالإضافة إلى ذلك، بحركته الخاصة على الفلك المائل. وهكذا، فإنَّ النقطة التي تبلغها النقطة B بعد فترة t من الزمن، لا يُمكن أن تتطابق مع النقطة التي يبلغها القمر. وهذا الابتعاد بين هاتين النقطتين هو الذي تجب معرفة كيفية تحديده، وهو الذي يُشكّل الموضوع الرئيسيّ لدراسة ابن الهيثم، كما سنرى فيما يلي.

القضية ١٦- ليكن O مركز العالم، P القطب الشمالي لفلك البروج وَ H القطب الشمالي لمعدّل النهار. الدائرة العظمى HP تُسمَّى دائرة الأقطاب.

إذا كانت النقطة X القطب الشمالي للفلك المائل، تكون الزاوية $\widehat{XOP}$ مساوية لميل الفلك بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، فإذاً $\widehat{POX} \cong 5°$ ، وهي الزاوية التي اعتبرها ابن الهيثم ثابتة. فإذاً عندما ترسم العقدة N فلك البروج يرسم القطب X دائرة حول المحور OP؛ وهذه الدائرة تقطع دائرة القطبين على نقطتين: A بين P وَ H، وَ B من الجهة الأخرى بالنسبة إلى النقطة P.



الشكل ٧٦

وإذا أخذنا أقواساً من دائرة عظمى، يكون معنا، لكل موضع للنقطة X:

$\widehat{PX} = \widehat{PB} = \widehat{PA}$ وَ $\widehat{HA} < \widehat{HX} < \widehat{HB}$.

تتزايد القوس $\widehat{HX}$ ، خلال الدوران، من $\widehat{HA}$ إلى $\widehat{HB}$ ، ثم تتناقص من $\widehat{HB}$ إلى $\widehat{HA}$.

ويكون: $\widehat{HB} \cong 23°27' + 5°$ وَ $\widehat{HA} \cong 23°27' - 5°$ ، وفقاً للقيم الحالية.

يقطع الفلك المائل دائرة معدّل النهار وفقاً للقطر MM'؛ فيكون للفلك المائل نصف دائرة شمال دائرة معدّل النهار ونصف دائرة جنوب دائرة معدّل النهار. يتوافق مُنتصَف نصف الدائرة الشمالي مع الحدّ الأقصى للميل الشمالي للقمر، ويتوافق مُنتصَف نصف الدائرة الجنوبي مع الحدّ الأقصى للميل الجنوبي للقمر. وهاتان النقطتان هما نقطتا التقاطع Q وَ Q'

للفلك المائل مع الدائرة العظمى المارّة بالنقطة H قطب دائرة معدّل النهار وبالنقطة X قطب الفلك المائل. فهما إذاً متغيِّرتان، ويكون الميلان الموافقان لهما متغيِّرين أيضاً.

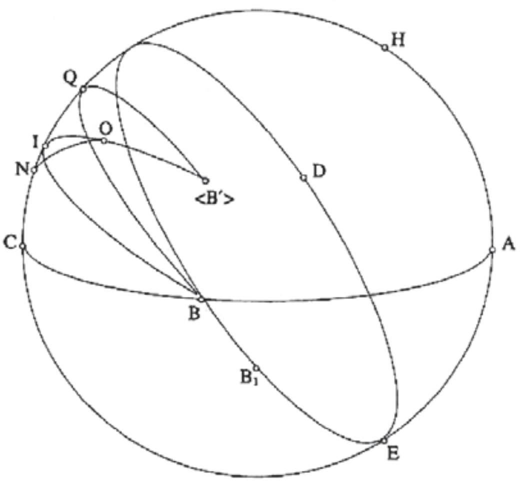
تحدث حركة القمر على فلكه باتجاه توالي البروج، بينما تحدث حركة العقدة N، كأيّ نقطة من الفلك المائل، حول محور فلك البروج OP، إلى خلاف توالي البروج[١٧].

دراسة حركة القمر بين شروقه ومروره على دائرة نصف النهار

ليكن ABC النصف الشرقي لدائرة الأفق وَ BED نصف فلك القمر الذي هو تحت الأفق، وليكن H القطب الشمالي لمعدّل النهار(الشكل ٧٧).

نفرض أنَّ القمر هو أولاً في النقطة B وأنه ينتقل على فلكه من الشمال نحو الجنوب، من النقطة B نحو النقطة E. (وهو يرسم كل يوم قوساً مقدارها $13°$ بالاتجاه المباشر).

نرسم الدائرة OIB[١٨] المارة بالنقطة B والتي لها القطب H (الشكل ٧٧).



الشكل ٧٧

ABC الأفق، AHC دائرة نصف النهار، BED الفلك المائل للقمر

H قطب دائرة معدّل النهار، BIO الدائرة الموازية لمعدِّل النهار

أ) إنَّ النقطة B على فلك القمر، تنتقل خلال الحركة اليومية (التي هي حركة سريعة)، على الدائرة BIO باتجاه خلاف توالي البروج، وتمرُّ على دائرة نصف النهار في النقطة I.

---

[١٧] الاتجاه من الغرب نحو الشرق هو اتجاه توالي البروج، أي الاتجاه المباشر حول محور العالم. أما الاتجاه من الشرق نحو الغرب فهو اتجاه خلاف توالي البروج، أي الاتجاه التراجعي.

[١٨] الحرف O هنا لا يرمز إلى نفس النقطة الموجودة في الشكل ٧٦.

يشارك القمر في الحركة اليومية، ولكنه لا يبقى في النقطة B من الفلك. وعندما يصل إلى دائرة نصف النهار على النقطة N، تكون النقطة B قد تجاوزت النقطة I وتكون في النقطة O على الدائرة BI الموازية لدائرة معدّل النهار؛ فيكون القمر قد اجتاز على فلكه القوس $\widehat{BB_1}$ التي أصبحت في الوضع $\widehat{NO}$ غرب دائرة نصف النهار وجنوب الدائرة BIO الموازية لدائرة معدِّل النهار.

ب) وهذا يفرض أنَّ النقطة B تبقى على الدائرة BI الموازية لدائرة معدّل النهار، أيْ أنَّ ميلها بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار يبقى ثابتاً. ولكن B، نقطة الفلك، خاضعة **لحركة رأس الجوزهر** على فلك البروج (بالاتجاه التراجعي). نخرج من النقطة B قوساً من دائرة QB التي يكون قطبُها قطبَ دائرة البروج؛ الدائرة QB موازية لدائرة البروج، والنقطة B تنتقل إذاً على القوس $\widehat{BQ}$ وتخضع في نفس الوقت للحركة اليومية؛ فهي تصل إذاً إلى نقطة *مختلفة* بشكل عام عن النقطة O.

نفترض، على الشكل، أنَّ القطبين H وَ P موجودان فوق الأفق وأنَّ I وَ Q موجودتان على دائرة نصف النهار وفوق أفق النقطة B.

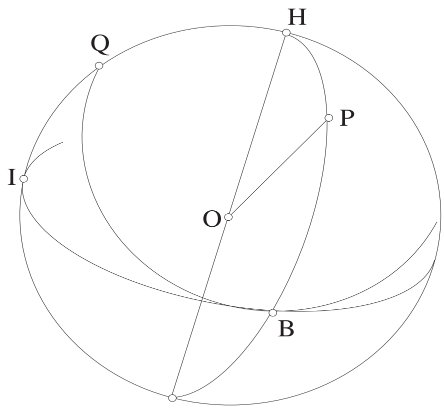
وضع الدائرة QB بالنسبة إلى الدائرة BI

- إذا كانت الدائرة العظمى الخارجة من النقطة H (وهي القطبُ الشمالي لدائرة معدّل النهار) حتّى النقطة B تمرّ بقطب فلك البروج P، تكون الدائرتان BI وَ BQ متماستين في النقطة B (الشكل ٧٨).

إذا كانت P بين H وَ B ، مع $\widehat{BP} < \widehat{BH}$ ، تكون الدائرة BQ عندئذ في شمال الدائرة BI.

إذا كان $\widehat{BP} > \widehat{BH}$ ، تكون الدائرة BQ عندئذ جنوب الدائرة BI.

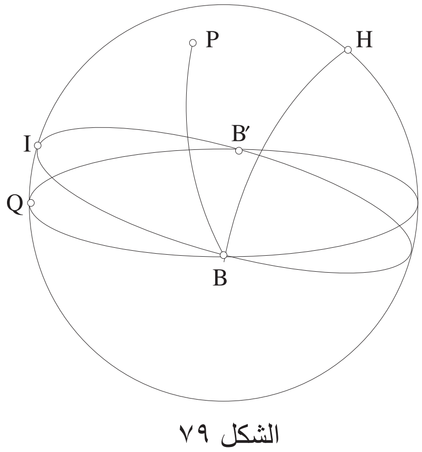
وتكون الدائرة BPH عمودية، في الحالتين، على الدائرتين BI وَ BQ.



الشكل ٧٨ : $\widehat{BP} < \widehat{BH}$

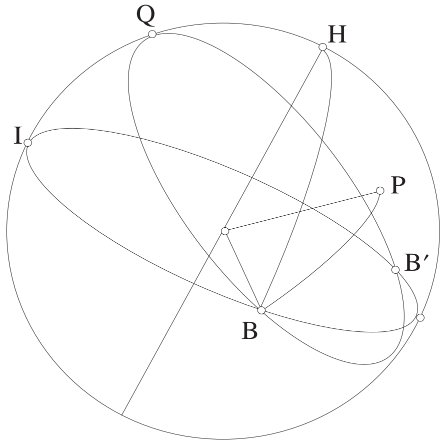
• إذا كانت الدائرة العظمى الخارجة من النقطة H حتّى النقطة B لا تمرّ بقطب فلك البروج P، تتقاطع الدائرتان BI وَ BQ على النقطة B وعلى نقطة ثانية B' (الشكل ٧٩).

• إذا كانت الدائرة العظمى، الخارجة من النقطة P إلى النقطة B تُشكّل مع القوس $\widehat{BI}$ زاوية حادّة، تكون $\widehat{PBI}$ حادّة فيكون عندئذ $\widehat{HBI} > \widehat{PBI}$ (زاوية قائمة)؛ فتكون القوس BQB' التي تقطع دائرة نصف النهار فوق الأفق، جنوب القوس $\widehat{BI}$ (الشكل ٨٠).



الشكل ٧٩

إذا كانت الزاوية $\widehat{PBI}$ منفرجة، يكون عندئذ $\widehat{PBI} > \widehat{HBI}$ ؛ والقوس $\widehat{BQB'}$ التي تقطع دائرة نصف النهار فوق الأفق تكون عندئذ شمال الدائرة BI.



الشكل ٨٠

ليكن t الزمن الذي يستغرقه القمر لينتقل من B إلى N ، ولتكن X القوس الخاصّة بحركة العقدة[١٩] خلال الزمن t. والقوس X صغيرة جداً، وهي قوس من الدائرة BQ. لتكن B' النقطة الثانية المشتركة بين الدائرتين BQ وَ BI.

* إذا كان $\widehat{BB'} = X$، تكون O عندئذ في B' وتكون $\widehat{ON}$ القوسَ التي يجتازها القمر على الفلك المائل خلال المدة t ($\widehat{BB_1} = \widehat{ON}$).

* إذا كان $\widehat{BB'} > X$، فإنّ النقطة B لا تبلغ النقطة B' في نهاية الزمن t، فلا تكون عندئذ قد رجعت إلى الدائرة BI.

* إذا كان $\widehat{BB'} < X$ ، فإنَّ النقطة B ترسم القوس $\widehat{BB'}$ من الدائرة BQ، وتبلغ النقطة B' على الدائرة BI، ثم تتجاوز النقطة B'.

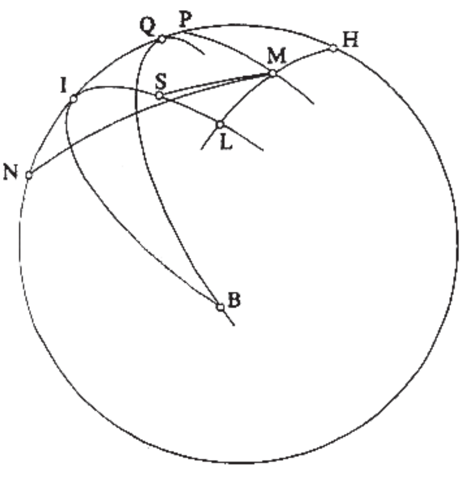
ويكون موضع B، في هاتين الحالتين الأخيرتين، مختلفاً عند نهاية الزمن t عن النقطة O. لتكن النقطة M موضع النقطة B على الدائرة BQ عند نهاية الزمن t، أي في اللحظة التي يمرّ فيها القمر على دائرة نصف النهار في النقطة N. فيُمكن إذاً أن تكون النقطة M في O على الدائرة BI في الحالة الأولى ($B' = M = O$)، كما يُمكن أن تكون شمال الدائرة BI أو جنوبها في الحالتين الأخريين.

[١٩] نحن نعرف أنَّ حركة العقدة تقبل قوساً مقدارها ٣' في اليوم بالاتجاه المخالف لتوالي البروج (انظر: "في ذكر الأفلاك" ضمن: Régis Morelon [Paris, 1987] *Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie*، ص.21).

إذا كان t الزمن الذي ينتقل خلاله القمر من B إلى N، فإن t تكون ممثّلة بالقوس $\widehat{BS}$ من الدائرة BI. فالنقطة B، على الدائرة BQ، تبلغ النقطة S على الدائرة BI، والنقطة B التي على الفلك تبلغ النقطة M (الشكل ٨١-١ والشكل ٨١-٢).

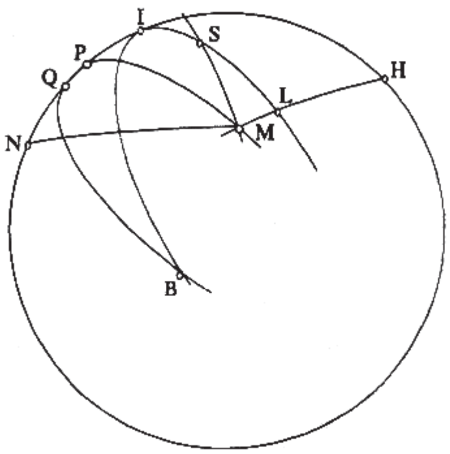
القوس $\widehat{SM}$ هي القوس التي تقطعها النقطة B من الفلك خلال الزمن t وفقاً لحركة العقدة.

والقوس $\widehat{MN}$ هي، من جهة أخرى، القوس التي يقطعها القمر على فلكه خلال الزمن t.



الشكل ٨١-١

أ) النقطة M هي شمال الدائرة IB



الشكل ٨١-٢

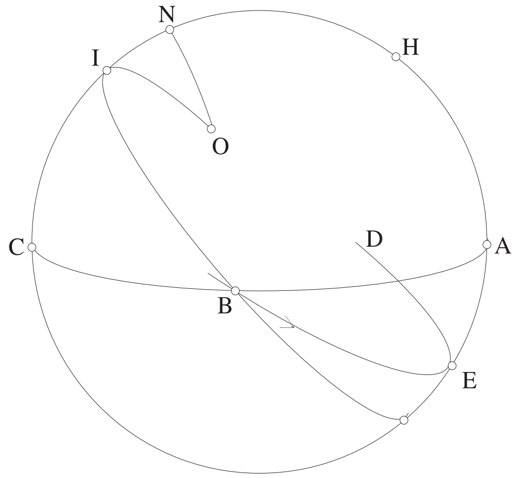
ب) النقطة M هي جنوب الدائرة IB

نُخرِج من النقطة H، قطبِ دائرة معدّل النهار، الدائرةَ العظمى MH التي تقطع الدائرة IB الموازية لدائرة معدّل النهار على النقطة L. ونخرج من النقطة M الدائرةَ الموازية لدائرة معدّل النهار التي تقطع دائرة نصف النهار على النقطة P [٢٠]. وتكون $\widehat{NP}$، في الحالتين، ميلَ القوس $\widehat{MN}$. ويكون معنا $\widehat{LM} = \widehat{PI}$، وهذه القيمة مساوية لميل القوس $\widehat{MS}$.

نفترض أنَّ القمر ينتقل من B نحو E وأنَّ حركته هي من الجنوب نحو الشمال؛ فتكون القوس $\widehat{BED}$ من فلكه شمال الدائرة BI (الشكل ٨٢). والقوس $\widehat{BED}$ هي، وفقاً للفرضيات، تحت الأفق. ترسم النقطة B الدائرةَ BI خلال الحركة اليومية. والقمر الذي ينتقل على فلكه يترك الدائرة BI ويتَّجه نحو شمال هذه الدائرة. يبلغ القمر دائرة نصف النهار في النقطة N شمال I؛ وتصل النقطة B عندئذ إلى النقطة O. وقوس الفلك المائل الذي يرسمه القمر يصبح

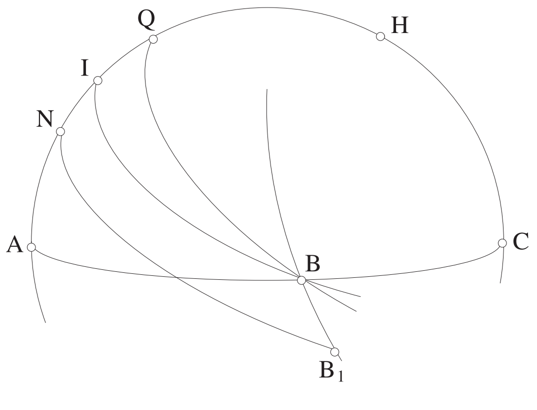
[٢٠] الحرف P لا يرمز إلى نفس النقطة التي رمز إليها سابقاً، ولا يرمز إلى قطب فلك البروج.

في الموضع $\widehat{NO}$ إذا لم نأخذ بعين الاعتبار حركة العقدة. ويمكن أن نتابع الدراسة بعد ذلك، كما فعلنا في الحالة الأولى، آخذين بعين الاعتبار حركة العقدة.



الشكل ٨٢

والخلاصة هي أنَّه إذا كانت حركة القمر على فلكه من الشمال نحو الجنوب، فإنَّ النقطة N تكون عندئذ في جنوب الدائرة BI وتكون M في شمال أو في جنوب الدائرة BI. وإذا كانت حركة القمر على فلكه من الجنوب نحو الشمال، فإنَّ النقطة N تكون عندئذ شمال الدائرة BI وتكون M شمال هذه الدائرة أو جنوبها. يُمكننا إذاً أنْ نعطي التعاريف التالية:



الشكل ٨٣

I: نقطة مرور B على دائرة نصف النهار

N: نقطة مرور القمر على دائرة نصف النهار

Q: نقطة تقاطع الدائرة BQ (حركة العقدة) مع دائرة نصف النهار

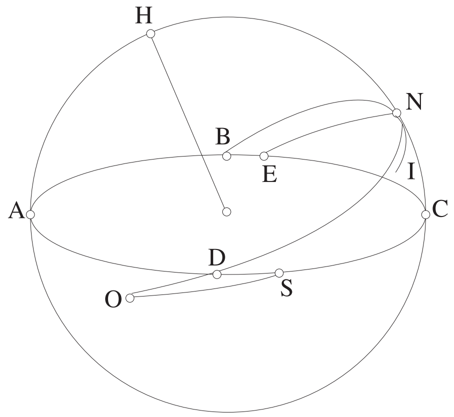
$\widehat{BI}$: الزمن المحصَّل: الزمن الذي تستغرقه النقطة B (أو القمر على معدّل النهار السماوي) المتحرِّكة بالحركة اليومية، لكي تبلغ دائرة نصف النهار

$\widehat{NI}$: ميل حركة القمر

$\widehat{QI}$: ميل حركة العقدة

دراسة حركة القمر بين مروره على دائرة نصف النهار وغروبه

يكون معنا : الأفق هو $ABCD$ ، A في الشمال، B في الشرق، C في الجنوب، D في الغرب (الشكل ٨٤).



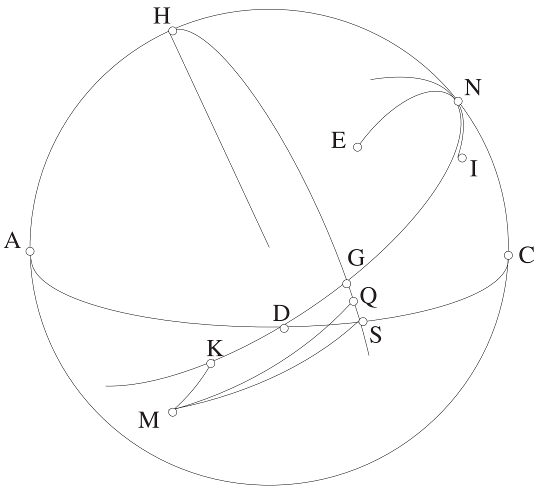
الشكل ٨٤

القمر هو في النقطة N على دائرة نصف النهار؛ لتكن DNB الدائرة المارة بـِ N الموازية لدائرة معدّل النهار، ولتكن $\widehat{NE}$ قوساً من الفلك ولتكن $\widehat{IN}$ القوس التي ترسمها N وفقاً لحركة العقدة.

وتكون N قد تجاوزت النقطة D عندما يبلغ القمرُ الأفقَ في النقطة S، فتُصبحُ القوس $\widehat{NE}$ التي يرسمها القمر على فلكه في الموضِع $\widehat{OS}$.

(رُسِمَ الشكل في الحالة التي تكون فيها القوس $\widehat{NE}$ جنوبَ الدائرة DNB، حيث ينتقل القمر من N إلى E، فتكون عندئذ القوس $\widehat{OS}$ جنوب الدائرة DNB).

إذا أخذنا بعين الاعتبار حركة العقدة، يكون موضعُ النقطة N، عندما يبلغ القمرُ الأفقَ، غيرَ مُطابِق، بشكل عام، للنقطة O. وليكن هذا الموضع في النقطة M [٢١].



الشكل ٨٥

إذا أخذنا بعين الاعتبار الحركاتِ الثلاثَ، وإذا كانت القوسُ $\widehat{KN}$ الزمنَ المحصَّلَ الذي يستغرقه القمر في انتقاله من N إلى نقطة الأفق S، تكون قوسُ حركة العقدة $\widehat{IN}$ قد وصلت إلى الموضع $\widehat{MK}$ وتكون القوس $\widehat{EN}$ قد وصلت إلى الموضع $\widehat{MS}$ (الشكل ٨٥).

نُخرِج الدائرة العظمى SH التي تقطع الدائرة DN على النقطة G، ونخرج من النقطة M دائرة زمانية تقطع القوس $\widehat{SH}$ على النقطة Q: القوس $\widehat{DN}$ هو الزمن المحصَّل. $\widehat{SG}$ هو ميل القوس $\widehat{SN}$ الذي يرسمه القمر (أو ميل حركة القمر). $\widehat{QG}$ هو ميل القوس $\widehat{MK}$ (أو ميل حركة العقدة).

حركة الشمس

القضية ١٧- يبدأ ابن الهيثم هنا، كما فعل بصدد حركة القمر، بتعريف المصطلحات وعرض المبادئ وتحديد مختلف الحركات التي تتركَّب منها حركة الشمس. يتعلَّق الأمر هذه

[٢١] إن النص يحتفظ، في هذه الحالة، بالحرف S.

المرة بحركتين: الحركة اليومية وحركة الشمس الخاصة على فلك البروج. إنَّ الهيئة المُقترَحة لحركة الشمس هي إذاً أكثر بساطة من تلك التي أعدَّت لحركة القمر.

تتحرَّك الشمس على فلك البروج باتجاه توالي البروج، الذي هو الاتجاه المباشر، حول محور فلك البروج الموجَّه نحو الشمال.

تقطع دائرةُ البروج دائرةَ معدّل النهار على نقطتي الاعتدال γ وَ γ'. يعتبر ابن الهيثم أنَّ النقطتين γ وَ γ' ثابتتان(انظر الملاحظة).

تنقسم دائرة البروج إلى أربع أقواس متساوية بالقطر $\gamma\gamma'$ وبالقطر $\sigma\sigma'$ الذي يصل بين نقطتيْ الانقلابيْن:

النقطة σ شمال دائرة معدّل النهار، هي نقطة الانقلاب الصيفي، وهي نقطة فلك البروج التي لها الميل الشمالي الأقصى.

النقطة σ' جنوب دائرة معدّل النهار، هي نقطة الانقلاب الشتوي، وهي نقطة فلك البروج التي لها الميل الجنوبي الأقصى (توجَد σ وَ σ' في المستوي الذي يحتوي على قطبيْ دائرة معدّل النهار وقطبيْ دائرة البروج).

ملاحظة: يُمكن أن نعتبر مستوي فلك البروج ثابتاً بالنسبة إلى النجوم، ولكن الأمر مُختلف بالنسبة إلى مستوي دائرة معدّل النهار، وذلك بسبب ظاهرة الحركة البطيئة لخط العقدتين[٢٢].

تنتقل النقطة γ على فلك البروج بالاتجاه التراجعي وتُتِمُّ دورة كاملة خلال ٢٦٠٠٠ سنة، ولذلك يحدث الاعتدال في كل سنة قبل أوانِ الاعتدال في السنة السابقة.

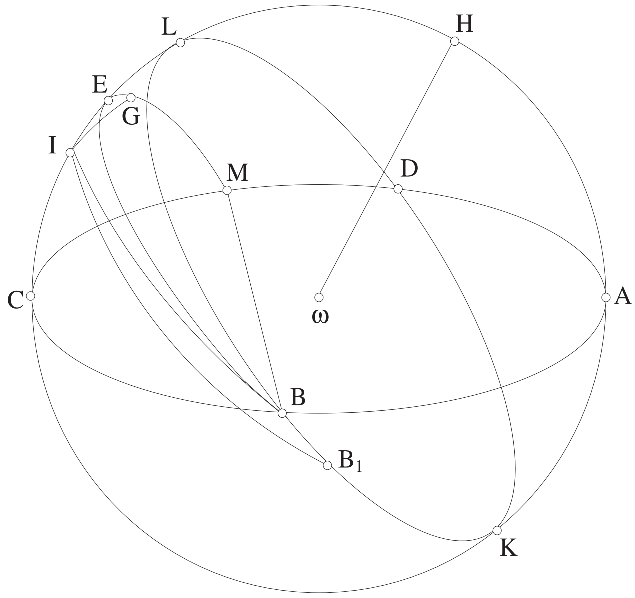
وهكذا فإنَّ ابن الهيثم، بعد أن ذكَّر بالمصطلحات وبالمبادئ، أعدَّ هيئةً لحركة الشمس من شروقها إلى نقطة اختيارية على الأفق وحتَّى مرورها على دائرة نصف النهار. ولقد أورد بالتتابع الحالتين التاليتين:

---

[٢٢] تُسمَّى هذه الحركة مبادرة الاعتدالين، وفقاً للمصطلحات الحديثة (المترجم).

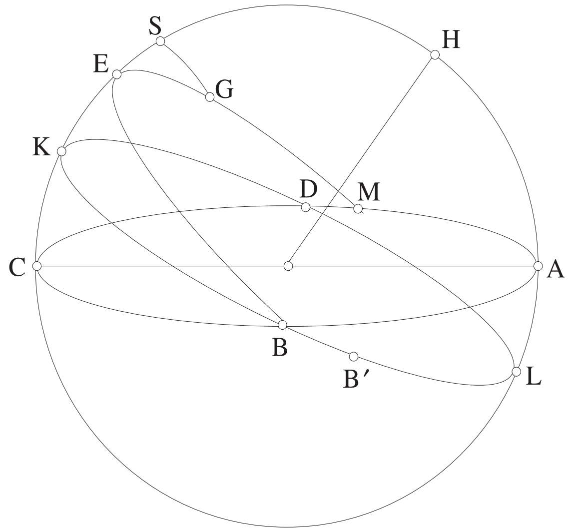
لتكن $ABCD$ دائرة الأفق، ولتكن $BKDL$ دائرة البروج . نفترض أولاً أنَّ K تحت الأفق وأنَّ L فوقه. ويكون توالي البروج وفقاً للترتيب B، K، D، L.

وقطر دائرة معدّل النهار هو AC، وقطبها الشمالي هو H. ونفترض أنَّ النقطة B هي الموضع الأوَّلي للشمس. لتكن BEM الدائرة الموازية لمعدّل النهار التي تمرّ بالنقطة B والتي تقطع دائرة نصف النهار على النقطة E. النقطة B ترسم هذه الدائرة، خلال حركتها اليومية، بالاتجاه التراجعي حول المحور ωH (ω هو مركز كرة العالم). إنَّ الشمس تنتقل على دائرة البروج من B نحو K عندما ترسم النقطة B القوس $\widehat{BE}$ ؛ فلتكن النقطة B_1 موضع الشمس على فلك البروج عندما تبلغ النقطة B النقطة E. تكون الشمس إذاً متأخِّرة عن النقطة B في حركتها اليومية؛ وعندما تمرُّ الشمس بدائرة نصف النهار على النقطة I، تكون النقطة B قد بلغت النقطة G على الدائرة BEM، حيث تكون G غرب دائرة نصف النهار. تكون القوس $\widehat{BB_1}$ من فلك البروج قد وصلت عندئذ إلى الموضع $\widehat{GI}$، وتكون I جنوب النقطة E. وتكون القوس $\widehat{BB_1}$ من فلك البروج قد وصلت إذاً إلى الوضع $\widehat{GI}$، غرب دائرة نصف النهار. فالشمس ترسم، إذاً، على الكرة السماوية القوسَ $\widehat{BI}$ المحصورةَ بين الدائرتين، BE و IB_1، الموازيتين لمعدِّل النهار. القوس $\widehat{BG}$ هي الزمن الذي تستغرقه الشمس لتنتقل من النقطة B إلى النقطة I. والقوس $\widehat{EI}$ هي ميل القوس $\widehat{GI}$ النسبة إلى دائرة BEM الموازية لمعدِّل النهار؛ والقوس $\widehat{EI}$ هي أيضاً ميل حركة الشمس في مسيرها من النقطة B إلى النقطة I. والقوس $\widehat{BE}$ تُسمَّى الزمن المحصَّل.



الشكل٨٦

نفترض أنَّ نصف الدائرة BKD فوق الأفق، وأنَّ الحركة الخاصة للشمس تحدث من B نحو L. يكون توالي البروج في هذه الحالة وفقاً للترتيب : B، L، D وَ K.



الشكل ٨٧

تبلغ النقطة B دائرة نصف النهار في النقطة E، وتكون في النقطة G عندما تبلغ الشمس دائرة نصف النهار في النقطة S. والقوس $\widehat{SG}$ التي تجتازها الشمسُ على فلك البروج تكون غرب دائرة نصف النهار وشمال الدائرة MEB الموازية لمعدِّل النهار. القوس $\widehat{EB}$ هي الزمن المحصَّل، والقوس $\widehat{ES}$ هي ميل حركة الشمس بالنسبة إلى الدائرة الزمانيَّة MEB.

حركة الكواكب

القضية ١٨- إنَّ ميل الفلك، لكلِّ من الكواكب المريخ والمشتري وزُحل، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج لا يتغيَّر بقدر محسوس.

أمّا ميل الفلك، لكلِّ من كوكبيْ عطارد والزهرة، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، فإنَّه يتغيَّر. وذلك أنَّ مستوي هذا الفلك يتأرجح حول خط العقدتين على جهتيْ فلك البروج. ويبقى هذا الميل محصوراً بين 0 وحدٍّ أقصى مُعَيَّن[٢٣].

إنَّ ميل كل من الكواكب الخمسة، الذي هو متغيِّر لعطارد والزهرة ويُعتبَر ثابتاً للمريخ والمشتري وزُحل، يُشكِّل في جميع الحالات جُزءاً صغيراً من ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

إنَّ ميلَ كلّ من هذه الأفلاك متغيِّرٌ بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، كما هي حال فلك القمر، ولا يُمكن لأيّ من هذه الأفلاك أنْ يتطابق مع مستوي معدل النهار.

كلٌ فلك من هذه الأفلاك يقطع مستوي فلك البروج وفقاً لخط العقدتين، ويدور حول محور فلك البروج بحركة بطيئة جداً.

حركة كل كوكب من الكواكب الخمسة على فلكه المائل بالنسبة إلى دائرة البروج

إذا كانت الحركة تحدث بالاتجاه المباشر، أي باتجاه توالي البروج، فإنَّ الكوكب يتحرَّك من الغرب نحو الشرق، من الشمال نحو الجنوب ومن الجنوب نحو الشمال بالنسبة إلى قطبيْ دائرة معدّل النهار، كما هي حال حركة القمر على فلكه. ولكن اختلافاً مُهماً، بين حركة كوكب ما وحركة القمر، يحدث بسبب ميل فلك تدوير كل كوكب بالنسبة إلى مستوي الفلك، إذ إنَّ مركز الكوكب يبتعد عن مستوي الفلك نحو الشمال أو نحو الجنوب.

وإذا كان الكوكب يتحرَّك باتجاه تراجعيّ، أيْ إذا كانت حركته بالنسبة إلى فلك البروج تحدث بالاتجاه المخالف لتوالي البروج، فإنه يتحرَّك من الشرق نحو الغرب. وهذا لا يُغيِّر شيئاً في دراسة الميل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار أو بالنسبة إلى دائرة زمانية.

---

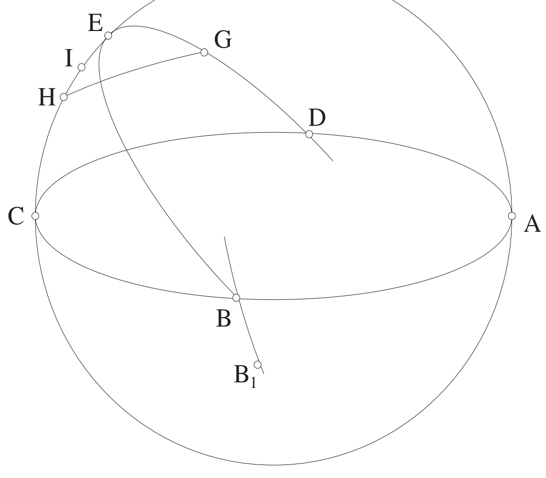
[٢٣] إنَّ الحد الأقصى لميل الفلك المائل بالنسبة إلى فلك البروج هو 7 درجات لعطارد وَ ′3°24 للزُهرة. أما بالنسبة إلى الكواكب العلوية، فإنَّ هذا الميل ثابت تقريباً، وهو يساوي للمريخ ′1°51 وَ ′1°19 للمشتري وَ ′2°30 لزحل.

التوقّف بين التراجع والتقدّم (المُراوحة)

إننا لا نرصد خلال هذا التوقُّف أيَّة حركة في الطول بالاتجاه المباشر أو بالاتجاه التراجعي، ولكن يُمكن أن نرصد تغيُّراً في العرض سببه ميل فلك التدوير.

إذا كانت ABC دائرة الأفق، وكانت النقطة B على الفلك المائل موضعَ الكوكب في لحظة معلومة، وكانت BED الدائرة الزمانية للنقطة B، فإنَّ الكوكب يتحرَّك بالحركة اليومية في جميع الحالات على فلكه نحو دائرة نصف النهار، وتكون له حركته الخاصة على فلكه.

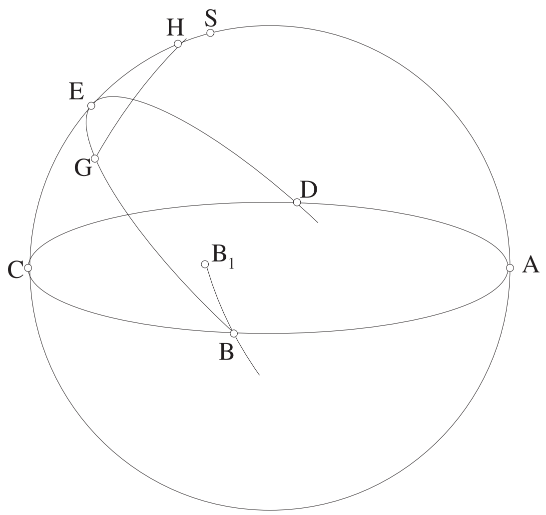
إذا تحرَّك الكوكب بالاتجاه المباشر من B إلى B_1 ، فإن النقطة B تبلغ قبل الكوكب دائرةَ نصف النهار في النقطة E. وعندما تبلغ النقطةُ B_1، التي هي على الفلك المائل، دائرةَ نصف النهار في النقطةَ H، فإنَّ النقطة B تكون قد وصلت إلى النقطة G وتكون القوس $\widehat{BB_1}$ من الفلك قد وصلت إلى الموضع $\widehat{GH}$ غرب النقطة H شمال أو جنوب الدائرة BED .



الشكل ٨٨

إنَّ موضعَ الكوكب على فلك التدوير معلومٌ بواسطة القوس $\widehat{HI}$ شمال أو جنوب القوس $\widehat{GH}$. وينتقل الكوكب من النقطة B إلى النقطة I خلال الزمن $\widehat{GB}$؛ الزمن المحصَّل هو $\widehat{BE}$، وميل الحركة هو $\widehat{IE}$.

وإذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه التراجعي، فإنَّ الكوكب يصل إلى دائرة نصف النهار قبل وصول النقطة B إليها.



الشكل ٨٩

والقوس المرسومة على الفلك هي في الموضع $\widehat{GH}$ شرق النقطة H شمال أو جنوب الدائرة BED. وضع فلك التدوير معلوم بواسطة القوس $\widehat{SH}$ ، حيث تكون S شمال أو جنوب النقطة H.

إذا كانت النقطة B هي "نقطة المراوحة"، أي نقطة التوقُّف بين الحركة المباشرة والحركة التراجعية، فإنَّ الكوكب، خلال الزمن الذي يدوم فيه التوقُّف، لا يبتعد عندئذ عن الدائرة BED إلا بالمسافة الناتجة من ميل فلك التدوير، وهي المسافة التي يمكن أن لا تقدَّر بالحسّ. وإذا بلغ الكوكب دائرة نصف النهار، فإنَّ ذلك يكون في النقطة E.

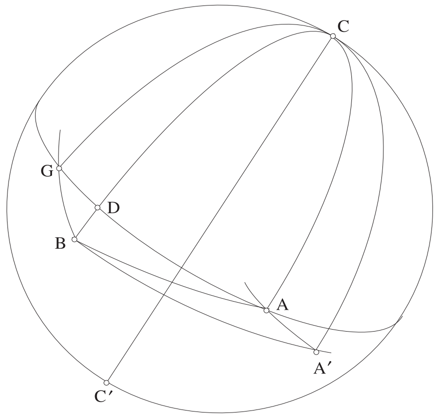
٢-٢- الزمن المُحَصَّل والميل

لتكن النقطة A الموضع الأوَّلي لكوكب في اللحظة المعلومة t_0، ولتكن B الموضِع الذي يكون فيه الكوكب بعد زمن معلوم t ، أي في اللحظة $t_0 + t = t_1$. ولتكن AC وَBC دائرتين عُظْمَيَيْن مارّتين بالنقطة C التي هي قطب دائرة معدّل النهار، ولتكن DA الدائرة الزمانية المارة بالنقطة A، حيث تكون D على الدائرة BC.

دراسة حالة الشمس أو حالة أحد الكواكب المتحيِّرة السبعة

القضية ١٩- إنَّ للشمس حركتها الخاصة على فلك البروج، كما أنَّ فلك البروج يدور حول محور القطبين CC'.

لتكن A موضع الشمس على دائرة البروج في لحظة معلومة t_0. تخضع النقطة A للحركة اليومية وترسم خلال الزمن المعلوم t قوسَ $\widehat{GA}$ من الدائرة الزمانية ؛ وهذا الزمن يُقاس بالقوس $\widehat{GA}$. تنتقل الشمس التي كانت في النقطة A على فلك البروج وترسم خلال الزمن t القوسَ $\widehat{AA'}$، ولكن فلك البروج يدور حول CC'، فتصل القوس $\widehat{AA'}$ في نهاية الزمن t إلى الموضع $\widehat{BG}$.



الشكل ٩٠

توجَد النقطة B على الدائرة الموازية لمعدِّل النهار المارة بالنقطة A'، وتكون الزاويتان اللتان تُشكِّلهما الدائرة DA الموازية لمعدِّل النهار مع القوسين $\widehat{BG}$ وَ $\widehat{AA'}$ متساويتين.

إنَّ مواضع A وَ G وَ B معلومة، فالأقواس $\widehat{AC}$ وَ $\widehat{GC}$ وَ $\widehat{BC}$ هي إذاً معلومة وَيكون: $\widehat{AC} = \widehat{GC}$، فتكون القوس $\widehat{BD} = \widehat{CB} - \widehat{CA}$، إذاً، معلومة.

والنقطة G هي الموضع الذي تبلغه النقطة A في نهاية الزمن t، والنقطة D توافق النقطة B، أيْ الموضع الذي تبلغه الشمس. القوس $\widehat{DG}$ تكون إذاً معلومة وتُمَثِّل تَقَدُّم النقطة A على الشمس في حركتها اليومية.

والشمس ترسم على الكرة السماوية القوس $\widehat{BA}$ الموجودة بين النقطة B والدائرة الزمانية DA (أي بين الدائرتين DA وَ BA' الموازيتين لمعدِّل النهار). والحركة على القوس $\widehat{AB}$ تتركَّب من حركة الشمس الخاصّة على فلك البروج ومن الحركة اليومية.

والطالع المستقيم لهذه القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو $\overset{\frown}{AD}$ [٢٤]، وميلها هو $\overset{\frown}{BD}$ ؛ وهاتان القوسان معلومتان. والنقطتان G وَ B هما بالفعل معلومتان على فلك البروج، كما أنَّ القوسين $\overset{\frown}{GD}$ وَ $\overset{\frown}{BD}$ معلومتان (وفقاً للقضايا ٥ وَ ٦ وَ ٧)؛ وكذلك إنَّ $\overset{\frown}{AG}$ معلومة، فنستنتج من ذلك $\overset{\frown}{AD}$.

دراسة حالة القمر أو أحد الكواكب الخمسة

القضية ٢٠- لتكن A الموضع الأولي للقمر؛ الدائرة العظمى AC تقطع فلك البروج على النقطة E ؛ ولتكن B موضع القمر في نهاية الزمن t ؛ الدائرة العظمى BC تقطع دائرة A الزمانية على النقطة D وتقطع فلك البروج على النقطة I. الأقواس $\overset{\frown}{CA}$ ، $\overset{\frown}{AE}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ وَ $\overset{\frown}{BI}$ معلومة؛ ويكون معنا $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CD}$، فتكون القوسان $\overset{\frown}{BD}$ وَ $\overset{\frown}{DI}$ معلومتين.

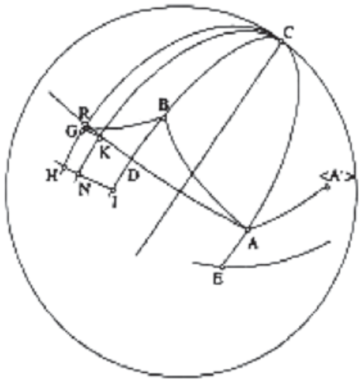
يرسم القمرُ، خلال الفترة t، القوسَ $\overset{\frown}{A'A}$ على فلكه، وهذه القوس تنتقل إلى الموضع $\overset{\frown}{BG}$. والنقطة G تكون غرب النقطة B؛ وتكون بشكل عام شمالَ أو جنوبَ الدائرة DA ، بسبب حركة العقدة.

تنتقل الدائرة CAE إلى الموضع $CRGH$، حيث تكون R على الدائرة DA ، ويكون معنا: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CR}$ وَ $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{GH}$. والنقطتان H وَ I معلومتان على فلك البروج.

لتكن $\overset{\frown}{AK}$ القوس التي يقاس بها الزمن المعلوم t؛ الدائرة العظمى CK تقطع فلك البروج على النقطة N، ويكون $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CK}$.

---

[٢٤] أي، إذا كانت δ ترمز إلى الفرق بين الطالعين المستقيمين لنقطتين، يكون معنا هنا: $\delta(A, D) = \delta(A, B)$ = قياس $\overset{\frown}{AD}$.



الشكل ٩١: إنَّ C، قطبَ دائرة معدّل النهار، والدائرةَ الموازية لمعدّل النهار المارة بالنقطة A، والموضعَ الأوَّلي للكوكب المدروس هي عناصر ثابتة.

دائرة البروج وفلك الكوكب يخضعان للحركة اليومية؛ الكوكب له حركة خاصة على فلكه، وبالإضافة إلى ذلك، فإنَّ لفلك الكوكب حركة بالنسبة إلى فلك البروج.

لو لم تكن حركة العقدة موجودةً، لوصلت النقطة A إلى النقطة K في نهاية الزمن t؛ ولكنها تصل إلى النقطة G، بسبب حركة العقدة على فلك البروج، فيكون إذاً للنقطتين K وَ G نفس العرض بالنسبة إلى فلك البروج، وتكون القوس $\widehat{GK}$ موازية لفلك البروج ($\widehat{NH} = \widehat{KG}$) وموافقة لانتقال العقدة؛ والنقطة N معلومة، فتكون $\widehat{NI}$ إذاً معلومة. والقوس $\widehat{DK}$ هي الطالع المستقيم للقوس $\widehat{IN}$، فتكون $\widehat{DK}$ إذاً معلومة. ولكن $\widehat{AK}$ معلومة، فإذاً $\widehat{AD}$، التي هي الزمن المُحصَّل، معلومة. وكنا قد رأينا أنَّ القوس $\widehat{BD}$، ميل الحركة من A إلى B، معلومة.

دراسة حالات الكواكب

القضية ٢١-

أ) الكوكبان السُّفليَّان:

إنَّ ميل الفلك، لكلٍّ من هذين الكوكبين، يتغيَّر(انظر ص. ٢٠٥)، وهذا ما يؤثِّر في موضع النقطة G الذي يكون في أغلب الأحيان شمالَ أو جنوبَ الدائرة الزمانية AD.

وتكون القوسُ $\widehat{A'A}$، التي يرسمها الكوكب على فلكه انطلاقاً من النقطة A خلال الزمن المعلوم t، معلومةً؛ وفي نهاية الزمن t تبلغ هذه القوس الموضع $\widehat{GB}$. وإذا كانت حركة

الكوكب على فلكه بالاتجاه المباشر، تكون A' شرقَ A، فتكون G غرب B؛ وإذا كانت الحركة بالاتجاه التراجعي، تكون G شرقَ B.

الزمن المحصَّل وميل الحركة يُعرَّفان، مثلما حصل في حالة القمر، استناداً إلى الموضع الأوَّلي A والموضع النهائي B. الزمن المحصَّل هو القوس $\widehat{DA}$ والميل هو القوس $\widehat{BD}$.

ولكن موضع الكوكب، في حالة عطارد والزهرة، يُعرَّف بطوله وعرضه بالنسبة إلى فلك البروج. وهكذا يتعلَّق هذا الموضع بميل فلك الكوكب بالنسبة إلى فلك البروج وبميل فلك التدوير بالنسبة إلى فلك الكوكب. وعندما تكون إحداثيات الكوكب بالنسبة إلى فلك البروج معلومة، فإنَّ إحداثياته بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار تكون معلومة.

ب) الكواكب العلوية

حركة العقدتين بطيئة جداً وليس لها تأثير خلال يوم واحد.

والنقطة G هي على الدائرة DA.

- غرب النقطة B، إذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه المباشر
- شرق النقطة B، إذا كانت حركة الكوكب بالاتجاه التراجعي.

يؤثِّر ميلُ فلك التدوير، بالنسبة إلى مستوي فلك الكوكب، في حركات هذه الكواكب الثلاثة؛ ولكن عرضَ كلٍّ من هذه الكواكب بالنسبة إلى فلك البروج معلومٌ في كل زمن معلوم؛ فتكون الأقواس، مثل $\widehat{CA}$ وَ $\widehat{CB}$، إذاً معلومة.

ويكون لدينا ما يلي فيما يخصّ الكواكب الخمسة:

إذا كانت حركة الكوكب على فلكه بالاتجاه المباشر، تكون G عندئذ غربَ B، فيكون الزمن المُحصَّل أصغر من الزمن المعلوم، أي أصغر من مدَّة الحركة (وهذا ما يحصل في حالة القمر).

إذا كانت حركة الكوكب على فلكه بالاتجاه التراجعي، تكون G عندئذ شرقَ B، فيكون الزمن المُحصَّل أكبر من الزمن المعلوم.

وإذا كان الكوكب متوقِّفاً، أي في "نقطة مراوحة"، فإنَّ موضعه لا يتغيَّر بالنسبة إلى فلك البروج خلال الزمن المعلوم، وتكون G في النقطة D، فيساوي الزمن المُحصَلُ الزمنَ المعلوم.

ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار[٢٥]

القضية ٢٢-

الشمس: إنَّ الزاوية بين مستوي فلك البروج ومستوي دائرة معدّل النهار ثابتة، وتساوي $\alpha = 23°27'$.

الزاوية α هي الميل الأقصى لنقاط فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ويتم بلوغها في الانقلابين:

- الانقلاب الصيفي شمالاً (بداية برج السرطان)
- الانقلاب الشتوي جنوباً (بداية برج الجدي).

القمر: الزاوية β بين فلك القمر وفلك البروج تتغيَّر قليلاً جداً، ولقد اعتبرها ابن الهيثم ثابتة؛ وهي تساوي الميل الأقصى بالنسبة إلى فلك البروج، أيْ أنـَّها تساوي ميل الطرفين الشمالي والجنوبي بالنسبة إلى فلك البروج. ولكنَّ هذين الطرفين يتحركان بالنسبة إلى دائرة البروج؛ فيتحرَّك موضعاهما المنسوبان إلى فلك البروج، على دائرة البروج. وهذا الانتقال راجع إلى حركة دوران فلك القمر حول محور فلك البروج.

يستعيد ابن الهيثم هنا الشروح التي قدَّمها بخصوص القمر في بداية مؤلَّفه (انظر ص. ٣٤٨)، وهي الشروح الخاصة بانتقال القطب الشمالي للفلك بالنسبة إلى لقطبين الشماليين لدائرة معدّل النهار ودائرة البروج.

إنَّ ميل فلك القمر بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار يتعلَّق بالمواضع النسبية لهذه الأقطاب الثلاثة، وبموضع كل من العقدتين على فلك البروج.

بداية برج الحمل = γ (الاعتدال الربيعي)

[٢٥] القضية ٢٢ المشار إليها ص ٤٠٣.

بداية برج السرطان $=\sigma$ (الانقلاب الصيفي)

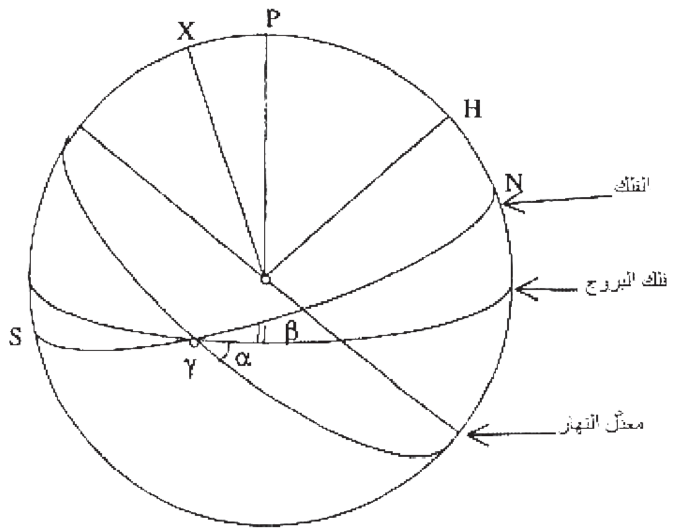
بداية برج الميزان $= \gamma'$ (الاعتدال الخريفي).

وإذا بلغ رأس الجوزهر إحدى النقطتين γ أو γ' ، تكون الأقطاب الثلاثة H لدائرة معدّل النهار وَ P لفلك البروج وَ X للفلك، على نفس الدائرة العظمى التي تقطع الفلك على النقطتين N وَ S اللتين هما الطرفان الشمالي والجنوبي الخاصّان بدائرتي معدِّل النهار والبروج.

لتكن α ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ولتكن β ميل الفلك بالنسبة إلى فلك البروج، ولتكن δ ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار. يكون لدينا حالتان:

- رأس الجوزهر في النقطة γ (بداية برج الحمل).

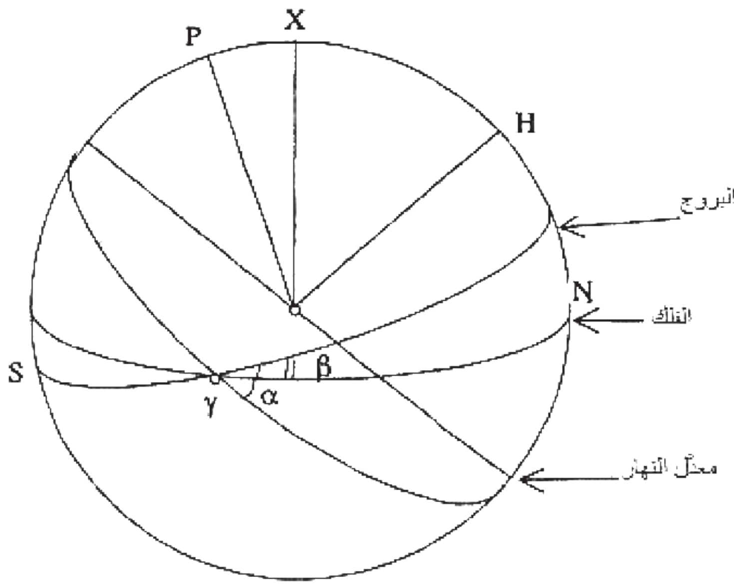
يكون معنا في هذه الحالة: $\alpha + \beta = \delta$.



الشكل ٩٢

- ذنب الجوزهر في النقطة γ (فيكون رأس الجوزهر في النقطة γ' بداية برج الميزان)

يكون معنا في هذه الحالة $\alpha - \beta = \delta$.



الشكل ٩٣

وهكذا يكون مَوْضِعَا الطرفيْن، الشمالي N والجنوبي S للفلك المائل، بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، معلومين في هاتين الحالتين.

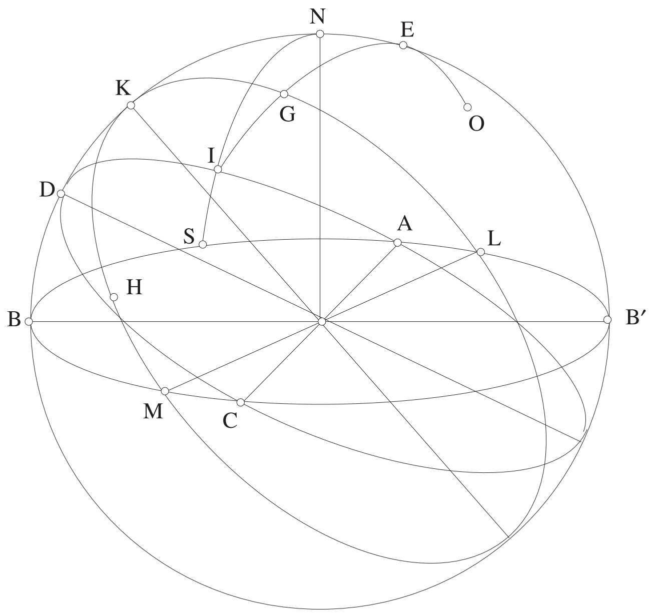
دراسة الحالة التي لا يكون فيها رأس الجوزهر مطابقاً للنقطة γ أو للنقطة γ'

لتكن ABC دائرة فلك البروج ذات القطب N، وليكن ADC الفلكَ المائل ذا القطب E، وليكن B وَ D منتصفيْ نصفيْ الدائرة ذات القطر AC. تكون النقاط N، E، B وَ D على نفس الدائرة العظمى التي تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة K. وتقطع دائرة معدّل النهار فلكَ البروج على نقطتيْ الاعتدال M وَ L. والنقطتان A وَ C هما العقدتان.

<أ> لنفترض أنَّ M موجودة على القوس BC. تقطع الدائرة LKM، التي هي دائرة معدّل النهار، الفلكَ المائل على النقطة H. وليكن O قطب دائرة معدّل النهار؛ الدائرة OE تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة G، وتقطع قوس الفلكَ المائل $\widehat{DA}$ على النقطة I. يكون معنا :

$\widehat{GI} = \widehat{EO}$ وتكون $\widehat{GI}$ الميل الأقصى للفلك المائل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

وتكون I الطرف الجنوبي للفلك إذا كانت O القطب الشمالي. وتكون I الطرف الشمالي للفلك إذا كانت O القطب الجنوبي.



الشكل ٩٤

نفترض على الشكل أنَّ النقاط N، E، وَ O هي الأقطاب الشمالية لفلك البروج ولفلك الكوكب ولدائرة معدّل النهار. النقطتان C وَ A هما على التوالي ذنب الجوزهر ورأس الجوزهر؛ النقطتان L وَ M هما على التوالي نقطتا الاعتدال الربيعي والاعتدال الخريفي، والنقطة I هي الطرف الجنوبي للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

النقاط A، C، B، D، L، وَ M هي نقاط معلومة، وكذلك هي حال النقاط E، N، وَ O.

قوس فلك البروج $\widehat{MB}$ معلومة، فتكون القوس $\widehat{MK}$ الموافقة لها على دائرة معدّل النهار معلومة، وبالتالي تكون القوس $\widehat{KB}$ ، من الدائرة العمودية على مستوي فلك البروج، هي أيضاً معلومة. والقوس $\widehat{BD}$ ، من جهة أخرى، معلومة، فتكون القوس $\widehat{DK}$ معلومة أيضاً.

إنَّ مبرهنة مانالاوس تعطي:

$$\frac{\sin\widehat{KD}}{\sin\widehat{DB}}=\frac{\sin\widehat{KH}}{\sin\widehat{HM}}.\frac{\sin\widehat{CM}}{\sin\widehat{CB}}\text{؛}$$

$\widehat{KD}$، $\widehat{BD}$، $\widehat{CM}$ وَ $\widehat{CB}$ أقواس معلومة، فإذاً $\frac{\sin\widehat{KH}}{\sin\widehat{HM}}$ معلومة ؛ ولكن $\widehat{KM} = \widehat{HM} + \widehat{KH}$ معلومة، فيستنتج ابن الهيثم من ذلك أنَّ $\widehat{HM}$ معلومة.

تعليل ذلك. إنَّ لدينا $\widehat{KH} = \widehat{HM} - \widehat{KM}$، فتكون إذاً النسبة $a = \dfrac{\sin(\widehat{KM} - \widehat{HM})}{\sin \widehat{HM}}$ معلومة،

$$a = \frac{\sin \widehat{KM} . \cos \widehat{HM} - \cos \widehat{KM} . \sin \widehat{HM}}{\sin \widehat{HM}}،$$

$$a = \sin \widehat{KM} . \cot g \widehat{HM} - \cos \widehat{KM} ؛$$

فتكون إذاً $\widehat{HM}$ cotg معلومة لأنَّ $\widehat{KM}$ معلومة، فتكون إذاً $\widehat{HM}$ معلومة.

إنَّ مبرهنة منالاوس، المطبَّقة على أقواس الدوائر العظمى: القوسين $\widehat{GE}$ وَ $\widehat{GKH}$ اللتين تتقاطعان على النقطة G والقوسين $\widehat{EK}$ وَ $\widehat{IH}$ اللتين تتقاطعان على النقطة D، تعطي:

$$\frac{\sin \widehat{KH}}{\sin \widehat{HG}} . \frac{\sin \widehat{ED}}{\sin \widehat{DK}} = \frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}} ؛$$

والنسبتان في الطرف الأيسر من هذه المعادلة معلومتان، فتكون النسبة في الطرف الأيمن معلومة أيضاً. ولكنَّ $\widehat{EI}$ ربعُ دائرة، فتكون $\widehat{IG}$ معلومة وتكون $\widehat{IG}$ ميل الطرف I بالنسبة إلى دائرة معدِّل النهار.

نرسم دائرة عظمى تمرُّ بالنقطتين N وَ I وتقطع دائرة فلك البروج على النقطة S. يكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{HC}}{\sin \widehat{CD}} . \frac{\sin \widehat{KM}}{\sin \widehat{MH}} = \frac{\sin \widehat{KB}}{\sin \widehat{BD}} .$$

والنسبتان الأولَيَان في هذه المعادلة معلومتان، وَ $\widehat{CD}$ هي ربع دائرة فتكون $\widehat{HC}$ معلومة.

كلٌّ من القوسين، $\widehat{HI}$ على الفلك المائل، وَ $\widehat{HG}$ على دائرة معدّل النهار، تساوي ربع دائرة لأنَّ النقطتين G وَ I موجودتان في مستوي الدائرة العظمى المارة بالقطبين E وَ O.

ولكن $\widehat{CD}$ ربعُ دائرة، فيكون إذاً $\widehat{DI} = \widehat{CH}$ ، فنستنتج أن $\widehat{DI}$ أصغر من ربع دائرة وتكون I بين A وَ D. والدائرة العظمى المارة بالنقطتين N وَ I تقطع القوس $\widehat{AB}$ على النقطة S بين A وَ B. يكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{DN}}{\sin \widehat{NB}} . \frac{\sin \widehat{CI}}{\sin \widehat{ID}} = \frac{\sin \widehat{CS}}{\sin \widehat{SB}} .$$

إنَّ $\widehat{ID} = \widehat{CH}$ معلومة، فإذاً $\widehat{CI}$ معلومة، والقوسان $\widehat{DN}$ وَ $\widehat{NB}$ معلومتان أيضاً، فتكون النسبة $\frac{\sin \widehat{CS}}{\sin \widehat{SB}}$ معلومة، وبما أنَّ $\widehat{CB}$ ربع دائرة يكون $\widehat{BS} + \widehat{CB} = \widehat{CS}$.

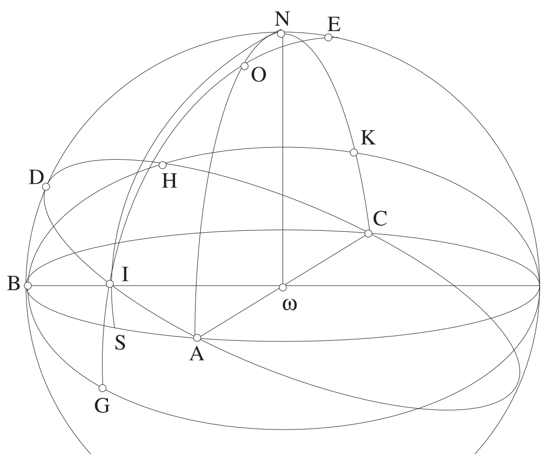
يستنتج ابن الهيثم مما سبق أنَّ القوس $\widehat{BS}$ معلومة. وذلك أنَّ $\text{cotg } \widehat{BS} = \frac{\sin \widehat{CS}}{\sin \widehat{SB}}$ معلومة، فتكون $\widehat{BS}$ إذاً معلومة وتكون عندئذ نقطة فلك البروج S معلومةً؛ والنقطة S هي موضع النقطة I بالنسبة إلى فلك البروج.

<ب> البرهان هو نفسه، إذا كانت نقطة الاعتدال M على القوس $\widehat{AB}$.

<ج> لنفترض أنَّ نقطة الاعتدال في النقطة B.

تقطع دائرة معدّل النهار الفلك المائل على النقطة H. لتكن النقطة O قطب دائرة معدّل النهار؛ الدائرة العظمى المارة بالنقطتين E وَ O تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة G وتقطع الفلكَ على النقطة I. القوس GI هي الميل الأقصى للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، ويكون $\widehat{EO} = \widehat{GI}$.

النقطة C هي نقطة انقلاب؛ الدائرة العظمى ON التي هي دائرة الأقطاب تقطع دائرة معدّل النهار على النقطة K؛ $\widehat{NC}$ هي ربع دائرة؛ $\widehat{KC}$ هي ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار؛ لذلك فإن $\widehat{KN}$ معلومة.



الشكل ٩٥

ABC : فلك البروج وقطبه N ، ADC: الفلك المائل وقطبه E ، BHK : دائرة معدّل النهار وقطبها O

يكون معنا $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{DN}} = \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}} . \frac{\sin \widehat{KC}}{\sin \widehat{CN}}$ القوسان $\widehat{BD}$ وَ $\widehat{DN}$ معلومتان، فتكون $\frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}}$ إذاً معلومة.

يكون معنا $\widehat{BK} = \widehat{BH} + \widehat{HK}$ = ربع دائرة، فيكون إذاً $\text{tg}\ \widehat{BH} = \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HK}}$، فتكون $\widehat{BH}$ وَ $\widehat{HK}$ معلومتين.

النقطة H هي قطب الدائرة EOG، فإذاً $\widehat{HG}$ تساوي ربع دائرة، فتكون $\widehat{BG} = \widehat{HK}$ معلومة.

يكون معنا: $\frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}} = \frac{\sin \widehat{ED}}{\sin \widehat{DB}} . \frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{HG}}$ ؛ النسبتان الأخيرتان معلومتان، فتكون النسبة $\frac{\sin \widehat{EI}}{\sin \widehat{IG}}$ إذاً معلومة، وتساوي القوس $\widehat{EI}$ ربع دائرة، فتكون $\widehat{IG}$ معلومة، وهي الميل الأقصى للفلك المائل بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار.

ويكون أيضاً: $\frac{\sin \widehat{BN}}{\sin \widehat{ND}} = \frac{\sin \widehat{BK}}{\sin \widehat{HK}} . \frac{\sin \widehat{HC}}{\sin \widehat{HD}}$، فتكون القوسان $\widehat{HC}$ وَ $\widehat{HD}$ إذاً معلومتين وتكون القوس $\widehat{HC}$ مساوية للقوس $\widehat{ID}$. وذلك أنـَّه إذا رمزنا إلى مركز الكرة بـِ ω يكون معنا: $H\omega \perp \omega O$ وَ $H\omega \perp \omega E$ ، لأنَّ H هي نقطة تقاطع دائرة معدّل النهار مع الفلك ولأنَّ O وَ E هما قطبا هذين الفلكين. فيكون معنا إذاً: ωH عمودياً على مستوي $E\omega O$، فنستنتج أنَّ $H\omega \perp \omega I$؛ فالقوس $\widehat{HI}$ هي إذاً ربع دائرة مثل القوس CD. ويكون بالتالي $\widehat{HC} = \widehat{DI}$.

إنَّ الدائرة العظمى NI، من جهة أخرى، تقطع فلك البروج على النقطة S ويكون معنا:

$$\frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SB}} = \frac{\sin \widehat{CI}}{\sin \widehat{ID}} . \frac{\sin \widehat{DN}}{\sin \widehat{NB}} ،$$

فتكون النسبة $\frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SB}}$ معلومة وتكون القوس $\widehat{BC}$ مساوية لربع دائرة؛ فالقوس $\widehat{SB}$ هي إذاً معلومة والنقطة S معلومة.

القضية ٢٣- درس ابن الهيثم في هذه القضية ميل الكوكبين السفليين: الزهرة وعطارد.

إنَّ ميل الفلك، بالنسبة إلى مستوي فلك البروج، متغيِّر لكلّ من هذين الكوكبين (انظر القضية ١٨، ص. ٢٠٥).

إذا كان موضعُ الطرف الجنوبي أو الطرف الشمالي للفلك بالنسبة إلى دائرة البروج معلوماً، يُمكِن عندئذ تحديد ميل الفلك بالنسبة إلى دائرة البروج بالطريقة التي أشرنا إليها بخصوص القمر.

وإذا كانت العقدتان، على الأخصّ، متطابقتين مع نقطتي الاعتدال، يكون الطرفان الشمالي والجنوبي للفلك بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، المحدَّدان بالنسبة إلى فلك البروج، متطابقين مع نقطتي الانقلاب. والنتائج المتعلّقة، في هذه الحالة، بالميول المنسوبة لدائرة معدّل النهار تُستنتَج من الميول المنسوبة إلى فلك البروج بالطريقة المشار إليها بخصوص القمر.

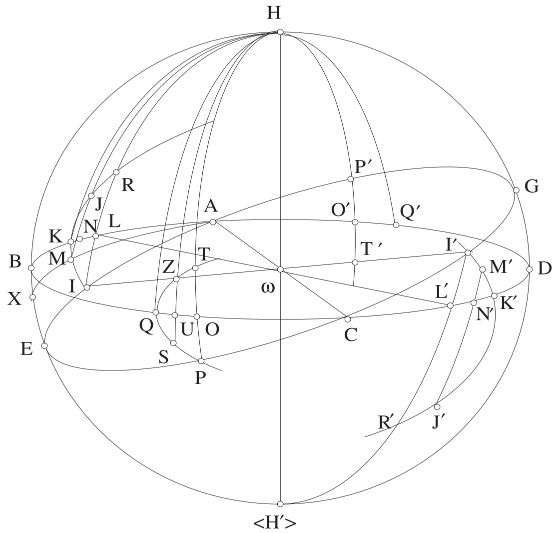
وإذا لم تكن العقدتان متطابقتين مع نقطتي الاعتدال، فإننا نَتتَّبِعُ نفس الطريقة التي أشرنا إليها (ص. ٢١٣-٢١٤) بخصوص القمر.

مسألة جديدة

إنَّ نقطتيْ التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدّل النهار تتحرَّكان حول المِحور المارّ بالعقدتين.

الفلك المائل يتحرَّك حول هذا المحور؛ كل نقطة من الفلك المائل ترسم إذاً قوساً من دائرة يكون قطباها العقدتين. كلُّ نقطة من الفلك تترافق مع نقطة على فلك البروج لها نفس الطول(هذا هو الموضع المنسوب إلى فلك البروج). يُعطي ابن الهيثم وصفاً مع كثير من التفاصيل لحركة هذه النقطة، مُستخدِماً على كل فلك الأقواس الأربع التي تساوي كل منها ربع دائرة والتي تفصل فيما بينها العقدتان والطرفان الشمالي والجنوبي المنسوبان إلى فلك البروج. وهو يأخذ بعين الاعتبار حركة البعد الأبعد على الفلك الخارج المركز.

البرهان: لتكن $ABCD$ دائرة البروج، وليكن $AECG$ فلك الزهرة أو فلك عطارد. إنَّ اتجاه توالي البروج هو اتجاه $DCBA$، والنقطة H هي القطب الشمالي لفلك البروج.



الشكل ٩٦

النقطتان A وَ C والنقطتان B وَ D وكذلك النقطتان E وَ G متقابلة قطرياً في هذا الشكل. والعقدتان هما A وَ C.

لتكن E الطرف الجنوبي لفلك الكوكب عطارد (لو كانت E الطرف الشمالي للزهرة، لتوجَّب أن نجعلَ H' القطبَ الشمالي لفلك البروج وأن نجعل H قطبَه الجنوبي).

أ) القوس $\widehat{EA}$ والقوس $\widehat{GC}$

لتكن I نقطة على القوس $\widehat{EA}$ ولتكن I' نقطة على القوس $\widehat{GC}$[٢٦] ؛ الدائرة العظمى HI تقطع القوس $\widehat{AB}$ على النقطة L، وتكون الزاوية $\widehat{ALI}$ قائمةً مع $\widehat{AL} < \widehat{AI}$. الدائرة ذات القطب A التي تمرُّ بالنقطة I تقطع القوسَ $\widehat{AB}$ على النقطة K بين B وَ L، وتقطع القوسَ $\widehat{HL}$ على النقطة R . كلٌّ من القوسين $\widehat{HB}$ وَ $\widehat{KH}$ تساوي ربع دائرة، لأنَّ H هي قطب الدائرة AKB؛ إنَّ قطبيْ كل من الدائرتين BH وَ KH موجودان إذاً على الدائرة AKB، كما أنَّ النقطة A هي قطب الدائرة IKR. إنَّ المستوي AKB هو إذاً مستوي تناظرٍ لكل من الدائرتين $H'KH$ وَ IKR اللتين لهما النقطة المشتركة K؛ فيكون الخط العمودي في النقطة K على المستوي ABC خطاً

[٢٦] إذا أخذنا النقطة I' على القوس GC، يُمكن أن نفترض أن النقطتين I وَ I' متقابلتان قطريّاً على الدائرة $AECG$ ؛ تقطع الدائرةُ العظمى HI، في هذه الحالة، فلكَ البروج على النقطة L من القوس AB، وعلى النقطة L' من القوس CD ، وتكون النقطتان L وَ L' متقابلتين قطرياً. وكذلك تكون أيضاً النقاط K وَ K' ، R وَ R' ،... إلخ ، التي سنُعرِّفها فيما بعد.

مماساً مشتركاً في النقطة K لهاتين الدائرتين. النقطة K هي وسط القوس $\widehat{IKR}$ والنقطة L هي وسط القوس $\widehat{ILR}$.

لتكن M نقطة من القوس $\widehat{IK}$ ؛ الدائرة العظمى MH تقطع القوس $\widehat{KL}$ على النقطة N وتقطع القوس $\widehat{KR}$ على النقطة J. فيكون إذاً للنقطتين J وَ N نفسُ الطول الذي للنقطة M على فلك البروج، ويكون للنقطة I نفسُ طول النقطة L على فلك البروج.

إذا دار الفلك حول AC حتى ينطبقَ على فلك البروج، ترسم النقطة I القوس $\widehat{KMI}$، والنقطة على فلك البروج، التي لها نفس الطول، ترسم القوس $\widehat{KNL}$ باتجاه توالي البروج. وإذا تجاوز الفلك دائرة البروج وواصل دورانه حول AC، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{RJK}$ ، والنقطة التي لها نفس الطول على فلك البروج ترسم القوس $\widehat{LNK}$ من K نحو L، أي بالاتجاه المخالف لتوالي البروج.

القوس $\widehat{LR}$ مساوية للقوس $\widehat{IL}$ التي كانت الميل الأقصى للنقطة I جنوبَ فلك البروج؛ لذلك فإنَّ $\widehat{LR}$ هي الميل الأقصى شمال فلك البروج.

وإذا تابع الفلك المائل، بعد ذلك، دورانه ليعود إلى فلك البروج، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{KR}$ ، وموضعها المنسوب إلى فلك البروج يرسم القوس $\widehat{LNK}$ باتجاه توالي البروج.

وإذا تواصلت حركة الفلك المائل، فإنَّ النقطة I ترسم القوس $\widehat{IK}$، وموضعها المنسوب إلى فلك البروج يرسم القوس $\widehat{LK}$ بالاتجاه المخالف لتوالي البروج.

ولقد لخَّص ابن الهيثم بعد ذلك للنقطة I' من القوس $\widehat{GC}$ النتائجَ المُثْبَتة للنقطة I من القوس $\widehat{EA}$، وأدخل النقاط H'، K' وَ R' .

ب) القوس $\widehat{CE}$ والقوس $\widehat{AG}$

لتكن P نقطة على القوس $\widehat{CE}$ ، ولتكن P' نقطة على القوس $\widehat{GA}$ ؛ يُمكننا أن نفترض أنَّ P وَ P' متقابلتان قطرياً.

تقطع الدائرةُ العظمى HP دائرةَ البروج عمودياً على النقطة O، فيكون إذاً: $\widehat{CO} < \widehat{CP}$ وَ $\widehat{AO} < \widehat{AP}$ < ربع دائرة.

تقطع الدائرةُ ذات القطب C التي تمرُّ بالنقطة P دائرةَ البروج على النقطة Q وتقطع القوس $\widehat{OH}$ بين H وَO على النقطة T. الدائرة العظمى HQ، العمودية على القوس $\widehat{BC}$ في

النقطة Q، هي مُماسَّة في النقطة Q للدائرة PQT. لنأخذ على القوس $\widehat{PQ}$ نقطة اختيارية هي S؛ الدائرة العظمى SH تقطع القوس $\widehat{OQ}$ على النقطة U وتقطع القوس $\widehat{TQ}$ على النقطة Z.

يستعيد ابن الهيثم هنا للنقطة P من القوس $\widehat{CE}$ ، الدراسةَ التي قام بها سابقاً للنقطة I من القوس $\widehat{AE}$ ، عندما يدور الفلك المائل حول CA ليمرَّ من الميل الجنوبي الأقصى إلى الميل المعدوم ثم من الميل المعدوم إلى الميل الشمالي الأقصى. وعندما ترسم النقطة P القوسَ $\widehat{PQ}$ ثم القوس $\widehat{TQ}$، يدرس ابن الهيثم تحرُّكَ نقطة فلك البروج التي لها نفس طول النقطة P وَالتي ترسم القوسَ $\widehat{OQ}$ بالاتجاه المخالف لتوالي البروج، ثم ترسم القوس $\widehat{OQ}$ باتجاه توالي البروج.

يدرس ابن الهيثم بعد ذلك عودة الفلك إلى موضعه الأوَّلي: النقطة P ترسم عندئذ بالتتابع القوس $\widehat{TQ}$ ثم القوس $\widehat{PQ}$.

وتجري بنفس الطريقة دراسةُ انتقال أيِّ نقطة، P'، من القوس $\widehat{AG}$.

الخلاصة: هكذا تكون الدراسة التي قمنا بها للنقطة I صالحة لكل نقطة من الفلك $AECG$. يقوم ابن الهيثم بهذه الدراسة مستخدِماً الدوائر الموازية لمعدِّل النهار ذات القطبين A وَ C.

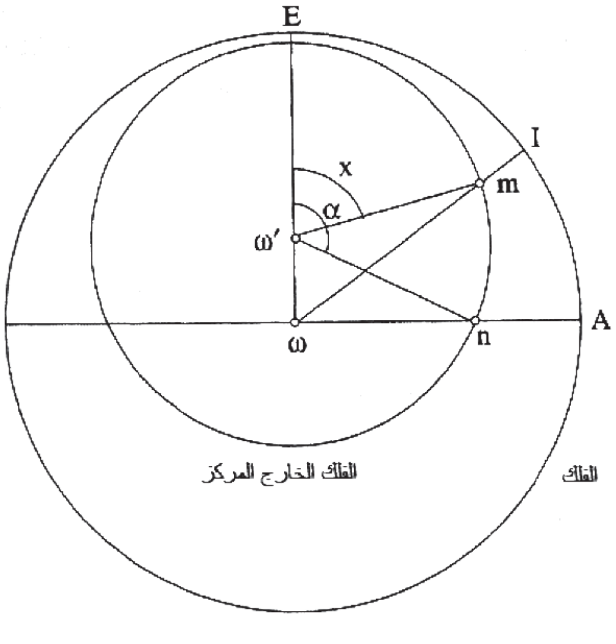
نأخذ بعين الاعتبار، لنقطة مثل النقطة I، حركتين: دورانَ I حول المحور المحدَّد بالعقدتين وتَحَرُّكَ موضع I المنسوب إلى فلك البروج، أي تَحَرُّكَ النقطة L.

- إنَّ القوسَ $\widehat{MI}$ التي ترسمها النقطة I في الدوران حول المحور AC، خلال زمن معلوم، معلومةٌ؛ وهذا ما يثبته ابن الهيثم بعد ذلك.

إنَّ الزمن الذي يستغرقه الفلك المائل، ليمرَّ من الميل الأقصى إلى الميل المعدوم، معلومٌ؛ وهو الزمن الذي يستغرقه مركز فلك التدوير ليجتاز على الفلك الخارج المركز قوساً، لِنُسَمِّها α، قابلةً لزاوية قائمة يكون رأسها مركز العالم ω، وتُقابل هذه القوس إذاً ربع دائرة على الفلك المائل. هذه القوس α معلومة؛ والقوس $\widehat{BE}$ الخاصّة بالميل الأقصى معلومة (انظر الشكل ٩٦). وخلال الزمن الذي يجتاز فيه مركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز

قوساً، هي x، انطلاقاً من البعد الأبعد، فإنَّ طرف الفلك يجتاز قسماً، هو $\widehat{EX}$، من القوس $\widehat{BE}$، ويكون معنا:

$$\frac{\widehat{EX}}{EB} = \frac{x}{\alpha}.$$



الشكل ٩٧

ω' : مركز الفلك الخارج المركز، ω : مركز الفلك، $\widehat{E\omega A}$ = زاوية قائمة، $x = \widehat{E\omega' m}$ ، $\alpha = \widehat{E\omega' n}$

إنَّ الحركة على الفلك الخارج المركز مستوية؛ إذا كان t_α الزمن الموافق للقوس α وكان t_x الزمن الموافق للقوس x، يكون معنا: $\frac{t_x}{t_\alpha} = \frac{x}{\alpha}$.

وإذا بلغت، من جهة أخرى، نقطةٌ مثل النقطة I النقطةَ M عندما تصل النقطة E إلى X، فإنَّ النقاط A، M وَ X تكون على دائرة عظمى، وتكون هذه الدائرة موضعاً من مواضع فلك الكوكب؛ ويكون معنا: $\frac{x}{\alpha} = \frac{t_x}{t_\alpha}$ $= \frac{\widehat{EX}}{EB} = \frac{\widehat{IM}}{\widehat{IK}}$.

إذا كان الزمن t_x معلوماً (مع $t_x = 0$، عندما يكون $x = 0$)، تكون النقطتان X من القوس $\widehat{EB}$ وَ M من القوس $\widehat{IK}$ معلومتين. فتكون، بالتالي، الأقواسُ $\widehat{EX}$ ، $\widehat{XB}$، $\widehat{IM}$ وَ $\widehat{MK}$ معلومة.

وتكون معنا المعادلة $\widehat{AM} = \widehat{AI}$ بين قوسين معلومتين. والنقطة L على فلك البروج هي التي لها نفس طول النقطة I، وكذلك النقطة N على فلك البروج هي التي لها نفس طول النقطة M.

لنبرهن الآن أنَّ القوسَ التي ترسمها خلال زمن معلوم على فلك البروج النقطة L التي لها نفس طول النقطة I (موضع I)، تكون معلومة.

نأخذ من جديد الشكل السابق (الشكل ٩٦). الدائرة العظمى MA تقطع القوس $\widehat{BE}$ على النقطة X.

لتكن I نقطة على الفلك؛ القوس $\widehat{BE}$ هي ميل الفلك بالنسبة إلى فلك البروج.

لتكن I موضع النقطة المدروسة في لحظة معلومة؛ ولتكن m موضع مركز فلك التدوير في تلك اللحظة (الشكل ٩٧)، ولتكن x القوس التي تفصل m عن البعد الأبعد ؛ فتكون $x = \widehat{Em}$ معلومة.

إذا كانت m في البعد الأبعد ، يكون $x = 0$، فتكون القوسُ $\widehat{BE}$ الميلَ الأقصى i_m الذي هو معلوم.

إذا لم تكن m في البعد الأبعد ، تُحقِّق القوسُ $i = \widehat{XB}$ عندئذ: $\frac{i}{i_m} = \frac{\alpha - x}{\alpha}$، فتكون القوس $i = \widehat{XB}$ معلومة.

ترسم النقطةُ I، خلال زمن معلوم، القوسَ $\widehat{MI}$، ونقطة فلك البروج التي لها نفس طول النقطة I ترسم القوسَ $\widehat{NL}$.

ويُمكن أن نكتب في وصف النقطة L:

- $\frac{\sin \widehat{HB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{HL}}{\sin \widehat{LI}} . \frac{\sin \widehat{IA}}{\sin \widehat{AE}}$ (المثلث HIE والدائرة BLA).

الأقواس: $\widehat{HB}$، $\widehat{HL}$ وَ $\widehat{AE}$ هي أرباع دائرة، والقوسان $\widehat{BE}$ وَ $\widehat{IA}$ معلومتان، فتكون القوس $\widehat{LI}$ معلومة.

- يكون معنا أيضاً : $\frac{\sin \widehat{HE}}{\sin \widehat{EB}} = \frac{\sin \widehat{HI}}{\sin \widehat{IL}} . \frac{\sin \widehat{AL}}{\sin \widehat{AB}}$ (المثلث LHB والدائرة EIA)

النسبتان الأولَيَان في هذه المعادلة معلومتان، فتكون النسبة الثالثة معلومة أيضاً؛ ولكن $\widehat{AL}+\widehat{LB} = \widehat{AB}$ = ربع دائرة، فتكون $\widehat{AL}$ معلومة. وتكون، إذاً، النقطة L التي لها نفس طول I معلومة.

ويُمكن أن نقوم بنفس الطريقة بوصف النقطة N :

- $\frac{\sin \widehat{HB}}{\sin \widehat{BX}} = \frac{\sin \widehat{HN}}{\sin \widehat{NM}} \cdot \frac{\sin \widehat{MA}}{\sin \widehat{AX}}$ ، فتكون القوس $\widehat{MN}$، إذاً، معلومة لأن كل الأقواس الأخرى معلومة.
- $\frac{\sin \widehat{HX}}{\sin \widehat{XB}} = \frac{\sin \widehat{HM}}{\sin \widehat{MN}} \cdot \frac{\sin \widehat{NA}}{\sin \widehat{AB}}$ ، القوس $\widehat{AN}$ هي إذاً معلومة؛ والنقطة N التي لها نفس طول النقطة M تكون، إذاً، معلومة.

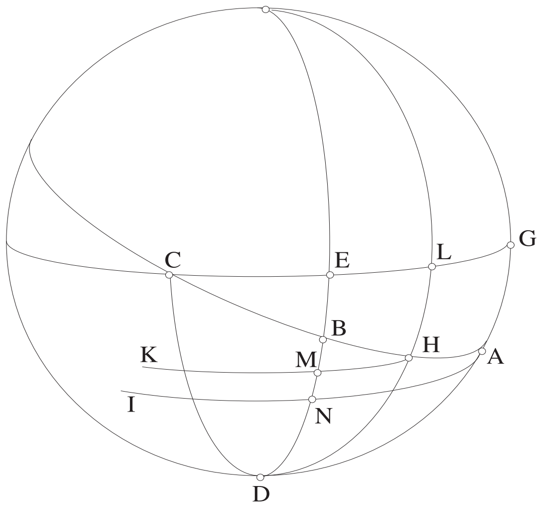
الخلاصة: إذا اجتازت نقطة ما، مثل النقطة I، القوسَ المعلومَ $\widehat{MI}$ من دائرة يكون قطباها العقدتين، خلال الزمن t_x، وإذا اجتازت I القوسَ المعلومَ $\widehat{KI}$ خلال الزمن t_α، فإنَّ كلَّ قوسٍ، من القوسين $\widehat{NL}$ وَ $\widehat{KL}$ من فلك البروج، مرسومةٍ بالنقطة التي لها نفس طول النقطة I خلال نفس الزمنين المذكورين، تكون أيضاً معلومة. وقد يكون اتجاه المسير على القوسين الأخيرتين مطابقاً لاتجاه توالي البروج أو مخالفاً له، كما رأينا ذلك عند دراسة أقواس الفلك المائل: $\widehat{AE}$ ، $\widehat{EC}$ ، $\widehat{CG}$ وَ $\widehat{GA}$.

القضية ٢٤- يدرس ابن الهيثم في هذه القضية حركة الكواكب المتحيِّرة على أفلاكها، كما يدرس الحد الأعلى لنسبة الزمن المحصَّل إلى ميل جزء الحركة الخاص بهذا الزمن المحصَّل.

إنَّ حركة الشمس على فلكها، من البعد الأبعد للفلك الخارج المركز نحو البعد الأقرب، مُتسارِعةٌ (وحركة مركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز مستوية). والسرعة الزاويَّة للراصد على الأرض تزايدية. ولكنَّ حركة الشمس على فلكها، من البعد الأقرب للفلك الخارج المركز نحو البعد الأبعد، مُتَباطِئة.

يُميِّز ابن الهيثم، في برهانه، بين أربع حالات لموضع الكوكب. ينقسم الفلك المائل إلى أربع أقواس بقطر التقاطع مع دائرة معدّل النهار وبالطرفيْن الشمالي والجنوبي للفلك المائل المنسوبين إلى دائرة معدّل النهار .

١) ليكن ABC الفلك المائل، ولتكن CEG دائرة معدّل النهار ذات القطب الشمالي D. لتكن A الطرف الشمالي (أو أية نقطة بين الطرف الشمالي والنقطة C). يكون الكوكب شمال دائرة معدّل النهار ويتحرَّك من A نحو B، فيكون ذلك إذاً من الشمال نحو الجنوب، ومن البعد الأبعد نحو البعد الأقرب، وفقاً للفرضيات.



الشكل ٩٨-١

الدوائر CEG، KMH وَ INA موازية لمعدِّل النهار والدوائر DC، DE ، DL وَ DG عمودية عليها، فنستنتج من ذلك أنَّ:

$$\widehat{EN} = \widehat{AG} = \text{ميل } A \text{ ،}$$

$$\widehat{ME} = \widehat{HL} = \text{ميل } H \text{ ، } \widehat{BE} = \text{ميل } B \text{ ،}$$

فيكون:

$$\widehat{NB} = \Delta(A, B) \text{ ؛ } \widehat{MB} = \Delta(H, B)$$ [٢٧]

$$\text{الزمن } IA \equiv IA = \text{مدَّة اجتياز } \widehat{AB}$$

$$\text{الزمن } KH \equiv KH = \text{مدَّة اجتياز } \widehat{KH} \text{.}$$

إنَّ الزمن المحصَّل للذهاب من H إلى B هو $\widehat{KM} = \widehat{MH} - \widehat{KH}$ (الشكل ٩٨-٢)[٢٨]، لأنَّ الكوكب المعنيَّ بالأمر خاضع للحركة اليومية.

[٢٧] ترمز Δ إلى الفرق بين ميلين بالنسبة إلى معدِّل النهار (انظر ص. ٨٥-٨٦).

[٢٨] إنَّ الكوكب يتحرَّك فعلاً من الموضع H إلى الموضع B على فلكه خلال الزمن المعلوم t ، مع $t = \widehat{KH}$. القوس $\widehat{KH}$ موجَّهة من K نحو H باتجاه الحركة اليومية. ولكن النقطتين H وَ B تخضعان للحركة اليومية. فتصل نقطتا الكرة السماوية H وَ B في نهاية الزمن t ، على التوالي، إلى النقطتين H_1 وَ B_1. ويكون معنا: $\widehat{KH} = t \cong \widehat{BB_1} \cong \widehat{HH_1}$ (معادلة بين قوسين متشابهتين). ويصل الكوكب من الوضع الأوَّلي H إلى الوضع النهائي B. والفرق بين الطالعين المستقيمين لهاتين النقطتين هو:

$$\widehat{HH_1} - \widehat{H_1M_1} = \widehat{HM_1} = \delta(H, B_1) \text{ ؛ ولكن } \widehat{KH} = \widehat{HH_1} \text{ وَ } \widehat{HM} = \widehat{H_1M_1} \text{ ،}$$

يُمثّل ابن الهيثم الأزمان بأقواس من دوائر زمانية؛ وسنرى، فيما بعد، أنَّ (IA) وَ(KH) يدخلان بواسطة نسبة أحدهما إلى الآخر، فلا يكون ضرورياً أنْ يكون موضعا النقطتين I وَ K معلومين. والاستدلال يفترض أنَّ الاتجاه من K نحو H أو من I نحو A هو اتجاه الحركة اليومية.

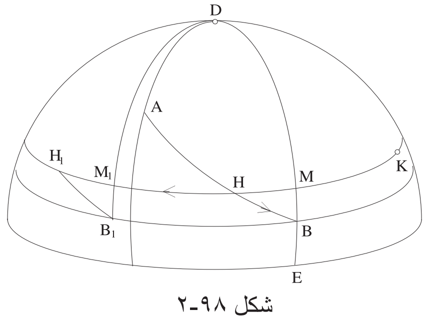
لقد أخذ ابن الهيثم حتى الآن حركة تبتدئ من دائرة معدّل النهار، وكان يقيس الزمن بقوس من دائرة عظمى. أما هنا، فإنَّ الحركة تبتدئ من نقطة ما على الكرة ويقاس الزمن المحصَّل بقوس من دائرة زمانية لهذه النقطة.

لنبرهن أنَّ $\frac{(KM)}{\widehat{MB}} > \frac{(IA)}{\widehat{NB}}$، حيث تُسمَّى القوس $\widehat{MB}$ التي هي جزء من القوس $\widehat{NB}$، "القوس الخاص" بالزمن (KM).

لتكن النقطة ω مركز الفلك ولتقطع أنصافُ الأقطار $A\omega$، $H\omega$ وَ $B\omega$ الفلكَ الخارج المركز بالتتابع على النقاط A_1، H_1 وَ B_1؛ فالزمنان (IA) وَ(KH)، اللذان هما زمنا المسير على القوسين $\widehat{BA}$ وَ $\widehat{HB}$ من الفلك، يكونان أيضاً زَمَنَي المسير للحركة الوسطى على قوسيْ الفلك الخارج المركز $\widehat{A_1B_1}$ وَ $\widehat{B_1H_1}$ فيكون إذاً $\frac{(IA)}{(KH)} = \frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{B_1H_1}}$، لأنَّ الحركة الوسطى مستوية.

ولكن، وفقاً للقضيتين ٨ وَ ٩: $\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{B_1H_1}} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BH}}$، فيكون $\frac{(IA)}{(KH)} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BH}}$ ؛ وكذلك يكون وفقاً للقضية ٦: $\frac{\widehat{AH}}{\widehat{HB}} > \frac{\widehat{NM}}{\widehat{MB}}$، فنستنتج أنَّ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BH}} > \frac{\widehat{NB}}{\widehat{BM}}$. ويكون معنا إذاً:

فيكون إذاً: $\delta(H, B_1) = \widehat{HM} - \widehat{KH} = \widehat{KM} = \widehat{HM_1}$.



شكل ٩٨-٢

يُمثّل الزمن (KM) ، إذاَ، الفرق بين الطالعين المستقيمين للوضعين الأوَّلي والنهائي للكوكب في حركته، خلال المدة (KH) ، وهذه الحركة ناتجة من الحركة اليومية ومن حركة الكوكب على فلكه. هذا هو تعريف الزمن المحصَّل الوارد في بداية القسم المكرَّس لعلم الفلك، من هذا المؤلَّف.

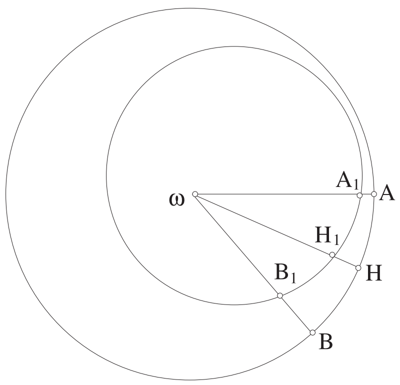
$\frac{(IA)}{(KH)} < \frac{\widehat{NB}}{\widehat{BM}}$.

إنَّ نسبة الزمن (IA) إلى الزمن (KH) تساوي نسبة قوس، من دائرة عظمى، مشابهة للقوس $\widehat{IA}$، إلى قوس من دائرة عظمى مشابهة للقوس $\widehat{KH}$ ، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{(IA)}{\widehat{NB}} < \frac{(KH)}{\widehat{BM}} < \frac{(KM)}{\widehat{BM}}$$.[٢٩]

إنَّ هذه النتيجة صالحة لكل نقطة H من القوس $\widehat{AB}$، حيث نُرفق بالنقطة H الزمنَ المحصَّل $\widehat{KM}$ والقوس $\widehat{MB}$ التي هي فرق الميل الخاص بالزمن $\widehat{KM}$. يكون معنا:

$$\frac{(IA)}{\Delta(A,B)} > \frac{(KM)}{\Delta(H,B)}$$.



الشكل ٩٩

يُمكن أن نُفَسِّر هذه المتباينة كما يلي: السرعة الوسطى لتغيُّر الميل في الفسحة $\widehat{AB}$ هي أصغر من السرعة الوسطى لتغيُّر الميل في الفسحة الجزئية $\widehat{HB}$. وهذا يعني بتعبير آخر أنَّ حركة الكوكب مُتَسارعة على القوس المَعنية بالأمر.

لقد أدخل ابن الهيثم مفهوم السرعة الوسطى على فسحة منتهية ومتغيِّرة، بسبب غياب مفهوم السرعة الآنية.

والنتيجة المطلوبة، هنا، هي أنَّ سرعة تغيُّر الميل تبقى محدودة من أدنى بمقدار موجِبٍ.

[٢٩] انظر الحاشية السابقة.

نجد هنا نتيجة تخصُّ السينماتيكا السماوية أراد ابن الهيثم التوصُّل إليها في هذا المؤلَّف. ويُعَبَّر عن هذه النتيجة بواسطة تغيُّر السرعة الوسطى لحركة جرم سماوي. ويُمكن التعبير عندئذ عن هذه السرعة الوسطى ضمن إطار نظرية النِّسَب، بفضل تمثيل الأزمان، وكذلك المسافات، بأقواس من دوائر.

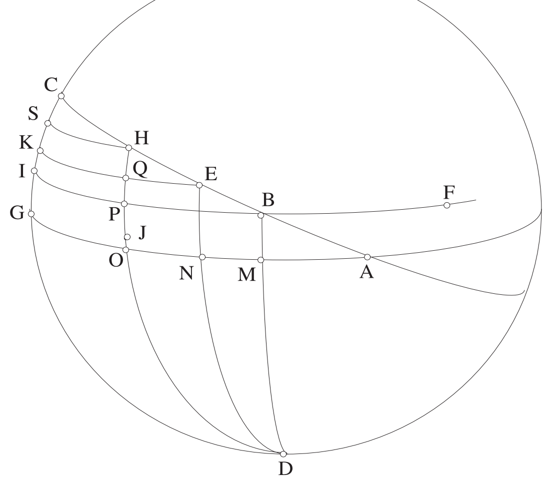
يُمكن دائماً، في الواقع، أن نُمَثِّل الزمن بأقواس من دائرة، لأنَّ كل الحركات الجزئيّة دائرية ومستوية. والزمن، كوسيط للحركات المَعْنِيَّة بالأمر، لا يدخل في المسألة إلا على هذا الشكل. ولكن تَدَخُّل الزمن في المسألة يأخذ معنى آخر عندما يتمُّ التخلّي عن مبدأي الحركات الدائرية والمستوية ؛ وهذا ما حصل في علم الفلك بعد كبلر. أما الحركات على القطوع الناقصة[٣٠]، التي يتناولها كبلر نفسه، فهي لا تخلو من بعض الانتظام بفضل قانون المساحات. وهكذا يُمكن تمثيل الزمن هندسياً بالمساحة التي يمسحُها الشعاعُ المُتَّجهي[٣١]؛ وبذلك لا يدخل الزمن حقاً كوسيط في هذه المسألة. ولقد توجَّب انتظار نيوتن قبل أن يحصل الزمن على دلالته الكاملة في قياس الحركة، بفضل مفهوميْ السرعة الآنية والتسارع.

القضية ٢٥- تخصُّ هذه القضية الحالة الثانية الواردة في القضية السابقة. ويُفترَض فيها أنَّ الكوكب جنوبَ دائرة معدّل النهار وأنّه يتحرَّك نحو الجنوب، من البعد الأبعد إلى البعد الأقرب.

ليكن ABC الفلكَ المائل ذا الطرف الجنوبي C، ولتكن AMG دائرة معدّل النهار ذات القطب الشمالي D.

يتحرَّك الكوكبُ من النقطة B نحو النقطة H (باتجاه التحرُّك من البعد الأبعد نحو البعد الأقرب) ويرسم القوسَ $\widehat{HB}$ باتجاه الطرف الجنوبي.

[٣٠] أي حيث يسير الكوكب على فلك شكله قطعٌ ناقصٌ، ويكون مركز الشمس إحدى بؤرتيْه (المترجم).
[٣١] الشعاع المتَّجِهي هنا هو المُتَجِه الذي يكون أصله في مركز الشمس ورأسه في مركز الكوكب (المترجم).



الشكل ١٠٠

$\Delta(A, B) = \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{PO}$ (Δ: الفرق بين ميلين)،

$\Delta(A, H) = \overset{\frown}{HO}$ ، $\Delta(A, E) = \overset{\frown}{EN} = \overset{\frown}{QO}$،

$\Delta(B, H) = \overset{\frown}{HP}$ ——< تخصّ الزمن (BI) ،

$\Delta(E, H) = \overset{\frown}{HQ}$ ——< تخصّ الزمن (EK)

$\delta(B, H) = \overset{\frown}{BP}$ (δ: الفرق بين الطالعين المستقيمين)، $\Delta(H, C) = (CS)$ ،

$\delta(H, C) = \overset{\frown}{SH}$ ، $\delta(E, H) = \overset{\frown}{EQ}$.

القوس $\overset{\frown}{AC}$ هي ربع دائرة والنقطتان B وَ H معلومتان، فتكون الأقواس $\overset{\frown}{CH}$ وَ $\overset{\frown}{SH}$ وَ $\overset{\frown}{CS}$، إذاً، معلومة؛ كما تكون كذلك كل الأقواس التي ورد ذكرها.

لنضع: $\frac{\overset{\frown}{BP}}{\overset{\frown}{PJ}} = \frac{\overset{\frown}{HS}}{\overset{\frown}{CS}}$. وهذا ما يحدِّد النقطة J على OP، فتكون القوس $\overset{\frown}{JP}$ معلومة وتكون النسبة $\frac{\overset{\frown}{HP}}{\overset{\frown}{PJ}}$ معلومة.

لنضع أيضاً $\frac{(FI)}{(IB)} = \frac{\overset{\frown}{HP}}{\overset{\frown}{PJ}}$ ؛ وهذا ما يُحدِّد النقطة F على القوس $\overset{\frown}{IB}$. فيكون الزمن (FI) معلوماً.

لنبيِّن أنَّ $\frac{(FI)}{\overset{\frown}{PH}} < \frac{(KQ)}{\overset{\frown}{QH}}$. لقد رأينا سابقاً أنَّ $\frac{(IB)}{(KE)} < \frac{\overset{\frown}{BH}}{\overset{\frown}{HE}}$. ولكن، وفقاً للقضية ٧، $\frac{\overset{\frown}{BH}}{\overset{\frown}{HE}} < \frac{\overset{\frown}{BP}}{\overset{\frown}{EQ}}$ ، فإذاً $\frac{(IB)}{(KE)} < \frac{\overset{\frown}{BP}}{\overset{\frown}{EQ}}$، فنستنتج أنَّ :

$$\frac{(KE)}{\widehat{EQ}} < \frac{(IB)}{\widehat{BP}}. \qquad (1)$$

ويكون معنا، من جهة أخرى، وفقاً للقضيتين ٦ وَ ٧: $\frac{\widehat{HS}}{\widehat{SC}} < \frac{\widehat{EQ}}{\widehat{QH}}$ [٣٢]، فيكون إذاً:

$$\frac{\widehat{EQ}}{\widehat{QH}} < \frac{\widehat{BP}}{\widehat{PJ}}. \qquad (2)$$

نستخرج من (1) وَ (2): $\frac{(KE)}{\widehat{QH}} < \frac{(IB)}{\widehat{PJ}}$؛

ولكن $\frac{(FI)}{\widehat{HP}} = \frac{(IB)}{\widehat{PJ}}$،

فإذاً $\frac{(KQ)}{\widehat{QH}} < \frac{(KE)}{\widehat{QH}} < \frac{(FI)}{\widehat{HP}}$؛

النسبة المعلومة $\frac{(FI)}{\widehat{HP}}$ هي أعظم من نسبة الزمن المحصَّل (QK) إلى القوس الخاصة به والتي هي الجزء $\widehat{QH}$ من القوس $\widehat{HP}$، وهذا الجزء هو الفرق بين ميليْ طرفيْ القوس $\widehat{AB}$ الذي تمَّ السير عليه. ويوجَد زمنٌ، هو (IF)، بحيث يكون لكل نقطة E من القوس $\widehat{BH}$ ،

$$\frac{(KQ)}{\Delta(E,H)} < \frac{(FI)}{\Delta(B,H)}.$$

والاستدلال الذي قمنا به للنقطة E التي أُرفِقت بها النقطة Q من القوس $\widehat{HP}$، صالح لكل نقطة أخرى من القوس $\widehat{HB}$.

يواصل ابن الهيثم سعيه إلى تحديد قاصر عن سرعة تغيُّر الميل. ولكننا لا نعلم إذا كانت سرعةُ تغيُّر الميل تزايديةً على القوس المعني بالأمر، بالرغم من أنَّنا نعلم أنَّ السرعة الزاويَّة تزايديّة. ولا يمكن أن نأخذ السرعة الوسطى لتغيُّر الميل على القوس بكاملها كقاصر عن سرعة تغيُّر الميل. وهكذا يُدخل ابن الهيثم، لهذا السبب، الزمنَ (IF) المحدَّد بشكل ملائم.

---

[٣٢] يكون معنا بالفعل، وفقاً للقضية ٦، $\frac{\widehat{HC}}{\widehat{HE}} < \frac{\widehat{SC}}{\widehat{HQ}}$، كما يكون وفقاً للقضية ٧: $\frac{\widehat{HS}}{\widehat{EQ}} < \frac{\widehat{HC}}{\widehat{HE}}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{\widehat{HS}}{\widehat{EQ}} < \frac{\widehat{SC}}{\widehat{HQ}}$،
فإذاً $\frac{\widehat{HS}}{\widehat{SC}} < \frac{\widehat{EQ}}{\widehat{QH}}$.

يقول ابن الهيثم إنَّ النتيجةَ المُثبَتة في (1) وَ (2) لحركة متسارِعة من الطرف الشمالي نحو الطرف الجنوبي، من البعد الأبعد نحو البعد الأقرب، تبقى صحيحة، إذا كانت الحركة حادثة من الطرف الجنوبي نحو الطرف الشمالي ، من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد، وإذا كانت متسارعة.

ويلاحظ ابن الهيثم أنَّه يجب استثناء جزءين مجاورين للطرفين الشمالي والجنوبي للفلك. فالسرعة المعنيَّة بالأمر تنعدم في هاتين النقطتين. ويلاحِظ أنَّ التحديد من أعلى لنسبة الزمن المحصَّل إلى الفرق بين الميلين يصلـُح في كل فسحة لا تحتوي على الطرفين الشمالي والجنوبي للفلك، ولكن ليس لدينا تحديدٌ من أعلى في فسحة تحتوي على أحد هذين الطرفين. وهكذا نرى أنَّ الأمر هنا يتعلـَّق بتحديد موضعي خارج هذين الطرفين؛ فلا يُمكن تعميمه على الفلك بكامله.

وهكذا يُعطي ابن الهيثم، بعبارة أخرى، تحديداً من أدنى للسرعة الوسطى في كل فسحة مُغلقة لا تنعدم فيها السرعة. إنَّ مثل هذا التحديد الإجمالي من أدنى هو بالفعل غير ممكن لأنَّ السرعة تنعدم في بعض النقاط.

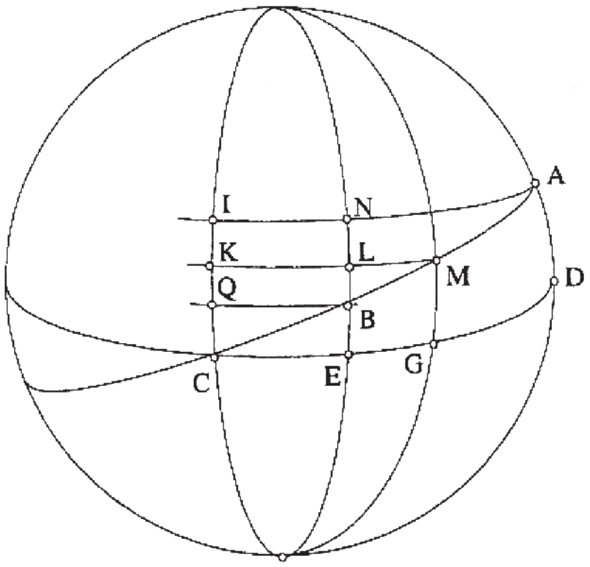
القضية ٢٦- يُعالج ابن الهيثم، بعد ذلك، حالة ثالثة تحدث فيها الحركة من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد. إنَّ حركة مركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز، التي هي مستوية، تُحدِث على القسم الشرقي لفلك الكوكب حركة متباطئة؛ ولكن ابن الهيثم يفترض أنَّ حركة الكوكب على فلك التدوير متسارِعة.

تَحدُث الحركة، في هذا المثال، من الجنوب نحو الشمال.

لتكن الدائرة ABC الفلكَ المائل ولتكن DEC دائرة معدّل النهار ذات القطب H. يتحرَّك الكوكب من البعد الأقرب إلى البعد الأبعد ومن الجنوب إلى الشمال على قوس الفلك التي هي في جنوب دائرة معدّل النهار.

النقطة A هي الطرف الجنوبي للفلك المائل ABC . تَحدثُ حركة الكوكب من A نحو B على الفلك، من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد على الفلك الخارج المركز. إذا كانت، في هذه

الحالة، A_1، M_1 وَ B_1 نقاط الفلك الخارج المركز التي توافق بالتتابع نقاط الفلك المائل A، M وَ B، يكون معنا وفقاً للقضية ٩:



الشكل ١٠١-١

$\frac{\widehat{B_1M_1}}{\widehat{M_1A_1}} < \frac{\widehat{BM}}{\widehat{AM}}$، فنستنتج أنَّ : $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} < \frac{\widehat{A_1M_1}}{\widehat{M_1B_1}}$. إذا رمزنا بـِ α وَ β إلى قوسين من الفلك (أو من دائرة مساوية له) مُشابهتين على التوالي للقوسين $\widehat{A_1M_1}$ وَ $\widehat{M_1B_1}$، يكون معنا:

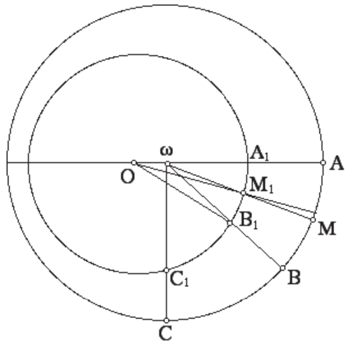
$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\widehat{A_1M_1}}{\widehat{M_1B_1}}$، فيكون إذاً : $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$ [٣٣] .

---

[٣٣] إذا رسمنا الفلك ذا المركز ω والفلك الخارج المركز ذا المركز O، وإذا أرفقنا مع النقطة A البعدَ الأقرب A_1 (الشكل ١٠١-٢) ، يكون معنا في هذه الحالة:

$\widehat{A_1OM_1} < \widehat{A\omega M}$ ، فنستنتج أنَّ $\alpha < \widehat{AM}$ وَ $2\widehat{A_1OM_1} > \widehat{A\omega M}$ ، فنستنتج أنَّ $\widehat{AM} < 2\alpha$.

ولقد رأينا في هذه الحالة أنَّ $\frac{\widehat{A_1M_1}}{\widehat{M_1B_1}} > \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$ ، أي أنَّ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$.



الشكل ١٠١-٢

أ) $\alpha < \widehat{AM}$ وَ $\beta < \widehat{BM}$ (هاتان المتباينتان تخصَّان الحالة التي تكون فيها النقاط A_1، M_1 وَ B_1 في جوار البعد الأقرب). يكون معنا في هذه الحالة (انظر الحاشية ٣٣):

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} \Leftarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\widehat{AM}-\alpha}{\widehat{MB}-\beta} .$$

نطرح من $\widehat{AM}-\alpha$ القوس α' بحيث يكون $\frac{\alpha'}{\widehat{MB}-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ ، فنستنتج أنَّ: $\frac{\alpha+\alpha'}{\widehat{MB}} = \frac{\alpha}{\beta}$،

فيكون $\alpha + \alpha' < \widehat{AM}$. فيكون معنا: $\widehat{AM} - \alpha < \alpha$ [٣٤] ، فإذاً: $\frac{\widehat{AM}-\alpha}{\widehat{MB}} > \frac{\alpha}{\beta}$، فنستنتج

أنَّ: $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} > \frac{\alpha}{\widehat{MB}} + \frac{\alpha}{\beta}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{2\alpha}{\beta} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$ ، فيكون إذاً : $\frac{2\alpha+\beta}{\beta} < \frac{\widehat{AM}+\widehat{MB}}{\widehat{MB}}$ ، وهذا

ما يتضمَّن $\frac{2(\alpha+\beta)}{\beta} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$.

ولكن $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{M_1B_1}} = \frac{(IA)}{(KM)}$، فإذاً $\frac{2(IA)}{(KM)} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$.

ب) $\alpha > \widehat{AM}$ وَ $\beta > \widehat{BM}$ (هاتان المتباينتان تخصَّان الحالة التي تكون فيها النقاط A_1، M_1 وَ B_1 في جوار البعد الأبعد)، مع $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} < \frac{\alpha}{\beta}$. يكون معنا إذاً: $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha-\widehat{AM}}{\beta-\widehat{MB}}$.

لتكن β' جزءاً من الفرق $\beta - \widehat{BM}$ بحيث يكون $\frac{\alpha-\widehat{AM}}{\beta'} = \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$، فيكون معنا:

$\beta' < \beta - \widehat{BM}$. نحن نعلم أنَّ $\beta > \widehat{BM} \Leftarrow \beta - \widehat{BM} < \widehat{BM}$ [٣٥] ، فإذاً $\beta' < \widehat{BM} < \beta$. إذا

أضفنا إلى α قوساً، α'، بحيث يكون $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} = \frac{\alpha'}{\beta'}$، يكون معنا عندئذ $\alpha' < \widehat{AM}$، فيكون إذاً

$\alpha' < \alpha$.

الفرضيتان $\alpha > \widehat{AM}$ وَ $\widehat{BM} < \beta < 2\widehat{BM}$ تتضمَّنان $\frac{2\alpha}{\beta} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$، فنستنتج أنَّ:

---

[٣٤] في هذا المثلَّث ωOM_1 ، يكون معنا $O\omega < \omega M_1$ ، فإذاً $\alpha > \widehat{M_1}$، $\alpha + \widehat{M_1} < 2\alpha$ ، فإذاً $\widehat{A\omega M} < 2\alpha$. يكون معنا إذاً $\widehat{AM} < 2\alpha$ أو $\widehat{AM} - \alpha < \alpha$.

[٣٥] لنلاحظ أنَّ $\widehat{BM} < \widehat{BM}$ $\beta - \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \widehat{BM}$ ، $\frac{2\alpha}{\beta} < \frac{2\widehat{AM}}{\beta} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$، وهذا ما يستخدمه ابن الهيثم فيما بعد.

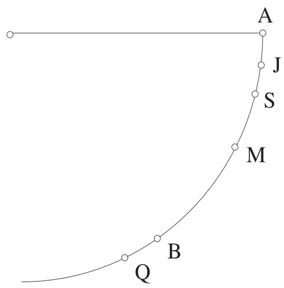
$\frac{2\alpha+\beta}{\beta} < \frac{\widehat{AM}+\widehat{MB}}{\widehat{MB}}$ ، وهذا ما يتضمّن $\frac{2(\alpha+\beta)}{\beta} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$ ، فيكون معنا إذاً، كما هي الحال في القسم أ) : $\frac{2(IA)}{(KM)} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$.

ج) $\alpha < \widehat{AM}$ وَ $\beta > \widehat{BM}$ ؛ وهذا ما يُمكن أن يحدث عندما تكون النقاط A_1، M_1 وَ B_1 في جوار منتصف المسار من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد.

لنضع $\alpha = \widehat{JM}$، فيكون $\widehat{AJ} < \widehat{JM}$ وَ $\widehat{AM} < 2\widehat{JM}$ ؛ ولنضع $\beta = \widehat{MQ}$، فيكون:

$\widehat{BM} > \widehat{BQ}$، لأنَّ $\widehat{BM} > \frac{\beta}{2}$. لتكن النقطة S بحيث يكون $\frac{\widehat{SM}}{\widehat{MB}} = \frac{\widehat{JM}}{\widehat{MQ}}$، فيكون معنا عندئذ:

$\widehat{SM} < \widehat{JM}$ وَ $\frac{\widehat{JS}}{\widehat{BQ}} = \frac{\widehat{JM}}{\widehat{MQ}}$ ؛



الشكل:١٠١-٣

يكون معنا: $\widehat{AM} < 2\widehat{JM}$، فيكون إذاً: $\frac{2\widehat{JM}}{\widehat{MB}} > \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$. ولكن $\widehat{BM} > \widehat{BQ}$ وهذا ما يتضمَّن

$\widehat{MQ} < 2\widehat{BM}$. فيكون إذاً: $\frac{4\widehat{JM}}{\widehat{MQ}} > \frac{2\widehat{JM}}{\widehat{MB}} > \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$. فيكون إذاً: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}} < \frac{\widehat{MQ}+4\widehat{JM}}{\widehat{MQ}}$ ، أي أنَّ:

$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}} < \frac{4\alpha+\beta}{\beta}$ ؛ وهذا ما يتضمّن: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}} < \frac{4(\alpha+\beta)}{\beta}$ ؛ ولكنَّ النسبة: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{(IA)}{(KM)}$ هي

نسبة زمن المسير على $\widehat{AB}$ إلى زمن المسير على $\widehat{BM}$ ، فيكون إذاً: $\frac{4(IA)}{(KM)} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$.

وهكذا نعرف كيف نجد في الحالات الثلاث أ)، ب) وَ ج) زمناً، هو t، بحيث يكون:

$\frac{t}{(KM)} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}}$. ولكن: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{MB}} < \frac{\widehat{NB}}{\widehat{BL}}$ ، $\Delta(A, B) = \widehat{NB}$ ، $\Delta(B, M) = \widehat{BL}$ ،

$\frac{t}{(KM)} > \frac{\widehat{NB}}{\widehat{BL}}$ أو $\frac{t}{\widehat{NB}} > \frac{(KM)}{\widehat{BL}}$ ، أي $\frac{(KM)}{\Delta(B,M)} < \frac{t}{\Delta(A,B)}$.

ونجد في هذه الحالة أيضاً، التي تكون فيها الحركة متباطئة، حدّاً من أدنى موجِباً لسرعة تغيُّر الميل. وهذه الحالة أكثرُ صعوبةً من الحالة السابقة، لأنَّ السرعة الزاويّة تتناقص.

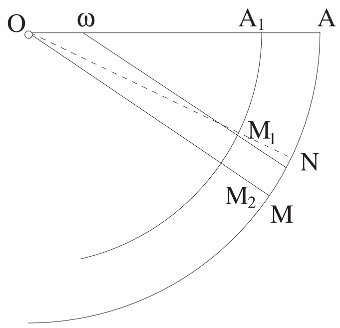
التصحيح العائد إلى فلك التدوير

لقد أخذنا، عند دراسة حركة الكوكب من البعد الأقرب إلى البعد الأبعد، قوسيْ الفلك الخارج المركز α وَ β المرفقين بقوسيْ الفلك $\widehat{AM}$ وَ $\widehat{BM}$، من دون الأخذ بعين الاعتبار لحركة فلك التدوير.

إذا كان الكوكب في النقطة M_1 على الفلك الخارج المركز مع $\alpha = \widehat{A_1M_1}$، فإنَّ الراصد O يراه في النقطة N على الفلك؛ وإذا كان الكوكب في النقطة M_2 على فلك التدوير، فإنَّ الراصد يراه في النقطة M. إنَّ $\widehat{AN}$ هي القوس المُرفقة بـِ α حتّى الآن، $\widehat{AM} = \widehat{AN} + c$، حيث تكون c القوس المُصحِّحة التي يُفترَض في النص أنها جمعية. القوس $\widehat{AN}$ هي القوس الواجب تصحيحها:

$\widehat{AM} - c = \widehat{AN}$ ، أما $\widehat{AM}$ فهي القوس التي نحصل عليها بعد التصحيح.

وكذلك، فإنَّ القوس $\widehat{BM}$ هي القوس التي نحصل عليها بعد التصحيح، حيث تكون القوس الواجب تصحيحها $\widehat{BM}$ - c'.



الشكل ٢-١٠١-١

لقد تفحَّص ابن الهيثم ثلاث حالات:

$$\frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'} = \frac{c}{c'} \text{ ؛ } \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'} > \frac{c}{c'} \text{ ؛ } \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'} < \frac{c}{c'}.$$

•إذا كان $\frac{c}{c'} = \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'}$ ، يكون عندئذ $\frac{c}{c'} = \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$. فيكون معنا : $\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} = \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'}$. وهذا ما يُرجعنا إلى الحالة الخاصة، لأنَّ $\widehat{AM}-c$ وَ $\widehat{AM}-c'$ هما القوسان اللتان دُرِسَتا سابقاً.

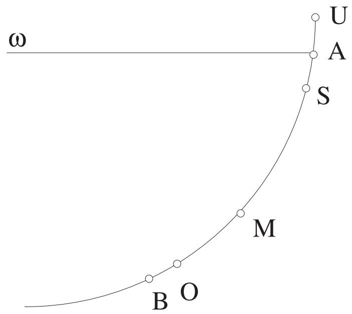
•إذا كان $\frac{c}{c'} > \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'}$ ، يكون معنا عندئذ $\frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} < \frac{c}{c'}$ ، (نحن نعلم بالفعل أنَّ $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$ تتضمَّن $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$).

فيكون معنا، وفقاً لما سبق:

$$\frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}} < \frac{(\widehat{AM}-c)+(\widehat{MB}-c')}{\widehat{MB}-c'} < \frac{\text{زمن معلوم}}{\text{(KM)}}$$

•إذا كان $\frac{c}{c'} < \frac{\widehat{AM}-c}{\widehat{MB}-c'}$ ، يكون معنا عندئذ $\frac{c}{c'} < \frac{\widehat{AM}}{\widehat{MB}}$.

لتكن $\widehat{AS}$ القوسَ المُصَحِّحَة للقوس $\widehat{AM}$ ، فتكون إذاً $\widehat{MS}$ القوسَ قبل التصحيح ؛ ولتكن $\widehat{BO}$ القوسَ المصَحِّحةَ للقوس $\widehat{MB}$ فتكون $\widehat{MO}$ عندئذ القوسَ قبل التصحيحَ، ولذلك فإنَّ $\widehat{SO}$ هي القوسُ التي تعطي بعد التصحيح القوسَ $\widehat{AB}$.



الشكل ٢-١٠٢

لنفترض أنَّ:

$$(1) \qquad \frac{\widehat{AS}}{\widehat{BO}} < \frac{\widehat{MS}}{\widehat{MO}}.$$

لقد أثبتنا أنه يوجد زمن معلوم t_c بحيث يكون

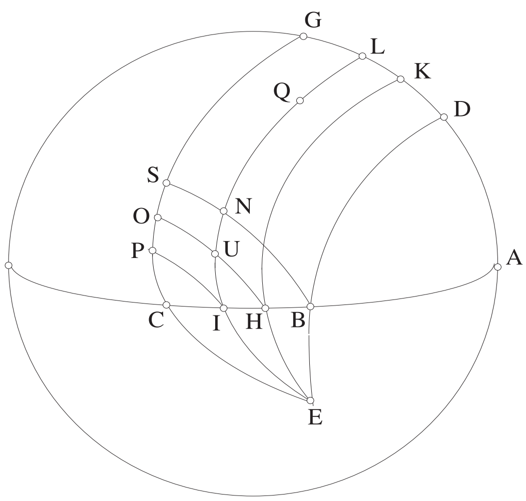
$\frac{t_c}{(KM)} > \frac{\overset{\frown}{SO}}{\overset{\frown}{MO}}$. (2)

لتكن النقطة U بحيث يكون $\overset{\frown}{AU} = \overset{\frown}{BO}$، فالقوس $\overset{\frown}{SU} = \overset{\frown}{BO} + \overset{\frown}{AS}$ هي إذاً معلومة والقوس $\overset{\frown}{SO}$ معلومة، فتكون النسبة $\frac{\overset{\frown}{US}}{\overset{\frown}{SO}}$ إذاً معلومة.

ليكن t زمناً اختيارياً بحيث يكون: $\frac{\overset{\frown}{US}}{\overset{\frown}{SO}} = \frac{t}{t_c}$ ؛ يكون معنا: $\frac{\overset{\frown}{UO}}{\overset{\frown}{SO}} = \frac{t+t_c}{t_c}$، فيكون معنا إذاً وفقاً لِـ (2): $\frac{t+t_c}{(KM)} > \frac{\overset{\frown}{UO}}{\overset{\frown}{OM}}$. ولكن $\frac{\overset{\frown}{UO}}{\overset{\frown}{OM}} > \frac{\overset{\frown}{AO}}{\overset{\frown}{OM}}$ وَ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{MB}} > \frac{\overset{\frown}{AO}}{\overset{\frown}{OM}}$ [٣٦]، ومن جهة أخرى $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{MB}} > \frac{\overset{\frown}{NB}}{\overset{\frown}{BL}}$ ، فيكون معنا إذاً $\frac{t+t_c}{(KM)} > \frac{\overset{\frown}{NB}}{\overset{\frown}{BL}}$؛ فإذا بدّلنا نحصل على $\frac{t+t_c}{\overset{\frown}{NB}} > \frac{(KM)}{\overset{\frown}{BL}}$.

القضية ٢٧- تخصُّ هذه القضية الحالة الرابعة من القضية ٢٤.

دائرة معدّل النهار هي GDA وقطبها هو E، والفلك المائل هو ABC . النقطة C هي الطرف الشمالي على هذا الفلك. ينتقل الكوكب على القوس $\overset{\frown}{CA}$. وتكون الحركة على الفلك الخارج المركز من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد.



الشكل ١٠٣

[٣٦] لأنّ $\frac{\overset{\frown}{AM}}{\overset{\frown}{MB}} > \frac{\overset{\frown}{AM}}{\overset{\frown}{OM}}$.

لنأخذ الحركة التي تَحْدُثُ على القوس IB في زمن معلوم (SB)؛ H هي نقطة معلومة من القوس $\widehat{BI}$ والقوس $\widehat{IH}$ يتمُّ المسير عليها في وقت معلوم (OH). إنَّ أزمانَ المسير مُمَثَّلة بأقواس من دوائر موازية لدائرة معدّل النهار.

الدوائر العظام EC، EI ، EH وَ EB تقطع دائرة معدّل النهار على النقاط: G، L ، K وَ D.

الدائرتان الموازيتان لدائرة معدّل النهار والمارَّتين بالنقطتين H وَ B، تقطع القوس $\widehat{IL}$ على النقطتين U وَ N؛ فيكون معنا وفقاً للقضية ٧: $\frac{\widehat{NB}}{\widehat{HU}} > \frac{\widehat{BI}}{\widehat{HI}}$.

الدائرة الزمانية المارّة بالنقطة I تقطع القوس $\widehat{GC}$ على النقطة P. القوس $\widehat{CI}$ معلومة؛ فإذاً $\widehat{IP}$ التي هي الفرق بين طالعيْ I وَ P المستقيمين، وَ $\widehat{CP}$، التي هي الفرق بين ميلين بالنسبة إلى معدِّل النهار، معلومتان ؛ ويكون $\frac{\widehat{HU}}{\widehat{UI}} > \frac{\widehat{IP}}{\widehat{PC}}$، وفقاً للقضية ١٤.

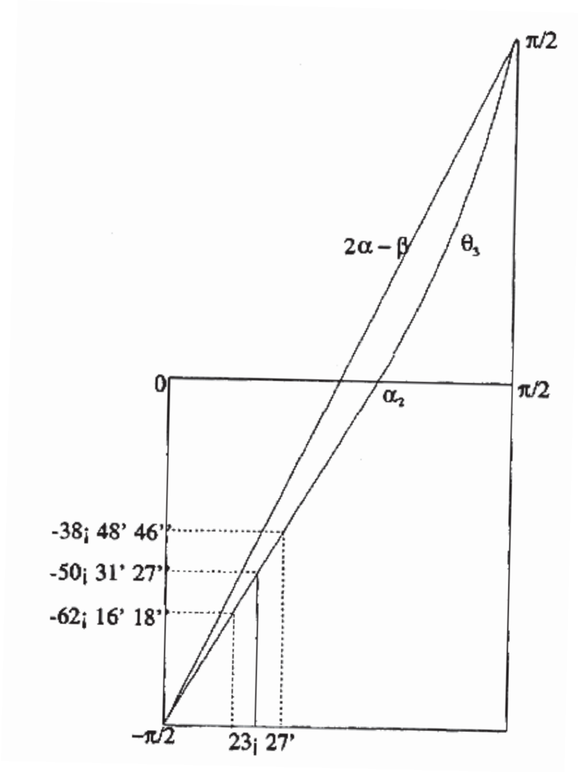
نطبِّق هنا القضية ١٤ مع $\beta = \frac{\pi}{2}$ وَ α قريبة من $23°27'$، أي من $0,4092797$ زاوية نصف قطرية (ميل فلك البروج بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار)، وهذا يعني أنَّ هذا التطبيق يَجري ضمن الشروط التي يكون فيها: $\alpha < \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4} = 45°$. نحن نعرف أنـَّه يجب عندئذ أن نُخضِع θ لشرط حصري يؤمِّن صحة القضية ١٤، وهو أنْ نَقصِرَ تغيُّرَ θ على الفسحة : $\theta_3 \leq \theta$ (مع $\theta_4 \leq \theta_3$). فنجد، إذا كان $\alpha = 23°27'$ ، أنَّ:

$$\theta_3 = -0,881811255 = -50°31'\,27''.$$

والزاوية المركزية φ التي تُوَتـِّر القوس $\widehat{HC}$ تكون معطاة بواسطة المعادلة:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin\beta}\text{،}$$

والطرف الأيسر من هذه المعادلة يساوي هنا $-\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}$ ، لأنَّ $\beta = \frac{\pi}{2}$. أما الشرط $\theta_3 \leq \theta$ فهو معادل للمتباينة : $\cos\varphi \leq -\frac{\cos(\alpha-\theta_3)}{\sin\alpha} = -0,6937389$ ،



الشكل ١٠٤

وهذا ما يعطي $\varphi \leq 133°55'36''$. لقد وضعنا على الشكل قيمة $\alpha = 23°27'$ وقيمة $\theta_3 = -50°31'27''$ الموافقة لها؛ كما أننا سجَّلنا القيمتين القصوَيَيْن لِـ α في حالة عطارد، مع العلم بأنَّ ميل فلك هذا الكوكب بالنسبة إلى فلك البروج يساوي $7°14''$. وقيمتا θ_3 الموافقتان لقيمتيْ α القصوَيَيْن هما، في هذه الحالة، على التوالي $-62°16'18''$ وَ $-38°48'46''$ ؛ وهذا ما يعطي لحدّ φ الأقصى القيمتين: $133°42'49''$ وَ $134°18'17''$ ؛ إنَّ أفلاك الكواكب الأخرى هي أقلّ ميلاً من فلك عطارد. وعلى كل حال، عندما تتزايد α من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$، فإنَّ حدَّ φ الأقصى، يتزايد ببطء من $133°33'51''$ إلى $180°$.

ولكن $\widehat{HC} < \widehat{AC}$ ، حيث تكون $\widehat{AC}$ مساوية لربع دائرة؛ وهكذا تكون φ دائماً أصغر من $\frac{\pi}{2}$، وهذا العدد أصغر من $133°33'51''$ ، فيكون قول ابن الهيثم، إذاً، صحيحاً.

لتكن Q نقطة على القوس $\widehat{LI}$ مُعرَّفة بالمعادلة $\frac{\widehat{BN}}{\widehat{NQ}} = \frac{\widehat{IP}}{\widehat{PC}}$، فيكون معنا: $\frac{\widehat{BN}}{\widehat{NQ}} < \frac{\widehat{HU}}{\widehat{UI}}$، حيث تكون القوس $\widehat{NQ}$ معلومة.

ليكن t_c الزمن المعلوم المعرَّف سابقاً والذي يُحقّق: $\frac{t_c}{(OH)} < \frac{\widehat{BI}}{\widehat{IH}}$، وليكن t الزمن المعرَّف بالمعادلة $\frac{t}{tc} = \frac{\widehat{IN}}{\widehat{NQ}}$ ، فيكون معنا:

$$\frac{t}{\widehat{IN}} = \frac{t_c}{\widehat{NQ}} \qquad (1)$$

ويكون الزمن t معلوماً.

ولكن $\frac{\widehat{BI}}{\widehat{IH}} < \frac{\widehat{BN}}{\widehat{HU}}$، فإذاً: $\frac{t_c}{(OH)} < \frac{\widehat{BN}}{\widehat{HU}}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{t_c}{\widehat{BN}} < \frac{(OH)}{\widehat{HU}}$. ولكن معنا من جهة أخرى $\frac{\widehat{BN}}{\widehat{NQ}} < \frac{\widehat{UH}}{\widehat{UI}}$ (على أن يتحقَّق الشرط الحصريّ، الذي ذكرناه سابقاً، الخاص بقياس القوس $\widehat{CH}$)، فيكون إذاً:

$$\frac{t_c}{\widehat{NQ}} < \frac{(OH)}{\widehat{UI}}. \qquad (2)$$

نستخرج من (1) وَ (2): $\frac{t}{\widehat{NI}} < \frac{(OH)}{\widehat{UI}} < \frac{(OU)}{\widehat{UI}}$، حيث يكون (UO) الزمن المحصَّل المُرفق بالقوس $\widehat{IU}$ التي هي الفرق بين ميلي النقطتين H وَ I بالنسبة إلى معدل النهار. ويكون البرهان صالحاً، مهما كان موضع النقطة H بين B وَ I (على أن يتحقَّق الشرط الحصريُّ السابق).

يُمكننا إذاً أن نحصل على النتيجة بنفس الطريقة عندما تحدث حركة الكوكب من الطرف الجنوبي نحو الطرف الشمالي، من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد، أو عندما تحدث حركة الكوكب من الطرف الشمالي نحو الطرف الجنوبي، من البعد الأقرب نحو البعد الأبعد. ونحصل، في جميع هذه الحالات، على قاصر عن سرعة الطالع المستقيم الوسطى.

٢ـ ٣ـ دراسة ارتفاعات كوكب فوق الأفق

يعرض ابن الهيثم هذه المسألة في القضيتين ٢٨ وَ ٢٩. يُفترَض أنْ تكون الكرة منتصبة أو أن تكون مائلة نحو الجنوب، أي أنْ يكون القطب الشمالي لمعدل النهار على الأفق أو فوق الأفق. يفترض ابن الهيثم أنَّ مرور الكوكب على دائرة نصف النهار يحدث جنوب قطب الأفق.

نلاحظ أنَّ ابن الهيثم يدرس هنا تغيُّر ارتفاع الكوكب خلال حركته، أيْ وفقاً للزمن، في جوار النقطة M ذات الارتفاع الأقصى؛ يتمُّ بلوغ كل ارتفاع أصغر من ارتفاع M في نقطتين من مسار الكوكب. يستخدم ابن الهيثم، للحصول على هذه النتيجة، ميزة اتصال الحركة: يتم الحصول على كل ارتفاع متوسِّط بين ارتفاع D وارتفاع M مرة بين X وَ M ومرة أخرى بين M وَ D. ثم يُبرهن، بعد ذلك، أنَّ هذا الارتفاع يتناقص بدءاً من مرور الكوكب على دائرة نصف النهار.

القضية التالية تعرض الدراسة الخاصة بالحالة التي تحدث فيها حركة الكوكب من الطرف الجنوبي نحو الطرف الشمالي.

يُثبت ابن الهيثم في القضية ٣٠ وحدانية النقطة التي يبلغ ارتفاع الكوكب أقصاه عند مروره فيها. فهو يبني متتالية من النقاط، على مسار الكوكب، تسعى نحو K، ثم يُثبت، باستدلالات من هندسة اللامتناهيات في الصغر على الكرة، أنَّ ارتفاع كل من هذه النقاط أصغر من ارتفاع K. إنَّ هذه الاستدلالات ترتكز على أنَّ أيَّ مثلَّثٍ كروي لامتناهٍ في الصغر (أيْ ذي قطر مقارب للصفر) يُعْتَبَرُ مثلثاً مُسطَّحاً له نفس الرأس.

يسعى ابن الهيثم، في القضية ٣١، إلى تعميم الخاصّة المُثبَتة موضعياً في القضية ٢٨؛ وهي أنَّ كل ارتفاع أصغر من الارتفاع الأقصى يتمُّ بلوغه مرتين بالضبط. وهو يستخدم لأجل ذلك نفس الطرائق التي استخدمها في القضية ٣٠. لنلاحظ أنَّه بحاجة إلى القضية ١٥ في حالة مشكوك بأمرها، وهذا ما يُقلِّل من عمومية نتيجته.

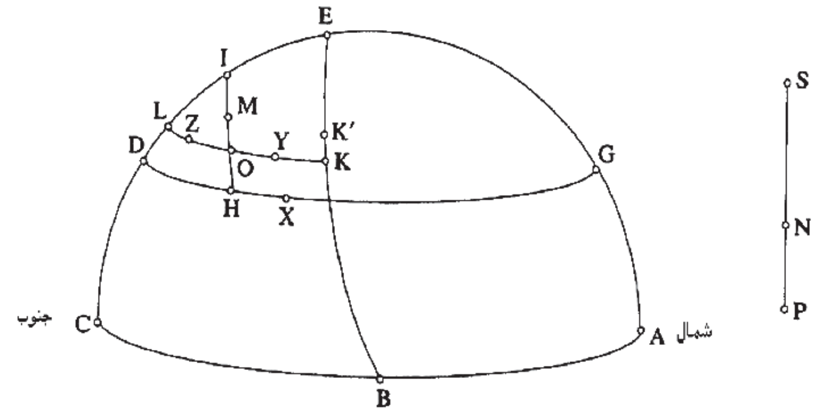
القضية ٢٨- يفترض ابن الهيثم أنَّ الكوكب ينتقل على فلكه من الطرف الشمالي نحو الطرف الجنوبي من دون أن يبلغ الطرف الجنوبي.

ليس هناك أية فرضية إضافية في حالة الشمس؛ وفي حالة القمر، هناك إمّا الحركةُ الاختلافية المتسارِعة على الفلك الخارج المركز، وإما التصحيحُ الجمعيُّ اللازم بواسطة فلك التدوير؛ وفي حالة الكواكب الأخرى، هناك الحركة الاختلافية المتسارِعة أو/ مع حركة فلك التدوير المتسارِعة.

يدرس ابن الهيثم، في هذه الحالة، ارتفاعات الكوكب:

أ) بين شروقه وبين مروره على دائرة نصف النهار، أي الارتفاعات الشرقية

ب) بين مروره على دائرة نصف النهار وبين غروبه، أي الارتفاعات الغربية.



الشكل ١٠٥

أ) لتكن ABC دائرة الأفق ذات القطر AC، ولتكن CDA دائرة نصف النهار لمكان الراصد، ولتكن B نقطة شروق أحد الكواكب السبعة المتحيِّرة.

نُخرج من النقطة B الدائرة EB الموازية لدائرة معدّل النهار والتي تقطع دائرة نصف النهار على النقطة E[٣٧]. ولو كان ميلُ الكوكب ثابتاً بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، لرسم الكوكبُ بفعل الحركة اليومية الدائرةَ EB الموازية لمعدِّل النهار. ولكن الكوكب يمرُّ في النقطة D على دائرة نصف النهار. لنُخرج من النقطة D الدائرة GHD الموازية للأفق، ولنُخرج من نقطة منها، H، دائرةً موازية للدائرة EB وقاطعةً لدائرة نصف النهار على النقطة I بحيث تحقّق النسبة $\frac{HI}{ID}$ المتباينةَ $\frac{SN}{NP} < \frac{HI}{ID}$ (القضية ١٠).

والنسبة $\frac{SN}{NP}$ هي، وفقاً للفرضيات، أكبر من نسبة الزمن المحصَّل إلى الميل الخاص بهذا الزمن المحصَّل، لكل قوس ينتقل عليها الكوكب بين النقطة B والنقطة D (ويكون معنا على الأخص $\frac{\widehat{BE}}{\widehat{ED}} < \frac{SN}{NP}$).

لنفرض I بين E وَ D (وإلا فإنّنا نختار النقطة I ثم نختار تبعاً لذلك نقطة أخرى H؛ وفقاً للقضية ١١ إذا كانت الكرة منتصبة، أو وفقاً للقضية ١٢ إذا كانت الكرة مائلة).

[٣٧] الاستدلال صالح للكرة المنتصبة وللكرة المائلة. إذا كانت الكرة منتصبة، تكون كل دائرة زمانية (موازية لدائرة معدّل النهار) عمودية على دائرة الأفق.

يمرُّ مستوي دائرة نصف النهار CDA بسمت الرأس الذي هو قطب الأفق وبقطب دائرة معدّل النهار. فهو إذاً عمودي على مستوي GHD وعلى مستوي الدائرة EB وعلى مستوي الدائرة IH.

إنَّ لدينا $\frac{HI}{ID} < \frac{SN}{NP}$، فيكون إذاً:

$\frac{\widehat{HI}}{\widehat{ID}} < \frac{SN}{NP} < \frac{t_{\text{المحصَّل}}}{\widehat{ID}}$ [٣٨]، فيكون: $\widehat{HI} <$ (الزمن المُحصَّل الخاص بالقوس $\widehat{ID}$).

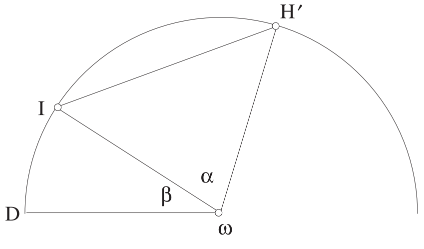
ليكن $\widehat{MI}$ الزمن المحصَّل الخاص بالقوس $\widehat{ID}$، فتكون النقطة M إذاً على القوس $\widehat{HI}$ وفوق المستوي DHG. يقطع مسارُ الكوكب القوسَ $\widehat{HI}$ على النقطة M ويكون قبل أن يبلغ النقطة M قد قطع إذاً الدائرة DHG على نقطةٍ، X، يكون لها نفس ارتفاع D (يساوي هذا الارتفاع $\widehat{CD}$). والنقطة X هي بين الدائرتين EB وَ IH الموازيتين لدائرة معدّل النهار. وارتفاع الكوكب في النقطة M هو أكبر من $\widehat{CD}$. وهكذا يبلغ الكوكب في مساره من جهة الشرق نقطةً ذات ارتفاع أكبر من ارتفاع نقطة مروره على دائرة نصف النهار.

لتكن O نقطة اختيارية على الدائرة HI بين M وَ H؛ نُخرج من O دائرةً، KOL، موازيةً للدائرة DHG، تقطع دائرة نصف النهار على النقطة L فوق النقطة D. إنَّ النقطة M فوق

---

[٣٨] هذا يفرض أنَّ $\frac{HI}{ID} < \frac{\widehat{HI}}{\widehat{ID}}$

نحن نعرف أنَّ DE قوس صغيرة جداً وأنَّ $\widehat{BC} < \widehat{ED}$ ، فإذاً $\frac{SN}{NP} > 1$، وبالتالي $\frac{HI}{ID} > 1$ أيْ $DI < HI$. القوسان $\widehat{DI}$ وَ $\widehat{HI}$ تنتميان إلى دائرتين لهما نصفا القطرين R وَ R' ، مع $R' < R$ بشكل عام. وإذا أخذنا مثال الشمس، فإنَّ $R' = R$ في يوم الاعتدال (الربيعي أو الخريفي).



الشكل ١٠٦

الوتر HI يقبل الزاوية المركزية α مع $\alpha < \beta$ ، حيث توَتِّر الزاوية المركزية β الوتر ID. لنأخذ النقطة H' على دائرة نصف النهار ADC بحيث يكون $\widehat{I\omega H'} = \alpha$. نحن نعرف، وفقاً للقضية ١ أنَّ: $\frac{\widehat{IH'}}{\widehat{ID}} < \frac{IH'}{ID}$ ، أي أنَّ: $\frac{\widehat{IH'}}{IH'} < \frac{\widehat{ID}}{ID}$؛ ولكن $\frac{\widehat{IH'}}{IH'} = \frac{\widehat{IH}}{IH}$؛ وهكذا يكون $\frac{\widehat{IH}}{IH} < \frac{\widehat{ID}}{ID}$، أي $\frac{\widehat{IH}}{\widehat{ID}} < \frac{IH}{ID}$.

الدائرة KOL، والنقطتان B وَ D هما تحتها، فلذلك يلتقي الكوكب بالدائرة KOL مرتين: في المرة الأولى في النقطة Y خلال انتقاله من B إلى M، وفي المرة الثانية في النقطة Z خلال مروره من M إلى D. والنقطتان Y وَ Z لهما نفس الارتفاع $\widehat{LC}$ ($\widehat{LC} > \widehat{DC}$).

النقاط X، Y ، M وَ Z[39] على مسار الكوكب تكون كلها شرق دائرة نصف النهار CDA. ليكن h الارتفاع. إنَّ لدينا:

$h(X) < h(Y) < h(M)$ ، $h(D) = h(X)$ وَ $h(Z) = h(Y)$.

وتوافق كلُّ نقطة O' من القوس $\widehat{HI}$ ، بنفس الطريقة، دائرةً أفقية $L'O'K'$ يلتقي بها مسار الكوكب في نقطتين Y' وَ Z'، بحيث يكون:

$h(Z') = h(Y')$ ، $h(Y) < h(Y')$ وَ $h(Z) < h(Z')$.

وتكون الارتفاعات المعنية بالأمر كلها أكبر من الارتفاع المشترك للنقطتين X وَ D.

ب) تتواصل حركة الكوكب إلى ما بعد النقطة D، أي إلى ما بعد دائرة نصف النهار نحو الأفق الغربي. فيتناقص ارتفاع الكوكب عندئذ من $h(D)$ إلى 0.

تكون الدائرة الزمانية QD مُماسَّة للدائرة الأفقية DHG في النقطة D (لأنَّ أقطاب هاتين الدائرتين موجودة على دائرة نصف النهار المارة بالنقطة D).

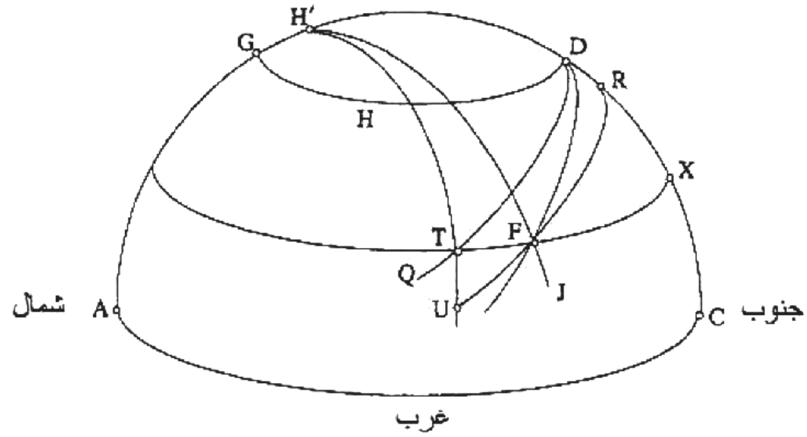
ترسمُ نقطة الفلك، التي كانت في النقطة D، القوسَ $\widehat{QD}$ بفضل الحركة اليومية؛ ولكنَّ الكوكب، بفضل حركته الخاصة، يترك الدائرة QD باتجاه الجنوب. لتكن النقطة F أحد مواضعه، ولتكن RFU الدائرة الزمانية للنقطة F ؛ وهي تقطع دائرة نصف النهار على R، ويكون معنا: $\widehat{CD} > \widehat{CR}$ ؛ ولكن، إذا كان $h(F)$ ارتفاع F ، يكون معنا:

$h(F) < CR < CD$؛ ولكنَّ $h(D) = CD$ ، فيكون إذاً $h(D) > h(F)$.

لتكن XFT دائرة F الأفقية، وهي تقطع الدائرة الزمانية QD على النقطة T شمال F. لنُخرج من النقطتين T وَ H' الدائرة العظمى $H'T$ التي تقطع الدائرة الزمانية UFR على نقطة شمال النقطة F؛ ولتكن U هذه النقطة. القوسان $\widehat{UR}$ وَ $\widehat{TD}$ متشابهتان وَيكون $\widehat{RF} > \widehat{RU}$ ، فتكون القوس $\widehat{TD}$ أعظم من القوس المشابهة للقوس $\widehat{RF}$.

---

[39] النقاط: X، Y، Z، O'، L' وَ K' ليست موجودة في النصّ.



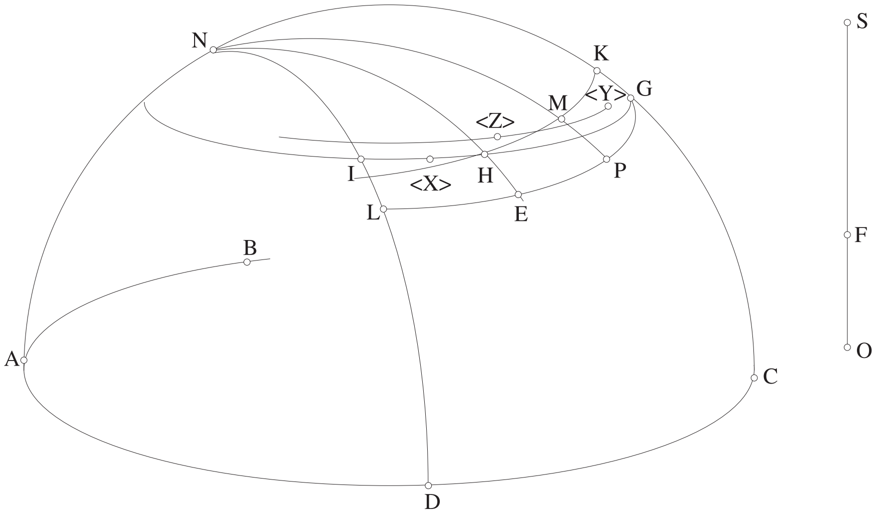
الشكل ١٠٧

القوس $\widehat{FR}$ هي شرق دائرة نصف النهار $H'FJ$. فلا يعود الكوكب قبل مغيبه، إلى هذه الدائرة؛ وبما أنَّ الكوكب يُتَابع حركته جنوب الدائرة RFU، فإنَّه لا يعود على القوس $\widehat{TF}$ ولا على القوس $\widehat{FX}$. وهو يلتقي بالدائرة الأفقية XF مرة واحدة فقط في النقطة F. ونُبيِّن بنفس الطريقة أنَّ الكوكب، في حركته بين النقطة D ونقطة غروبه من جهة الغرب، يلتقي مرّة فقط بكل دائرة أفقية بين الدائرة DHG والأفق.

القضية ٢٩- الشروط الخاصة بالكرة السماوية للأفق المعني بالأمر، هي هنا نفس الشروط المُعْتَمَدة في القضية ٢٨. يستعيد ابن الهيثم الفرضيات للقمر والكواكب الخمسة، ويفترض أنَّ الكوكب ينتقل على فلكه من الطرف الجنوبي نحو الطرف الشمالي من دون أن يبلغ هذا الطرف.

أ) يدرس ابن الهيثم أوَّلاً ارتفاعات الكوكب بين مروره على دائرة نصف النهار وغروبه.

ليكن $ABCD$ أفقاً وَلتكن $ANGC$ دائرة نصف النهار في مكان الراصد.



الشكل ١٠٨

يُشرق الكوكب من جهة الشرق ويمرُّ على دائرة نصف النهار في النقطة G؛ وندرس حركته من لحظة مروره هذه إلى مغيبه في النقطة D. لتكن النقطة N قطب دائرة معدّل النهار، ولتكن GHI دائرة G الأفقية. تقطع دائرة G الزمانية الدائرةَ العظمى DN على النقطة L. والقوس $\widehat{LG}$ هو الزمن المحصَّل وَ $\widehat{LD}$ هو ميل حركة الكوكب بين النقطتين G وَ D.

لتكن $\frac{SF}{FO}$ نسبة معلومة بحيث تكون هذه النسبة أكبر من نسبة كل زمن مُحصَّل إلى جزء ميل الحركة الخاص بهذا الزمن المحصَّل. نحدِّد على الدائرة الأفقية GHI نقطة، هي H، بحيث تقطع دائرة H الزمانية دائرة نصف النهار على النقطة K التي تحقّق $\frac{\widehat{HK}}{\widehat{KG}} < \frac{SF}{FO}$.

تقطع الدائرة العظمى HN الدائرةَ LG على النقطة E.

القوسان $\widehat{HK}$ وَ $\widehat{GE}$ متشابهتان وَ $\widehat{KG} = \widehat{HE}$. فيكون إذاً $\frac{\widehat{GE}}{\widehat{EH}} < \frac{SF}{FO}$ ؛ ونحصل على هذه المتباينة بواسطة استدلال مشابه للاستدلال الوارد في الحاشية ٣٨ (ص. ٢٤٤).

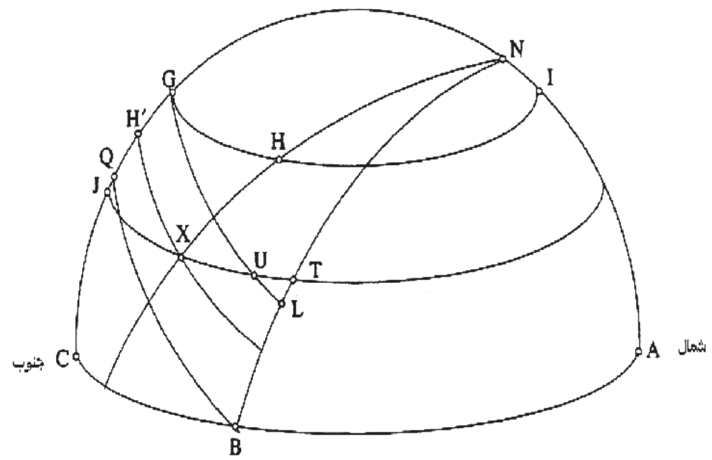
لتكن القوس $\widehat{GP}$ الزمن المحصَّل الخاص بالميل $\widehat{EH}$ ؛ يكون معنا $\widehat{GP} < \widehat{GE}$. تقطع الدائرة العظمى PN القوسَ $\widehat{KH}$ على النقطة M؛ يكون معنا $\widehat{PM} = \widehat{EH}$، فإذاً، خلال الزمن $\widehat{GP}$ ينتقل الكوكب من G إلى M ويكون معنا $h(G) < h(M)$. يغيب الكوكب في النقطة D، مع $h(D) = 0$، فيلتقي الكوكب إذاً بالدائرة IHG ، بين H وَ I، لأنَّه لا يعود إلى جنوب القوس $\widehat{KH}$. لتكن X نقطة المرور على القوس $\widehat{HI}$ من الدائرة IHG، فيكون معنا $h(G) = h(X)$.

نبيِّن (كما فعلنا في القضية ٢٨- أ)، أنَّ على كل دائرة أفقية ذات ارتفاع h، بحيث يكون $h(G) < h < h(M)$، توجد نقطتا مرور للكوكب: إحداهما Y بين G وَ M، والأخرى Z بين M و X.

ب) دراسة ارتفاعات الكوكب بين شروقه في النقطة B ومروره على دائرة نصف النهار في G.

لتكن QB الدائرة الزمانية للنقطة B، حيث تكون Q على $ANGC$ دائرة نصف النهار، وتكون النقطة Q جنوب النقطة G، ولتكن LG الدائرة الزمانية للنقطة G.

الدائرةُ الزمانية للنقطة G مماسَّة للدائرة الأفقية IHG في النقطة G. ولا تقطع الدائرة IHG أيَّ دائرةٍ زمانيةٍ محصورةٍ بين LG وَ QG.



الشكل ١٠٩

لتكن TUJ دائرة أفقية ذات ارتفاع $h(J)$ مع $h(G) > h(J)$. يلتقي الكوكبُ، في حركته من B إلى G، بالدائرة TUJ؛ فليكن ذلك في النقطة X. لتكن $H'X$ الدائرة الزمانية للنقطة X. يكون معنا $\widehat{GU} > \widehat{H'X}$ (وفقاً للقضية ١٣)، فإذاً، تقطع الدائرةُ العظمى XN القوسَ $\widehat{GU}$، والقوس $\widehat{UX}$ هو شرق النقطة X. لا يمرُّ الكوكب إذاً بأي نقطة من القوس $\widehat{UX}$، في حركته من X إلى G.

القوس $\widehat{UT}$ هو شمال الدائرة UG وشرق دائرة نصف النهار، فلا يلتقي الكوكب بهذا القوس في حركته من B نحو G، ولا بعد مروره في G. القوس $\widehat{JX}$ يكون جنوب الدائرة $H'X$، فلا يرجع الكوكب إذاً على هذا القوس في حركته من X نحو G.

يمرّ الكوكب، بين شروقه في B وبين مروره على دائرة نصف النهار، مرة واحدة فقط بنقطة لها الارتفاع $h(J)$. ويكون الأمر كذلك لكل ارتفاع h بحيث يكون $h(G) > h$ ، فيتزايد h إذاً من 0 إلى $h(G)$.

القضية ٣٠- وحدانية النقطة ذات الارتفاع الأقصى

يتناول ابن الهيثم من جديد المسألة التي عالجها أعلاه (ص ٢٤٣) لكي يتابع دراسة الارتفاعات التي يبلغها الكوكب شرق دائرة نصف النهار CD، على القسم من مساره الذي يوجد فوق مستوي الأفق D.

كنا قد رأينا أنَّ بإمكان الكوكب أن يبلغ نقاطاً مثل Y وَ Z، مع $h(D) < h(Y) = h(Z)$ (ص. ٢٤٥).

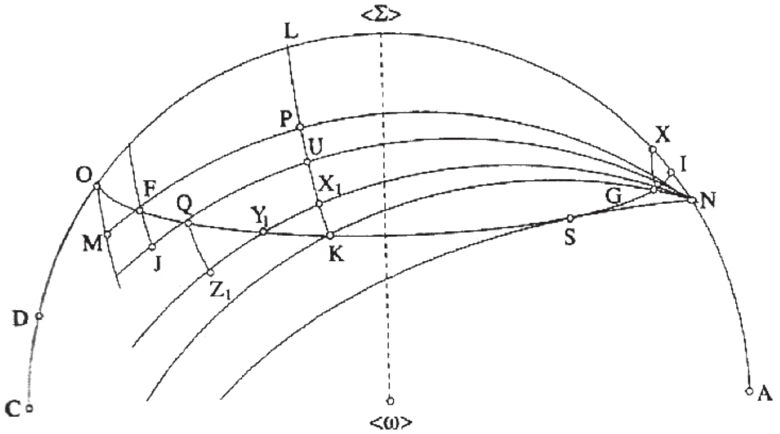
إذا كان h_m الارتفاع الأقصى، فإنَّ أية نقطة يبلغها الكوكب ويكون ارتفاعها h_m ، لا يُمكنها أن تكون على دائرة نصف النهار، ولا أن تكون غرب دائرة نصف النهار.

لنفترض أنَّ الدائرة الأفقية OKI تُحقّق $\widehat{CO} = h_m$.

نُخرج من القطب N دائرة مُمَاسَّة في S للدائرة OKI.

أ) لا يلاقي الكوكبُ القوسَ $\widehat{SI}$: لنفترض أنه يمرُّ في G على القوس $\widehat{IS}$، فالدائرة العظمى GN تقطع من جديد الدائرة OKI على النقطة K. ليكن $\widehat{GX}$ وَ $\widehat{KL}$ القوسين الزمانيتين للنقطتين G وَ K ، فتكون $\widehat{GX}$ الزمنَ المحصَّل للقوس التي يكون $\widehat{XD}$ ميلَها الخاص، خلال مرور الكوكب من G إلى D. القوسان $\widehat{GX}$ وَ $\widehat{KL}$ متشابهتان، والزمن المحصَّل، الذي يكون ميله الخاصّ $\widehat{LD}$، هو جزء من $\widehat{KL}$ ؛ فليكن $\widehat{LU}$. يلتقي الكوكبُ عندئذ، خلال انتقاله من G إلى D، القوسَ $\widehat{KL}$ في النقطة U، مع $h_m < h(U)$؛ وهذا محال لأنَّ h_m هي الارتفاع الأقصى.

لا يمرّ الكوكب إذاً بأية نقطة من $\widehat{SI}$.



الشكل ١١٠

ω: مركز الكرة، α: $\widehat{N\omega\Sigma}$ ، Σ: قطب الأفق، β: $\widehat{I\omega\Sigma}$ ، N: قطب دائرة معدّل النهار

ملاحظة: لكي نبرهن أنَّ الكوكب لا يمرُّ بالنقطة S، يُمكن أن نقوم بنفس الاستدلال الذي قمنا به للنقطة G، وذلك بأن نأخذ الدائرة الزمانية للنقطة S.

ب) لنفترض أنَّ النقطة K من القوس $\widehat{OS}$ هي نقطة مرور للكوكب، بحيث يكون معنا: $h(K) = h_m$.

لتكن $\widehat{LK}$ القوس الزمانيّة للنقطة K، ولتكن L نقطة على دائرة نصف النهار. القوس $\widehat{LK}$ هي الزمن المحصَّل الخاص بالميل $\widehat{DL}$ عندما ينتقل الكوكب من K إلى D. لنأخذ النقطة M على دائرة O الزمانية، بحيث تكون القوس $\widehat{OM}$ الزمن المحصَّل الخاص بالميل $\widehat{OD}$. تقطع الدائرةُ العظمى MN القوسَ $\widehat{LK}$ على النقطة P كما تقطع الدائرةَ IKO على F، فتكون القوسان $\widehat{PL}$ وَ $\widehat{OM}$ متشابهتين وتقيسان نفس الزمن. القوس $\widehat{PL}$ هي الزمن المحصَّل الخاص بالميل $\widehat{OD}$، فتكون $\widehat{PK}$ ،إذاً، الزمن الخاص بالميل $\widehat{LO}$؛ ولكن $\widehat{PM} = \widehat{LO}$ وَ M موجودة تحت الدائرة IKO ، فيكون $h_m > h(M)$.

ونأخذُ، بنفس الطريقة، دائرةً زمانية تمرُّ بالنقطة F ونأخذ عليها نقطة J بحيث تكون القوسُ $\widehat{FJ}$ الزمنَ المحصَّل للميل $\widehat{FM}$ $(\widehat{PF} < \widehat{PM})$. تقطع الدائرةُ العظمى NJ القوس $\widehat{OKS}$ على النقطة Q وتقطع $\widehat{KL}$ على النقطة U. القوسان $\widehat{FJ}$ وَ $\widehat{UP}$ متشابهتان،

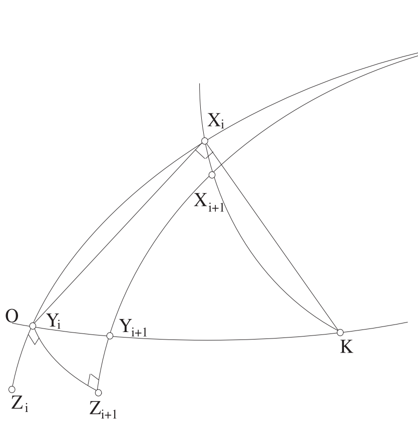
فتكون $\widehat{UP}$ الزمن المحصّل الخاص بالميل $\widehat{FM}$، فيكون الزمن $\widehat{UK}$ خاصاً بالميل $\widehat{PF}$ الذي يُساوي $\widehat{UJ}$ ويكون $h_m > h(J)$.

لنفعل ابتداءً من النقطة Q ما فعلناه ابتداءً من النقطة F، فنُخرِج من النقطة Q قوساً زمنية $\widehat{QZ_1}$ مساوية للزمن الخاص بالميل $\widehat{JQ}$، على أن تكون Z_1 تحت الدائرة IKO. تقطع الدائرة العظمى NZ_1 القوسَ $\widehat{KL}$ على النقطة X_1 وتقطع KO على Y_1. وهكذا يكون معنا الزمنُ $\widehat{KX_1}$ ذو الميل الخاصّ $\widehat{X_1Z_1}$. ونعيد الكرَّة، بدءاً من Y_1 المماثلة لـِ Q، فنحصل على النقاط X_2، Y_2، Z_2، المماثلة للنقاط X_1، Y_1، $Z1$، وهكذا دواليك.

يكون لدينا لكل i ($i = 1$، 2، ....، n) الزمنُ $\widehat{KX_i}$ وميله الخاصّ $\widehat{X_iZ_i}$، مع $\frac{\widehat{KX_i}}{\widehat{X_iZ_i}} > \frac{\widehat{KX_i}}{\widehat{X_iY_i}}$ (حيث يكون $\widehat{X_iZ_i} > \widehat{X_iY_i}$ وتكون Z_i تحت الدائرة KO).

يكون معنا، وفقاً للقضية ١٥، $\frac{\widehat{KX_{i+1}}}{\widehat{X_{i+1}Y_{i+1}}} > \frac{\widehat{KX_i}}{\widehat{X_iY_i}}$.

نستخدِم هنا المتباينةُ الثانية، للقضية، التي تكون صحيحة من دون حصر طالما أنَّ $\beta \geq \alpha$، وهذا ما يحدث هنا، لأننا نفترض أنَّ القطب N خارج الدائرة الأفقية IKO ذات الارتفاع الأقصى. الزاوية α هي $\widehat{N\omega\Sigma}$ والزاوية β هي $\widehat{I\omega\Sigma}$. فتكون النسبة $\frac{\widehat{KX_i}}{\widehat{X_iY_i}}$ تناقصية.



الشكل ١١١

القوسان $\widehat{X_iY_i}$ وَ $\widehat{KX_i}$ متعامدتان، فتكون الزاوية المحصورة بين خطَّيْ تماسّ هاتين القوسين على النقطة X_i ، قائمةً.

إذا أخذنا المثلَّث المسطَّح KX_iY_i، يكون الوتران X_iY_i وَ KX_i ضلعيْ الزاوية ذات الرأس X_i ؛ وهذه الزاوية ليست قائمة في الحالة العامة.

ويُصبح المثلَّث المنحني KX_iY_i، ابتداءً من رتبة مُعَيَّنة n مع $n < i$ ، صغيراً إلى درجة بحيث يُصبح الوتران X_iY_i وَ KX_i قريبين، بشكل كافٍ، من خطّيْ التماس. فيكون المثلّث المنحني KX_iY_i عندئذ قريباً جداً من مثلّث مسطّح قائم الزاوية. فيكون معنا، في هذه الحالة،

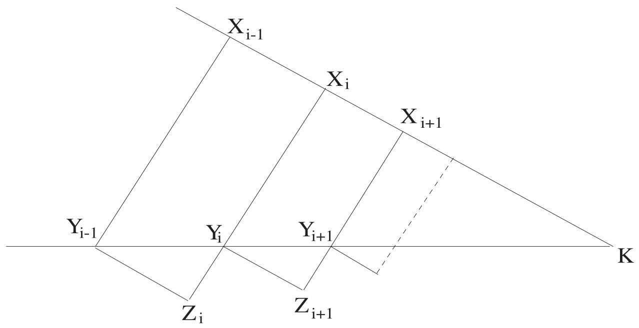
$$\widehat{KX_i} \over \widehat{X_iY_i} \cong \frac{KX_i}{X_iY_i} = \text{cotg}\ \widehat{K} \ .$$

تتناقص النسبة $\frac{\widehat{KX_i}}{\widehat{X_iY_i}}$ وتسعى إلى $\text{cotg}\,\widehat{K}$، عندما تقترب X_i من النقطة K.

وعندما تكون X_i قريبة من K، يكون المثلّثُ المسطَّح $Y_iZ_{i+1}Y_{i+1}$ هو أيضاً، قريباً جداً من مثلث قائم الزاوية مشابه للمثلث KX_iY_i ويكون معنا: $X_{i+1}Z_{i+1} = X_iY_i$ وَ $X_iY_i - X_{i+1}Y_{i+1} = Y_{i+1}Z_{i+1}$. وعندما تقترب X_i من K يكون: $KX_i \leftarrow 0$، فيكون إذاً:

$$X_iY_i = KX_i \ \text{tg}\,\widehat{K} \leftarrow 0 \ ؛$$

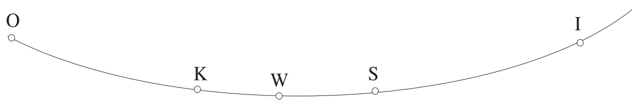
ويكون بالتالي: $Y_{i+1}Z_{i+1} \leftarrow 0$،



الشكل ١١٢

فتُصبح النقطة Z_{i+1} أكثر فأكثر قرباً من الدائرة الأفقية OKI وتسعى نحو النقطة K .

وهكذا برهنَّا، إذاً، أنـّه إذا مرّ الكوكب بالنقطة K فإنـّه لا يمرُّ بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{OK}$.



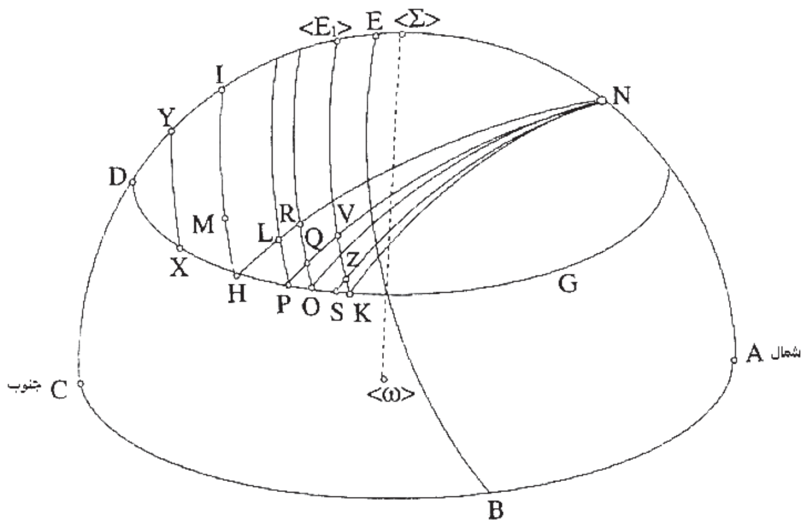
الشكل ١١٣

يتناول ابن الهيثم متتالية من النقاط على مسار الكوكب بين K وَ D؛ تسعى هذه المتتالية اللامتناهية نحو النقطة K، وارتفاع كل نقطة من هذه النقاط أصغر من الارتفاع الأقصى.

القضية ٣١ - الارتفاعات الشرقية

تَتْبع هذه القضية القضية ٢٨. نستعيد شكلَ القضية ٢٨(ص. ٢٤٣)، حيث تكون فيه B نقطة شروق الكوكب من جهة الشرق، وتكون D نقطة مروره على دائرة نصف النهار وَ M نقطة مروره على الدائرة الزمانية IH مع $h(D) < h(M)$. فيقطع الكوكبُ إذاً الدائرةَ الأفقية GHD على نقطة بين الدائرتين BE وَ HI ؛ لتكن K هذه النقطة.

نقطتا المرور الوحيدتان للكوكب على الدائرة الأفقية GHD هما النقطتان D وَ K .



الشكل ١١٤

θ: $\widehat{E_1\omega\Sigma}$ ، λ : زاوية، في مركز دائرة K الزمانية، توتِّر القوس $\widehat{E_1V}$

إذا كانت X نقطة اختيارية على القوس $\widehat{DH}$، وإذا كانت $\widehat{XY}$ قوساً من دائرة زمنية، حيث تكون Y على ID، يكون عندئذ: $\frac{HI}{ID} < \frac{XY}{YD}$ (وفقاً للقضيتين ١١ وَ ١٢).

ولكن $\frac{HI}{ID} >$ $\frac{\text{الزمن المحصل}}{\text{الميل الخاص}}$، لكلّ زمن محصَّل للكوكب في حركته من B إلى D، حيث يجري اختيار H كما حصل في القضية ٢٨ ، فيكون معنا إذاً لكل نقطة X من القوس $\widehat{HD}$:

$\frac{\widehat{XY}}{\widehat{YD}} > \frac{\text{الزمن المحصل}}{\text{الميل الخاص}}$ (لأنَّ $\frac{XY}{YD} > \frac{\widehat{XY}}{\widehat{YD}}$)[٤٠] .

- إنَّ الكوكب إذاً لا يمر بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{HD}$.
- ولا يقطع الكوكبُ القوسَ $\widehat{GK}$، لأنَّ هذه القوس موجودة شمال K وتحدث حركة الكوكب باتجاه الجنوب.
- يبرهن ابن الهيثم أنَّ الكوكب لا يُمكن أن يلتقي بالقوس $\widehat{HK}$.

لنفترض أنَّ الدائرة العظمى NH هي فوق النقطة K. نحن نعلم أنَّ الكوكب يمرّ بالنقطة M من القوس الزمانية $\widehat{IH}$، في مساره بين K وَ M ؛ وهو يلتقي بالدائرة العظمى NH في نقطة غير النقطة H، لأنَّه لا يُمكن أن يمرَّ في نقطتين M وَ H على الدائرة الزمانية IH. لا يُمكن أن تكون نقطة اللقاء مع الدائرة العظمى NH جنوب الدائرة الزمانية IH، لأنَّ الكوكب، لو حصل ذلك، لن يتمكَّن من الرجوع من هذه النقطة الجنوبية نحو النقطة M ؛ ولذلك تكون نقطة اللقاء هذه نقطةَ L، بين H ودائرة K الزمانية.

تقطع دائرةُ L الزمانية الدائرة DHG على النقطة P بين H و K. لا يمرّ الكوكب، في حركته من K نحو L، على P ولا على أي نقطة من القوس $\widehat{HP}$. وكذلك هو الأمر في حركته من L نحو M، لأنَّ حركته تكون نحو الجنوب فلا يمكنه أن يعود شرق الدائرة العظمى NLH.

ونبرهن بنفس الطريقة أنَّ الكوكب يلتقي بالدائرة العظمىPN في النقطة Q. تقطع دائرةُ Q الزمانية الدائرةَ DHG على النقطة O بين P وَ K، وتقطع الدائرةَ العظمى NH على النقطة R. لا يمرّ الكوكب، في حركته من K نحو Q، على O ولا على أيِّ نقطة من القوس $\widehat{PO}$. والقوس $\widehat{QR}$ هي الزمن المحصّل لحركة الكوكب من النقطة Q إلى النقطة L، والميل الخاص بهذا الزمن المحصّل هو $\widehat{LR}$ ($\widehat{HR} > \widehat{PQ} = \widehat{LR}$).

---

[٤٠] انظر الحاشية ٣٨ (ص ٢٤٤).

تقطع دائرة K الزمانية الدائرةَ العظمى PN على النقطة V، فيكون $\widehat{KV}$ الزمن المحصَّل لحركة الكوكب من النقطة K إلى النقطة Q، ويكون $\widehat{VQ}$ الميل الخاص بهذا الزمن المحصَّل.

وهكذا برهنّا أنَّ الكوكب الذي يمرُّ بالنقطة K لا يمرّ بأي نقطة من القوس $\widehat{GK}$ شمال K .

ونحن نعلم أنـّه يمرّ بالنقاط Q، L ، M وَ D، ولكنه لا يلتقي بالأقواس $\widehat{HD}$، $\widehat{PH}$ وَ $\widehat{OP}$ ، أيْ بالقوس $\widehat{DO}$.

يبقى علينا أنْ ندرس نقاط القوس $\widehat{OK}$. فنستعيد لأجل ذلك الأبنية السابقة: تقطع الدائرة ON القوسَ $\widehat{VK}$ على النقطة V_1، ويلتقي الكوكبُ بالقوس $\widehat{OV_1}$ في نقطة X_1 ؛ تقطع دائرة X_1 الزمانية KO على النقطة Y_1 ، وتقطع NP على النقطة Z_1. لتكن X_2 ، بعد ذلك، نقطة مرور الكوكب على الدائرة العظمى NY_1 ؛ ولتكن Y_2 وَ Z_2 نقطتيْ تقاطع دائرة X_2 الزمانية مع الدائرتين KO وَ NO ، ولتكن V_2 نقطة تقاطع الدائرة العظمى $N\,Y_1$ مع القوس $\widehat{VK}$.

وهكذا نحصل على النقاط X_i ، Y_i ، Z_i ، وَ V_i ($i = 1$، 2،...)، بحيث يكون X_1Z_1 الزمن المحصَّل لانتقال الكوكب من X_1 إلى Q ؛ ميل الحركة هو $\widehat{Z_1Q}$، ويكون معنا $\widehat{X_1Q}=\widehat{Z_1Q}$.

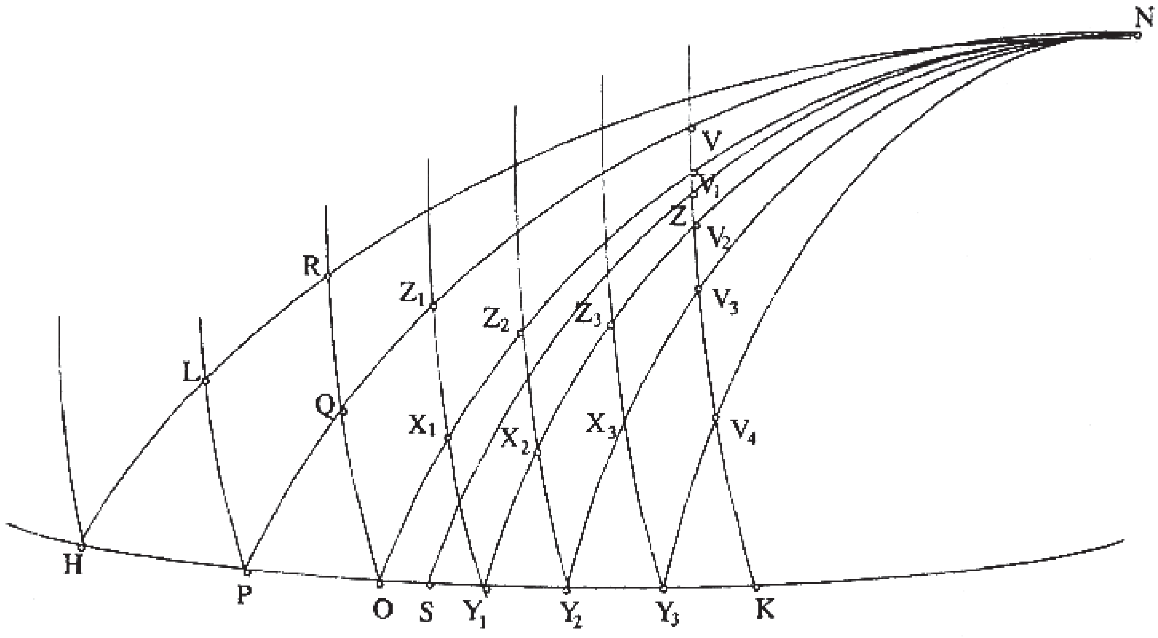
وتكون القوس $\widehat{X_iZ_i}$، في الحالة العامة، الزمن المحصَّل لانتقال الكوكب من X_i إلى X_{i-1}؛ ويكون $\widehat{Z_iX_{i-1}}$ ميلَ الحركة، ويكون معنا: $\widehat{Z_iX_{i-1}} = \widehat{X_iY_{i-1}} > \widehat{V_iY_{i-1}}$.

يمرّ الكوكب بالنقطة X_i ولكنه لا يمرُّ بأيّ نقطة من القوس $\widehat{Y_iY_{i-1}}$.

الزمن المُحَصَّل، خلال انتقال الكوكب من النقطة K إلى النقطة X_i، هو $\widehat{KV_i}$، وميله الخاص هو $\widehat{V_iX_i}$، ويكون معنا: $V_iY_{i-1} > V_iX_i$. الأقواس $\widehat{V_iY_{i-1}}$- وبالتالي الأقواس $\widehat{V_iX_i}$– هي أجزاء صغيرة من القوس $\widehat{DE}$ تتزايد في صغرها كلما كبر المؤشّر i. والقوس $\widehat{DE}$ هي ميل حركة الكوكب من النقطة B إلى النقطة D؛ وهذه القوس هي نفسها صغيرة جداً (قريبة من $4'$ في حالة الشمس، وأصغر من $1°$ في حالة القمر؛ انظر ص. ٤٣٣). وهكذا يُمكن بالأحرى ابتداءً من مرتبة مُعيَّنة i، اعتبار المثلثات المنحنية $Y_{i-1}V_iK$ مثلثاتٍ مسطَّحةً كلها قائمة الزاوية في النقطة V_i ومتشابهة. فيكون معنا عندئذ لكل i:

$$\frac{KV}{VP} = \frac{KV_i}{V_iY_{i-1}} \approx \frac{\widehat{KV_i}}{\widehat{V_iY_{i-1}}}.$$

والقوسان $\widehat{KV_i}$ وَ $\widehat{KV}$ ، اللتان هما الزمَنَان المُحَصَّلان، صغيرتان جداً وميلاهما الخاصان، أي القوسان $\widehat{V_iX_i}$ وَ $\widehat{QV}$، هما أيضاً صغيران جداً، ويكون معنا أيضاً: $V_iY_{i-1} > V_iX_i$ وَ $VP > VQ$ ؛ يقول ابن الهيثم عندئذ في استنتاجه أنَّه لا يوجد فرق بين النسب $\frac{\widehat{KV_i}}{\widehat{V_iX_i}}$ وبين النسبة $\frac{\widehat{KV}}{\widehat{VQ}}$ (انظر أدناه، ص. ٤٣٤).

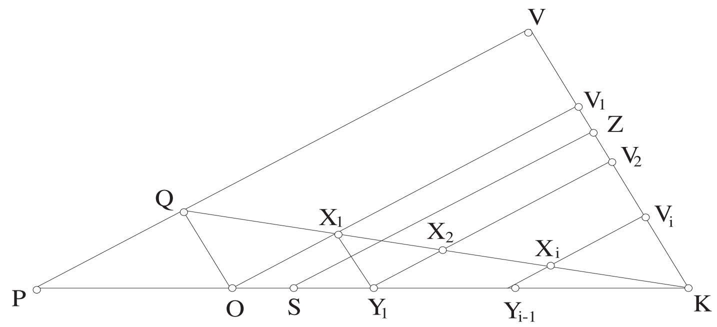


الشكل : ١١٥-١

يُمكن أن نعتبر كل الأقواس المعنية بالأمر مطابقةً لأوتارها لأنـّها صغيرة جداً؛ فنستخلص عندئذ لكل i: $\frac{KV}{VQ} = \frac{KV_i}{V_iX_i}$ ؛ وهذا ما يرجع إلى القبول بأنَّ النقاط X_i قريبة جداً من الخط QK، أي أنـّه يُمكن اعتبار مسار الكوكب، بين النقطة K والنقطة Q، مستقيماً. وتكون كل النقاط X_i موجودة فوق الدائرة الأفقية OK.

أ) لنبيِّن أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأي نقطة من القوس $\widehat{KO}$.

لنفترض أنَّ القوس $\widehat{NH}$ أعلى من النقطة K.



الشكل ١١٥-٢

لتكن S نقطة على القوس $\widehat{KO}$، فتقطع الدائرة العظمى NS القوسَ $\widehat{VK}$ على النقطة Z. المثلّثان المنحنيان PVK وَ SZK قائما الزاوية، لأنَّ القوسين $\widehat{PV}$ وَ $\widehat{SZ}$ عموديّتان بالترتيب على $\widehat{VK}$ وَ $\widehat{ZK}$. المثلثان المسطَّحان PVK وَ SZK صغيران جداً، فلا يختلفان إلا قليلاً جداً عن المثلثين المنحنيين.

- إذا كان الفرق لا يُقدَّر بالحسّ، يكون معنا: $\widehat{KZS} = \widehat{KVP}$ زاوية قائمة، ويكون المثلثان المسطَّحان PVK وَ SZK متشابهين، فيكون إذاً: $\frac{KZ}{ZS} = \frac{KV}{VP}$ وَ $\frac{\widehat{KZ}}{\widehat{ZS}} = \frac{\widehat{KV}}{\widehat{VP}}$.

- يكون معنا، في الحالة العامة، $\frac{\widehat{KZ}}{\widehat{ZS}} < \frac{\widehat{KV}}{\widehat{VP}}$ (القضية ١٥).

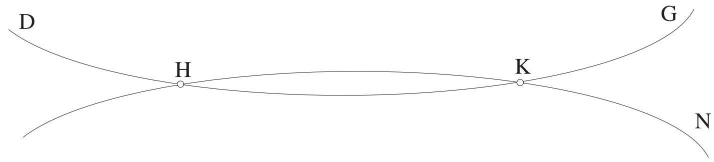
نستخدم هنا المتباينة الثانية للقضية ١٥؛ ويكون هنا القطب N فوق الدائرة الأفقية GHD، بحيث يكون $\beta > \alpha$ ($\widehat{N\omega\Sigma} = \alpha$ ، $\widehat{\Sigma\omega D} = \beta$). فلا تكون المتباينةُ التي نريدها مُحقَّقةً إلا بشرط حصريٍ: يجب أن تكون النقطة ذات الإحداثيتين (θ, λ) تحت المنحني II (انظر الخطوط البيانية على الأشكال ٢١ إلى ٢٧). يتحقَّق هذا الشرط إذا كان $\alpha \geq \alpha_1 (\beta)$ لأنَّ θ سالبة؛ وهذه المتباينة تستثني جواراً للقطب الشمالي للأرض.

يكون معنا، في جميع الحالات، $\frac{\widehat{KZ}}{\widehat{ZS}} \geq \frac{\widehat{KV}}{\widehat{VP}}$ ، فيكون إذاً: $\frac{\widehat{KZ}}{\widehat{ZS}} > \frac{\widehat{KV}}{\widehat{VQ}}$.

القوس $\widehat{VQ}$ هي الميل الخاصّ للزمن $\widehat{KV}$، ولكن $\widehat{KZ} < \widehat{KV}$؛ فيكون الميل الخاص للزمن $\widehat{KZ}$ أصغر من $\widehat{SZ}$؛ ويلتقي الكوكب إذاً، في حركته من النقطة K إلى النقطة Q بالقوس $\widehat{SZ}$ بين S وَ Z.

والبرهان هو نفسه لكل نقطة من القوس $\widehat{KO}$ ، فلا يمرُّ الكوكب في أيّ نقطة من القوس $\widehat{KO}$.

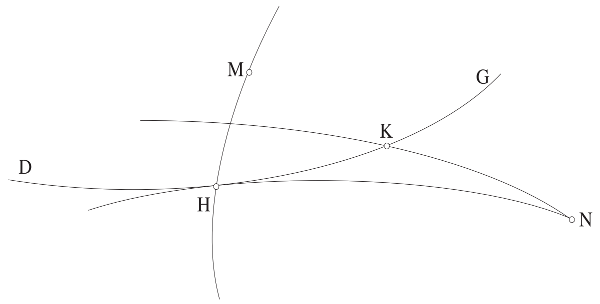
فإذا كان القطب N فوق الدائرة GHD، فإنّ الكوكب لا يلتقي، إذاً، بهذه الدائرة إلا في النقطتين K وَ D.



الشكل ١١٦

ب) إذا مرّت الدائرة HN بالنقطة K، فإنَّ القوس $\widehat{KH}$ من الدائرة الأفقية تكون شرق K، فلا يعود الكوكب على هذه القوس $\widehat{KH}$ ، لأنـَّه يتـَّجِه غرباً.

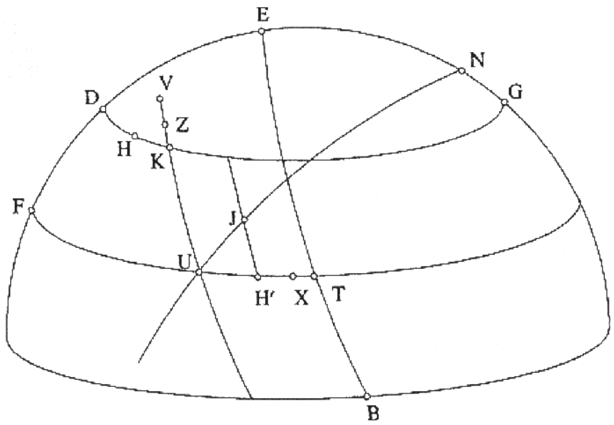
ج) إذا مرّت الدائرة HN تحت النقطة K، فإنَّ الدائرةَ العظمى KN تقطع القوس الزمانية $\widehat{HM}$ ، فتكون القوس $\widehat{HK}$ شرق الدائرة العظمى KN.



الشكل ١١٧

يلتقي الكوكب، في جميع الحالات، بالدائرة GHD على النقطتين K وَD فقط دون غيرهما.

- ليس للكوكب، من جهة الشرق، سوى نقطة مرور وحيدة على كل دائرة أفقية ذات ارتفاع h مع $h(D) > h$.



الشكل ١١٨

لتكن XFT دائرةً أفقية أقرب إلى الأفق من الدائرة GHD، ولتقطع الدائرتين الزمانيتين EB وَ KV وفقاً للترتيب على النقطتين T وَ U. يلتقي الكوكب، في حركته من B إلى K، بالدائرة FXT في النقطة X بين النقطتين T وَ U ، ويلتقي بالدائرة UN في نقطة J شمال U. فالكوكب لا يلتقي، إذاً، بالقوس $\widehat{UF}$، لأنَّ هذه القوس تكون جنوب القوس $\widehat{UK}$، ولا يلتقي بالقوس $\widehat{TX}$ التي هي شمال X.

لنبيِّن أنَّ الكوكب لا يلتقي بالقوس $\widehat{UX}$.

إنَّ النقطة J موجودة جنوب النقطة X وشمال النقطة K؛ تقطع دائرة J الزمانية القوس $\widehat{TU}$ على النقطة H' بين U وَ X (انظر الشكل ١١٤).

المثلَّث UJH' مماثل للمثلث PQO؛ نبين أنَّ الكوكب لا يلتقي بالقوس $\widehat{UH'}$، كما بيَّنّا ذلك للقوس $\widehat{PO}$ من المثلث PQO؛ ونُبيِّن أنَّه لا يلتقي بالقوس $\widehat{XH'}$، كما بيَّنّا ذلك للقوس $\widehat{OK}$.

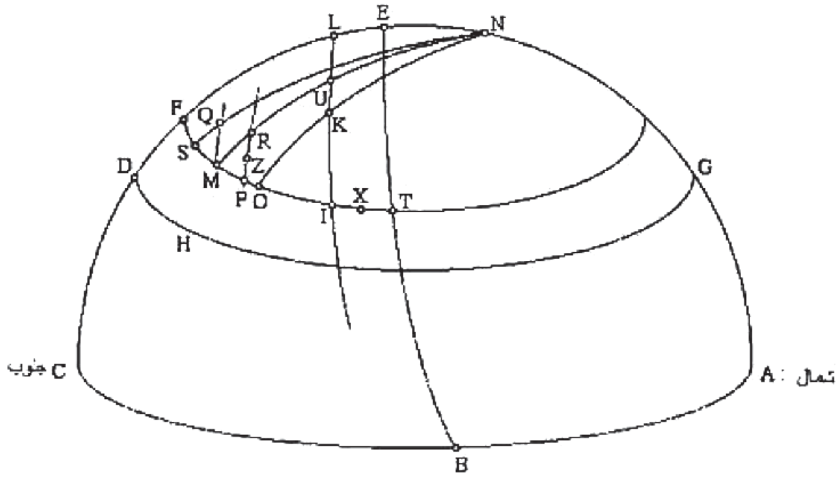
- لو مرَّت الدائرة UN بالنقطة X أو تحت X، لكانت القوس $\widehat{XU}$ شرق الدائرة العظمى XN؛ ولكنَّ الكوكب لا يعود شرق النقطة X. فإذاً، لا يلتقي الكوكب بالدائرة FXT إلا في نقطة واحدة هي النقطة X.

ويلتقي الكوكب كذلك، مرة واحدة فقط، بكل دائرة أفقية أقرب إلى الأفق من الدائرة GHD.

القضية ٣٢- الارتفاعات الشرقية

يتابع ابن الهيثم، في هذه القضية، دراسة الارتفاعات الشرقية.

إذا كانت D نقطة المرور على دائرة نصف النهار وكانت K أعلى نقطة يبلغها الكوكب، فإنَّ الكوكب يلتقي مرتين فقط بكل دائرة أفقية FXT واقعة بين K وبين الدائرة الأفقية GD.



الشكل ١١٩

لتكن I وَ T نقطتي تقاطع دائرتي K وَ B الزمانيتن مع الدائرة الأفقية FXT. يلتقي الكوكب، في حركته من B نحو K، الدائرةَ FXT على النقطة X التي توجَد بين الدائرتين IL وَ EB؛ فتكون X، إذاً، بين I وَ T. يلتقي الكوكب، في حركته من K نحو D ، الدائرةَ FXT على نقطة M التي توجَد بين I وَ F.

وهو لا يلتقي بالدائرة FXT في نقطة ثالثة.

أ) وهو لا يلتقي بالقوسَ $\widehat{XT}$ التي هي شمال X.

ب) ونبيِّن أنَّه لا يلتقي بالقوس $\widehat{XI}$ ، مثلما بيَّنا في القضية السابقة أنَّه لا يلتقي بالقوس $\widehat{KH}$ من الدائرة GHD (انظر ص. ٢٥٣ وما يتبعها).

ج) لتكن O نقطة تقاطع الدائرة العظمى KN مع الدائرة FXT. لنبيِّن أنَّ الكوكب لا يلتقي بالقوس $\widehat{MI}$.

لا يلتقي الكوكبُ بالقوس $\widehat{OI}$ ، لأنَّ هذ القوس موجودة شرق الدائرة OKN، ولا يبلغ النقطة O.

تقطع الدائرة العظمى MN القوسَ $\widehat{IK}$ على النقطة U: $\widehat{UK}$ هي الزمن المحصَّل، وَ $\widehat{UM}$ هي الميل الخاص بهذا الزمن المحصّل. لتكن P نقطة من القوس $\widehat{MO}$، فتقطع دائرة P الزمانية القوسَ $\widehat{MU}$ على النقطة R. يكون معنا: $\frac{\widehat{PR}}{\widehat{RM}} = \frac{\widehat{IU}}{\widehat{UM}}$ (كما رأينا سابقاً بخصوص

الأقواس الصغيرة جداً). ولكن $\frac{\widehat{IU}}{\widehat{UM}} > \frac{\widehat{KU}}{\widehat{UM}}$، فإذاً: $\frac{\widehat{PR}}{\widehat{RM}} > \frac{\widehat{KU}}{\widehat{UM}}$، فيكون $\widehat{RZ}$ الزمنَ المحصَّل ذا الميل الخاصّ $\widehat{MR}$ ، مع $\widehat{RP} > \widehat{RZ}$ (لأنَّ $\frac{\widehat{PR}}{\widehat{RM}} = \frac{\widehat{IU}}{\widehat{UM}}$ في المثلَّثين الصغيرين MUI وَ MRP). يلتقي الكوكب، خلال انتقاله من النقطة K إلى النقطة M، بالقوس $\widehat{RP}$ في النقطة Z، فلا يمرّ، إذاً، بالنقطة P. ويكون الأمر كذلك لكل نقطة من القوس $\widehat{MO}$.

د) لنبيّن أنَّ الكوكب لا يلتقي بالقوس $\widehat{FM}$.

لتكن S نقطة على القوس $\widehat{FM}$ ؛ تقطع الدائرةُ العظمى SN دائرةَ M الزمانية على النقطة Q. يكون معنا، في المثلثين الصغيرين جداً MQS وَ MRP،

$\frac{\widehat{MQ}}{\widehat{MS}} = \frac{\widehat{PR}}{\widehat{RM}} < \frac{\widehat{ZR}}{\widehat{RM}}$، فيكون الميل الخاص بالزمن $\widehat{MQ}$ أعظم من $\widehat{QS}$، ويلتقي الكوكب بالدائرة العظمى NQS في نقطة تحت الدائرة TXF، فلا يمرُّ بالنقطة S ويكون الأمر كذلك لكل نقطة من القوس $\widehat{FM}$.

لا يلتقي الكوكب، إذاً، بالدائرة TXF إلا في النقطتين X وَ M.

يقوم ابن الهيثم، هنا، باستدلال تقريبيّ، آخذاً بعين الاعتبار أنَّ القوس $\widehat{DE}$ صغيرة جداً، وأنَّ المثلثات المنحنية المعنيّة بالأمر لا تختلف إلا قليلاً عن المثلثات المسطّحة.

إنَّ المتباينة الأولى للقضية ١٥ تعطي هنا بالفعل المتباينة: $\frac{\widehat{PR}}{\widehat{RM}} > \frac{\widehat{IU}}{\widehat{UM}}$(بدلاً من المعادلة)، وهذا ما يكفي. ولكن هذه المتباينة تتحقَّق إذا كانت النقطة (θ, λ) موجودة تحت المنحنيين I وَ III في الأشكال ٦٩-٧٥(انظر شرح القضية ١٥)؛ تُمثّل λ هنا الزمن المحصَّل $\widehat{LK}$، وتُمَثّل θ المسافة من L إلى سمت الرأس. إنَّ صُغْرَ القوس $\widehat{DE}$ يوجب صُغْرَ القوس $\widehat{FL}$ التي يكون قياسها $\theta + \beta$، حيث تكون β قياس المسافة من F إلى سمت الرأس. يكفي أن نتفحَّص القِيَم العددية، لنتحقَّق من أنَّ θ تبقى أصغر من $\theta_{4,m}$ لكي نضمن صحة المتباينة.

الخلاصة حول الارتفاعات الشرقية

إذا رمزنا بـِ h_D وَ h_K إلى ارتفاعي النقطتين D وَ K، فإنّه يتمُّ بلوغ كلّ ارتفاع h يُحقّق $h_D \leq h < h_K$، مرَّتين، في حين يتمُّ بلوغ h_K مرّة واحدة، كما يتمُّ بلوغ كلّ ارتفاع h يُحقّق $0 < h < h_D$، مرة واحدة.

الارتفاعات الغربية(تابع)

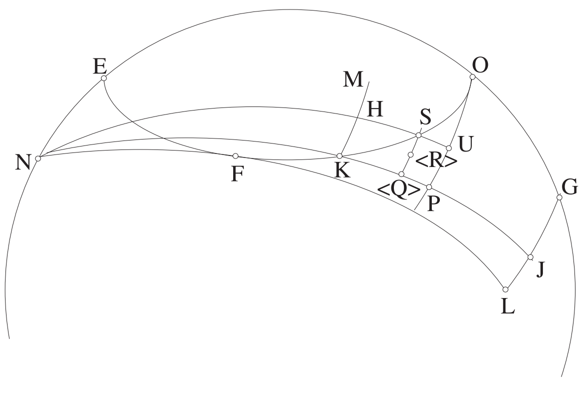
القضية ٣٣- وحدانية الارتفاع الأقصى.

لتكن EKO الدائرة الأفقية ذات الارتفاع الأقصى h_m (حيث تكون O وَ E على دائرة نصف النهار)؛ ولتكن FN الدائرة العظمى المارَّة بالقطب N والمُماسَّة في النقطة F للدائرة EKO ؛ ولتكن PO دائرة O الزمانية.

نبيِّن، كما فعلنا في دراستنا للارتفاعات الشرقية (القضية ٣٠)، أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأيّ نقطة من القوس $\widehat{FE}$.

نفترض أنَّ الكوكب يلتقي بالدائرة EO في نقطة K جنوب F، ويكون $h_K = h_m$ ، كما نبيِّن أنَّ K تكون عندئذ النقطة الوحيدة ذات الارتفاع h_m.

تقطع الدائرةُ العظمى KN الدائرةَ الزمانية PO في P، وتقطع الدائرةَ الزمانية LG في J، حيث تكون G نقطة المرور على دائرة نصف النهار. القوس $\widehat{JG}$ هو الزمن المحصَّل لانتقال الكوكب من G إلى K، وَ $\widehat{JK}$ هي ميله الخاصّ.



الشكل ١٢٠

القوسان $\widehat{PO}$ وَ $\widehat{JG}$ متشابهتان، وتقيسان نفس الزمن، ولكن $\widehat{KJ} > \widehat{KP}$. الزمن المحصَّل الخاصّ بالميل $\widehat{KP}$ هو أصغر من $\widehat{PO}$؛ ليكن $\widehat{PU}$ هذا الزمن المحصَّل؛ يمرُّ الفلك إذاً، في حركته من G إلى K، على النقطة U. لتكن MK دائرة K الزمانية؛ تقطع الدائرة NU الدائرةَ MK على النقطة H وتقطع $\widehat{OK}$ على النقطة S ، فيكون معنا $\widehat{HU} > \widehat{HS}$ ؛ $\widehat{HU}$ هي ميل حركة الكوكب من النقطة U إلى النقطة K ، وَالقوسُ $\widehat{HK}$ هي الزمن المُحصَّل وهي مشابهة للقوس $\widehat{UP}$ (يقول ابن الهيثم "مساوية" بدلاً من "مشابهة" وهذا غير صحيح). يكون معنا إذاً:

$$\frac{\widehat{KH}}{\widehat{HS}} > \frac{\widehat{KH}}{\widehat{HU}}.$$

تقطع دائرةُ S الزمانية $\widehat{KP}$ على النقطة Q بحيث يكون $\widehat{KQ} = \widehat{HS}$ ؛ ويَخصُّ الميلُ $\widehat{KQ}$ الزمنَ المحصَّل $\widehat{QR}$ مع $\widehat{QS} > \widehat{QR}$، لأنَّ الحركة تتواصل غرب الدائرة العظمى USN، فيمرّ الكوكب إذاً بالنقطة R التي هي تحت الدائرة EKO.

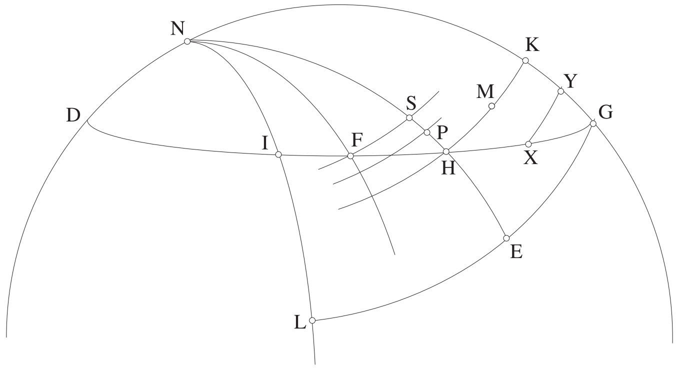
يُمكن أن نبرهن، كما فعلنا في حالة الارتفاعات الشرقية، أنَّ كلّ مواضع الكوكب بين U وَ K هي تحت الدائرة EKO. لا يلتقي الكوكب بالقوس $\widehat{KO}$. ولا يلتقي الكوكب بأي نقطة من القوس $\widehat{EF}$ (ص. ٢٦٢). يُمكن أن نبرهن، كما فعل ابن الهيثم (ص.٤٢٩)، أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأي نقطة من القوس $\widehat{KF}$. فتكون نقطة المرور، على الدائرة EKO، ذات الارتفاع h_m نقطة وحيدة، مثل النقطة K.

إذا كانت نقطة مرور الكوكب على الدائرة EO هي النقطة F، فإنـَّها تكون النقطة الوحيدة ذات الارتفاع h_m التي يبلغها هذا الكوكب.

يتناول ابن الهيثم من جديد القضية ٢٩ أ (الشكل ١٠٨) ليتابع دراسة الارتفاعات الغربية.

القضية ٣٤- لتكن G نقطة المرور على دائرة نصف النهار، ولتكن IHG دائرة G الأفقية؛ ولتكن H وَ K النقطتين المعرَّفتين في القضية ٢٩ أ.

الفرضية هي: $\frac{HK}{KG} > \frac{\text{الزمن المحصَّل}}{\text{الميل الخاص}}$، لكل زمن محصَّل للكوكب في حركته من النقطة G إلى النقطة D .



الشكل ١٢١

ولكن $\frac{HK}{KG} < \frac{\widehat{HK}}{\widehat{KG}}$ [٤١]، فنستنتج أنَّ $\frac{\text{الزمن المحصَّل}}{\text{الميل الخاص}} < \frac{\widehat{HK}}{\widehat{KG}}$.

ليكن $\widehat{KM}$ الزمن المحصَّل الذي يكون ميله الخاصّ $\widehat{KG}$ ($\widehat{KM} < \widehat{KH}$) حيث ينتقل الكوكب من النقطة G إلى النقطة M على الدائرة الزمانية KH.

إذا كانت F نقطة المرور الثانية للكوكب على الدائرة الأفقية GHI، تكون G وَ F نقطتي المرور الوحيدتين على الدائرة GHI.

لتكن X نقطة من القوس $\widehat{GH}$ ولتكن $\widehat{XY}$ قوساً من دائرة زمانية، يكون معنا عندئذ:

$\frac{HK}{KG} < \frac{XY}{YG}$ [٤٢] ؛ ولكن $\frac{XY}{YG} < \frac{\widehat{XY}}{\widehat{YG}}$ [٤٣]؛ فنستنتج أنّ: $\frac{\text{الزمن المحصَّل}}{\text{الميل الخاص}} < \frac{\widehat{XY}}{\widehat{YG}}$، لكل زمن مُحصَّل؛ فلا يمرُّ الكوكب، إذاً، بالنقطة X، بل يمرُّ في نقطة من القوس $\widehat{XY}$.

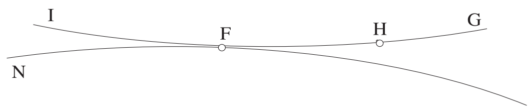
لا يمرُّ الكوكب بأي نقطة من القوس $\widehat{GH}$. ويكون، في حركته من G إلى M، فوق القوس $\widehat{GH}$.

لتكن SF دائرة F الزمانية. ينتقل الكوكب من M إلى F ؛ فيقطع مسارُه الدائرة HN على نقطة لا يُمكن أن تكون H ولا أن تكون جنوب H ، كما أنـَّها لا تكون S ولا شمال S.

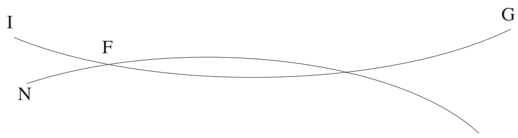
[٤١] باستدلال مشابه للذي قمنا به في الحاشية ٣٨ (ص ٢٤٤).
[٤٢] انظر القضية ١٢، ص ١١٤.
[٤٣] انظر الحاشية ٣٨ ، ص ٢٤٤.

فيقطع مسارُ الكوكب الدائرةَ HN على نقطة بين H وَ S. ونبيِّن بعد ذلك أنَّ الكوكب لا يُمكن أن يمر بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{HF}$ (نفس الطريقة المستَخدَمة سابقاً).

يبقى علينا أن نُبيِّن أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{IF}$ [٤٤].



الشكل ١٢٢-٢



الشكل ١٢٢-٢

لنرسم الدائرة العظمى FN. إنَّ لدينا ثلاث حالات ممكنة:

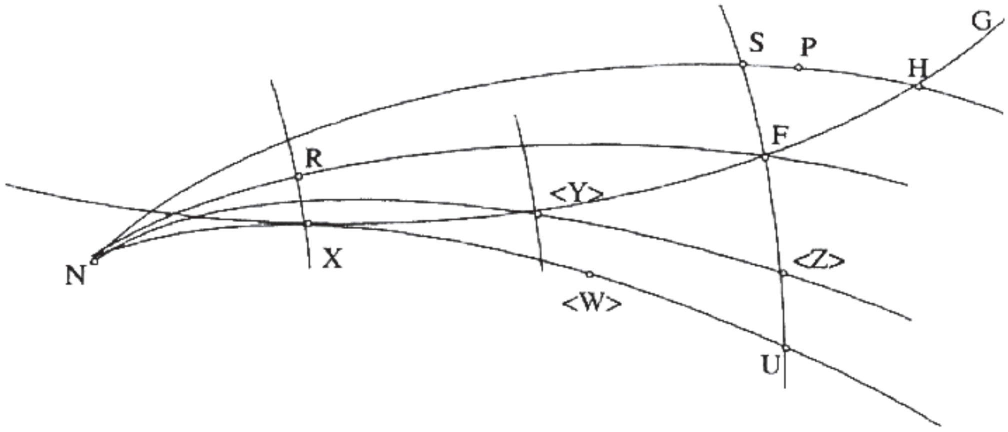
أ) الدائرة FN مماسَّة للدائرة GHI.

ب) الدائرة FN تقطع الدائرة GHI على نقطتين، وتكون F، إحدى هاتين النقطتين، أكثر بعداً باتجاه الشمال.

ولا يمرُّ الكوكب، في هاتين الحالتين، بأيّ نقطة من القوس $\widehat{IF}$.

ج) تقطع الدائرةُ FN الدائرةَ GHI على نقطتين؛ وتكون F، إحدى هاتين النقطتين، أكثر بعداً باتجاه الجنوب. نُخرج، في هذه الحالة، الدائرة العظمى UXN المماسَّة في X للدائرة GHI (توجَد U على الدائرة الزمانية FS). تقطع قوسُ X الزمانيةُ الدائرةَ FN على النقطة R. يكون معنا: $\frac{\widehat{XR}}{\widehat{RF}} = \frac{\widehat{FS}}{\widehat{SH}}$ (كما رأينا في القضية ٣١، عندما تكون المثلّثات صغيرةً جداً، تكون النقطتان F وَ X متجاورتين).

[٤٤] نفترض هنا أن القطب N تحت الدائرة الأفقية GHI.



الشكل ٣-١٢٢

ولكنَّ $\frac{\widehat{FS}}{\widehat{SP}} > \frac{\widehat{FS}}{\widehat{SH}}$ ، فيكون $\frac{\widehat{FS}}{\widehat{SP}} < \frac{\widehat{XR}}{\widehat{RF}}$.

إذا كانت α، من جهة أخرى، الميلَ الخاصَّ بالزمن $\widehat{RX}$، يكون معنا:

$\frac{\widehat{FS}}{\widehat{SP}} = \frac{\widehat{XR}}{\alpha} < \frac{\widehat{XR}}{\widehat{RF}}$، (لأنَّ الزمنين المحصَّلين $\widehat{FS}$ وَ $\widehat{RX}$ صغيران جداً ولأنَّ أحدَهما مجاورٌ للآخر)، فيكون إذاً: $\alpha > \widehat{RF}$؛ ولكن القوسَ $\widehat{RX}$ مشابهة للقوس $\widehat{UF}$(وهي قليلة الاختلاف عن $\widehat{RX}$ لأنـَّهما متجاورتان؛ وابن الهيثم يعتبرهما متساويتين) وَ $\widehat{RF} = \widehat{XU}$ ، فيكون $\alpha > \widehat{XU}$ وَ $\frac{\widehat{FS}}{\widehat{SP}} = \frac{\widehat{FU}}{\alpha}$.

لتكن W بين U وَ X ، بحيث يكون $\widehat{WU} = \alpha$. ينتقل الكوكب من النقطة F إلى النقطة W بين X وَ U.

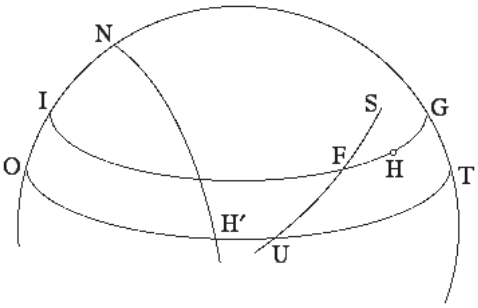
كل دائرة، مُخْرَجَة من N إلى نقطة ما Y من القوس $\widehat{FX}$، تقطع القوس $\widehat{UF}$ على النقطة Z، فتقطع قوسُ Y الزمانيُّة القوسَ $\widehat{RF}$ والقوس $\widehat{XU}$.

ويخُصّ الزمنَ $\widehat{FZ}$ ميلٌ يكون جزءاً من القوس $\widehat{YZ}$(المماثلة للقوس $\widehat{WU}$ التي هي جزء من $\widehat{XU}$)؛ فيكون طرفه فوق القوس $\widehat{FX}$. فلا يمرُّ الكوكب، إذاً، بأي نقطة من $\widehat{FX}$ غير النقطة F.

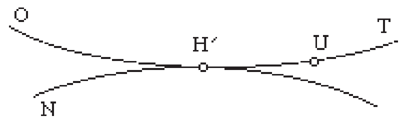
ولا يمرُّ الكوكب بأي نقطة من $\widehat{IX}$ ، لأنَّ القوس $\widehat{IX}$ موجودة شرق الدائرة العظمى UN.

الخلاصة: يلتقي الكوكب بالدائرة GHI في النقطتين G وَ F فقط.

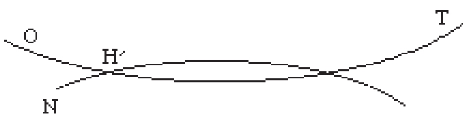
لتكن TUO دائرةً أفقية ذات ارتفاع h أصغر من ارتفاع النقطة G. يلتقي الكوكب بالدائرة TUO في نقطة H' شمال الدائرة الزمانية USF، وتكون H' نقطة المرور الوحيدة للكوكب على الدائرة TUO.



الشكل ١٢٣-١

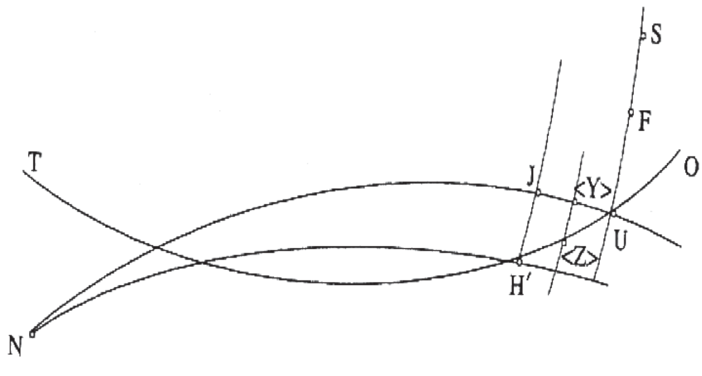


الشكل ١٢٣-٢



الشكل ١٢٣-٣

إذا كانت الدائرة العظمى $H'N$ مماسَّة في النقطة H' للدائرة TUO، أو إذا قطعت TUO على نقطة ثانية جنوب H'، لا يلتقي الكوكب بالقوس $\widehat{TH'}$ التي هي جنوب النقطة H'.



الشكل ١٢٤

إذا قطعت الدائرة العظمى $H'N$ الدائرة TUO على H' وعلى نقطة شمال H' فإنَّ الدائرة العظمى UN تقطع الدائرة UO في U وفي نقطة شمال H' ، كما تقطع دائرةَ H' الزمانية على النقطة J . ينتقل الكوكب من F إلى النقطة H' ، فيقطع الدائرةَ UN على نقطة، لتكن Y، بين النقطتين J وَ U، فتقطع دائرةُ Y الزمانيةُ UH' على النقطة Z.

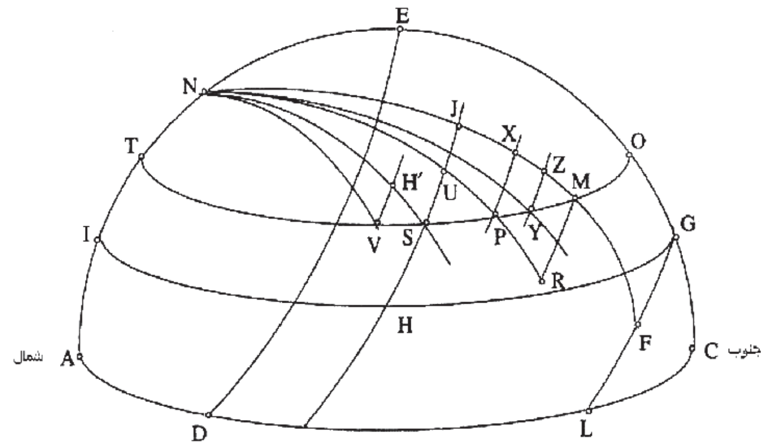
ونبيِّن، كما فعلنا سابقاً(ص. ٢٦٤-٢٦٥)، أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{UH'}$، ولا يمرُّ بأيِّ نقطة من القوس $\widehat{TH'}$.

وهو ، من ناحية أخرى، لا يمرُّ بأي نقطة من القوس $\widehat{OU}$ التي هي جنوب القوس $\widehat{FU}$. فتكون H' إذاً نقطة المرور الوحيدة على الدائرة TO.

يُمكن أن نُبيِّن أيضاً أنَّ على كل دائرة أفقية ذات ارتفاع h مع $h < h_G$ ، توجَد نقطةُ مرور وحيدة.

القضية ٣٥- لنأخذ بعد ذلك دائرة أفقية OST ذات ارتفاع h يُحقّق:

$h_m > h > h_G$، حيث يكون h_m الارتفاع الأقصى، وتكون U النقطة التي لها هذا الارتفاع. يلتقي الكوكب بهذه الدائرة في نقطتين.



الشكل ١٢٥

لتكن ED وَ LG دائرتي D وَ G الزمانيتين. النقطة U هي بين هاتين الدائرتين، ودائرتها الزمانية هي أيضاً بين هاتين الدائرتين، وتقطع على النقطة S الدائرة TSO. تقطع الدائرة العظمى UN الدائرةَ TO على النقطة P.

ينتقل الكوكب من النقطة G إلى النقطة U، فيقطع، إذاً، الدائرةَ TO على نقطة لا يُمكن أن تكون P ولا S، ولا أن تكون نقطة على القوس $\widehat{PS}$، ولكنها بالضرورة جنوب القوس $\widehat{PU}$. تكون نقطة التقاطع، إذاً، على القوس $\widehat{PO}$ ، فلتكن M هذه النقطة. تقطع الدائرةُ العظمى MN القوسَ $\widehat{GL}$ على النقطة F، فتكون القوسُ $\widehat{FG}$ الزمنَ المحصَّل الذي يكون ميلُه القوسَ $\widehat{MF}$.

لا يلتقي الكوكب بأي نقطة من القوس $\widehat{OM}$ التي تكون شرق M.

تقطع دائرة M الزمانية الدائرة UN على النقطة R؛ القوس $\widehat{RM}$ هي الزمن المحصَّل ذو الميل $\widehat{UR}$. تقطع دائرة U الزمانية الدائرة العظمى MN على النقطة J؛ يكون معنا: $\widehat{JM} = \widehat{UR}$ ؛ القوسان $\widehat{UJ}$ وَ $\widehat{RM}$ متشابهتان وتقيسان نفس الزمن، فيكون $\widehat{UJ}$ الزمنَ المحصَّل الذي يكون ميله $\widehat{JM}$؛ ولكنَّ الزمن المحصَّل، في الحقيقة، يقاس بالقوس $\widehat{RM}$، ليس بالقوس $\widehat{UJ}$، إذا أخذنا بعين الاعتبار المصطلحات التي تبنّيناها حتى الآن؛ ولكنَّ هاتين القوسين، التابعتين لدائرتيْن مختلفتين، تقبلان نفس الزاوية المركزية. وهكذا نرى أنَّ ابن الهيثم يُبقي على بعض الالتباس بين الزوايا والأقواس، كما كنا قد تحقّقنا من ذلك في القضيتين ١٤ وَ ١٥. تقطع دائرة P الزمانية الدائرةَ MJN على النقطة X؛ القوس $\widehat{PX}$ مشابهة للقوس $\widehat{UJ}$ وَ $\widehat{JM} < \widehat{MX}$ ، فيكون إذاً: $\frac{\widehat{PX}}{\widehat{XM}} < \frac{\widehat{UJ}}{\widehat{JM}}$.

يُمكن أن نُبيِّن، كما فعلنا سابقاً، بواسطة مثلّثات صغيرة مشابهة للمثلث MXP، أنَّ كلَّ قوس زمانية، مثل القوس $\widehat{YZ}$ الخارجة من نقطة من القوس $\widehat{MP}$ حتّى القوس $\widehat{MX}$ ، تُحقّق: $\frac{\widehat{YZ}}{\widehat{ZM}} = \frac{\widehat{PX}}{\widehat{XM}}$ ، وأنّ $\frac{\widehat{YZ}}{\widehat{ZM}}$ أكبر من نسبة $\widehat{YZ}$ إلى الميل الخاص به.

فلا يمرّ الكوكب، إذاً، بأي نقطة من القوس $\widehat{MP}$؛ ولا يمرُّ إذاً بأي نقطة من القوس $\widehat{MS}$.

لتكن V نقطة مرور ثانية للكوكب على الدائرة TO، حيث تكون V بين الدائرتين الزمانيتين US وَ ED. تقطع دائرة V الزمانية الدائرةَ العظمى NS على النقطة H'. يلتقي الكوكب، في حركته من U إلى V، بالقوس $\widehat{SH'}$. يُمكن أن نبيِّن، كما فعلنا سابقاً، أنّ الكوكب لا يمرّ بأي نقطة من القوس $\widehat{VS}$، ولا يمرُّ بأي نقطة من القوس $\widehat{TV}$. إنّ نقطتي المرور الوحيدتين على الدائرة TO هما النقطتان M وَ V.

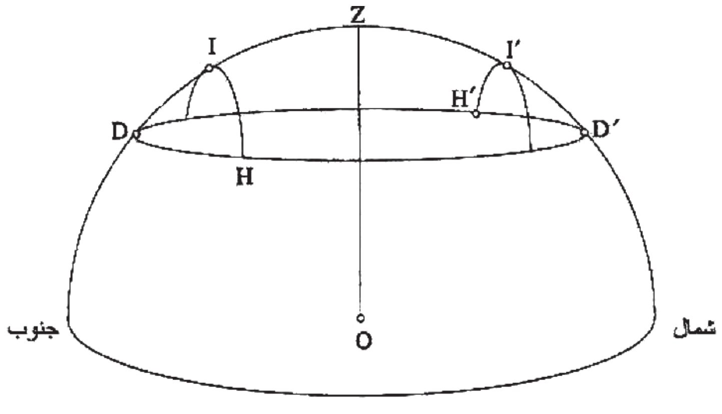
وهكذا يلتقي الكوكب بكل دائرة أفقية، ذات ارتفاع h مع $h_G < h < h_m$، مرّتين فقط.

يعرض ابن الهيثم، بعد ذلك، النتيجة العامة للحالة التي تكون فيها النقطة ذات الارتفاع الأقصى غرب دائرة نصف النهار، وهي الحالة التي ينتقل فيها الكوكب على فلكه من الطرف الشمالي نحو الطرف الجنوبي.

لقد تابعنا، بداية من القضية ٢٨، دراسة الارتفاعات للكواكب التي يكون مرورها على دائرة نصف النهار جنوب قطب الأفق. ولقد تناولنا دائماً كرة مائلة نحو الجنوب، أي أنَّ الدراسة كانت تخصُّ الأمكنة ذات العرض الشمالي.

القضية ٣٦- تكون الكرة منتصبة، في الأمكنة الموجودة على معدّل النهار الأرضي، كما تكون الدوائرُ الزمانية لهذه الأمكنة عموديةً على دائرة الأفق لأنَّ قطب دائرة معدّل النهار يكون على الأفق.

تقابل كل دائرة أفقية ذات قطر$D'D$، حيث يكون $D'D$ في مستوي دائرة نصف النهار وتكون D' في الشمال وَ D في الجنوب، أقواساً زمانية متساوية ثنائيّاً بحيث يكون $\widehat{H'I'}=\widehat{IH}$ وَ $\widehat{ID} = \widehat{I'D'}$ (يوجَد تناظر بالنسبة إلى المحور ZO).



الشكل ١٢٦

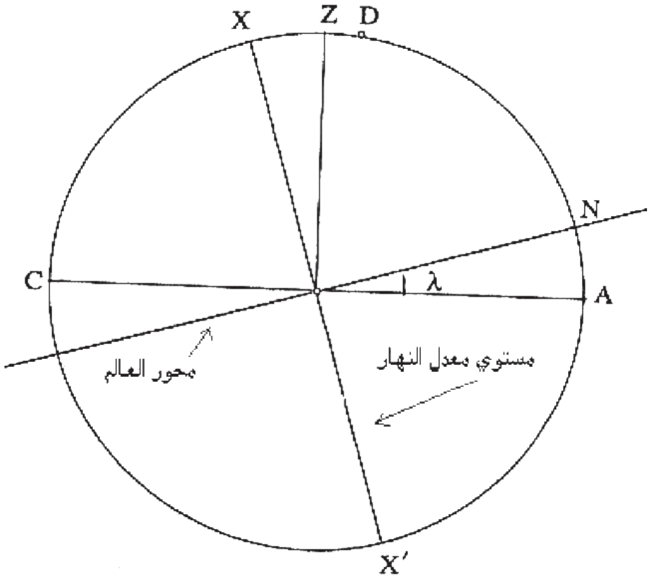
لقد تابعنا الدراسة في القضية ٢٨ مفترضين أنَّ مرور الكوكب على دائرة نصف النهار يكون في النقطة D التي هي جنوب Z، كما تناولنا قوساً زمانية مثل$\widehat{IH}$، حيث تكون النسبة $\frac{\widehat{HI}}{\widehat{ID}}$معلومة مع $k < \frac{\widehat{HI}}{\widehat{ID}}$ وتكون k أكبر من نسبة الزمن المحصَل إلى الميل الخاص بهذا الزمن المحصّل لكل قوس ينتقل عليه الكوكب بين شروقه ونقطة مروره على دائرة نصف النهار.

إذا حصل مرور الكوكب على دائرة نصف النهار في النقطة D' شمال النقطة Z، يجب أن نأخذ القوس $\widehat{H'I'}$، المتناظرة مع $\widehat{HI}$؛ فتكون لها نفس الميزة: $k < \frac{\widehat{H'I'}}{\widehat{I'D'}}$.

إذا كانت الكرة منتصبة، سواء أكان المرور على دائرة نصف النهار شمال أو جنوب قطب الأفق، فإنّنا نحصل على نتائج مماثلة لتلك التي حصلنا عليها في حالة الكرة المائلة نحو الجنوب حيث يكون المرور على دائرة نصف النهار جنوب قطب الأفق.

إذا كانت الكرة مائلة نحو الجنوب، أيْ في الأمكنة ذات العرض الشمالي، لا يمكن للكواكب المتحيِّرة أنْ تمرَّ على دائرة نصف النهار في سمت الرأس أو شمال سمت الرأس إلا إذا كان العرض صغيراً.

يحدث المرور على دائرة نصف النهار في سمت الرأس، إذا كان ميلُ الكوكب بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار في لحظة المرور مساوياً لعرض مكان الراصد؛ ويكون هذا المرور شمال سمت الرأس، إذا كان هذا الميل أكبر من عرض المكان.

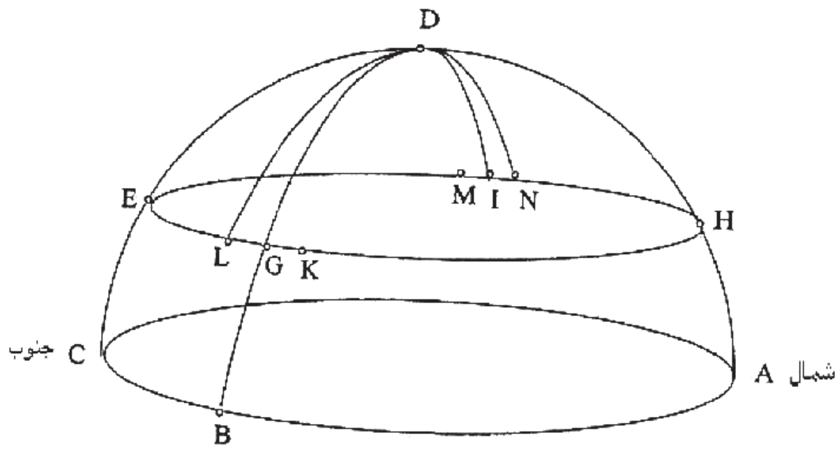


الشكل ١٢٧

لتكن النقطة Z سمتَ الرأس وليكن $X'X$ خطَّ التقاطع بين دائرة معدّل النهار ودائرة نصف النهار، فيكون العرض $\widehat{XZ} = \widehat{AN} = \lambda$. وإذا حدث المرور على دائرة نصف النهار في D، يكون ميل الكوكب بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار عندئذ $\widehat{XD}$. ولا يمكن للنقطة D أن تكون شمال سمت الرأس إلا إذا كان $\widehat{XD} > \widehat{XZ}$ ، فيكون إذاً: $\widehat{XD} > \lambda$.

الحالة التي يكون فيها المرور على دائرة نصف النهار في قطب الأفق

لتكن ABC الأفق ولتكن D قطبه، ولتكن $EGHI$ دائرة أفقية. تقطع دائرة D الزمانية هذه الدائرة على النقطة G شرقاً وعلى النقطة I غرباً. وإذا مر كوكب على دائرة نصف النهار في النقطة D، فإنَّه يتبع الدائرة الزمانية $IDGB$.



الشكل ١٢٨

أ) يُشرق الكوكب شرقاً؛ فإذا مرّ على دائرة نصف النهار في D وإذا كانت حركته على فلكه من الشمال نحو الجنوب، فإنه يلتقي بالدائرة HGE في K شمال G؛ ويلتقي، بين مروره على D وغروبه، بالدائرة $IHGE$ في النقطة M جنوب I.

ب) إذا كانت حركة الكوكب على فلكه من الجنوب نحو الشمال، في حركته بين شروقه ومروره على D ، فإنه يلتقي بالدائرة $IHGE$ في L جنوب K؛ وفي حركته بين D وغروبه، فإنـّه يقطع هذه الدائرة من جديد على النقطة N شمال I.

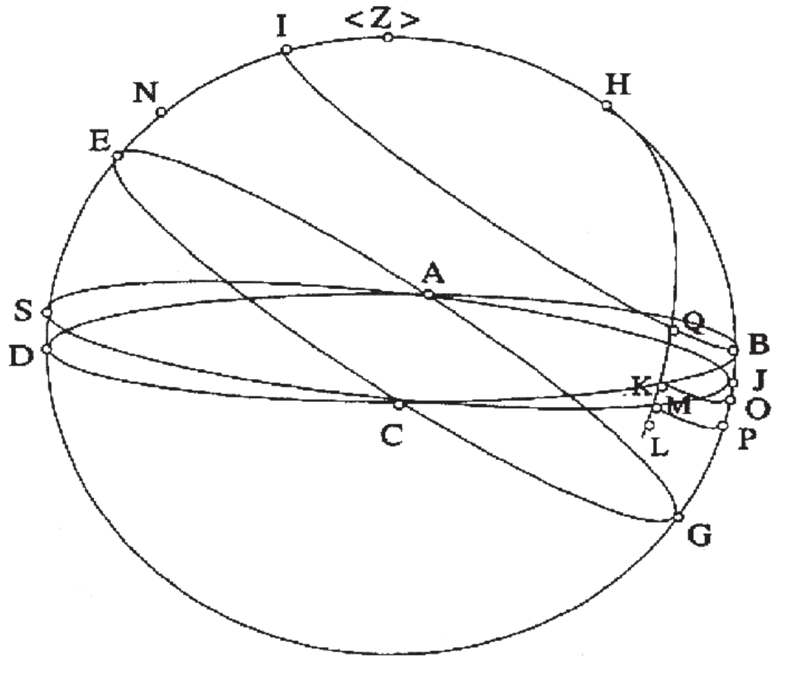
نبيِّن عندئذ أنَّ نقطة المرور الوحيدة، من جهة الشرق، على الدائرة الأفقية $IHGE$ هي النقطة K في الحالة أ) (انظر نهاية القضية ٣١) وهي النقطة L في الحالة ب) (انظر نهاية القضية ٢٩). وكذلك، فإنَّ نقطة المرور الوحيدة، من جهة الغرب، على الدائرة الأفقية $IHGE$ هي النقطة M في الحالة أ) (انظر نهاية القضية ٢٨) وهي النقطة N في الحالة ب) (انظر نهاية القضية ٣٤).

والاستدلال هو نفسه لكل دائرة أفقية، وهكذا فإنَّ الكوكب، في اليوم الذي يمرُّ فيه على دائرة نصف النهار في النقطة D التي هي قطب الأفق، لا يكون له ارتفاعان متساويان من جهة الشرق، ولا يكون له ارتفاعان متساويان من جهة الغرب.

دراسة الآفاق ذات العرض الشمالي λ المساوي لِتَمام ميل الفلك ودراسة الآفاق ذات العرض القريب من λ والتي يكون للكوكب فيها شروق وغروب.

١) لنفترض أنَّ حركة الكوكب على فلكه تحدث بداية من الطرف الشمالي نحو دائرة معدّل النهار.

لتكن الدائرة $ABCD$ أفقَ المكان الذي يكون فيه ارتفاع القطب الشمالي H لدائرة معدّل النهار فوق الأفق- أي عرض المكان- مساوياً لتمام ميل فلك الكوكب بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار، أي في مكان موجود في الدائرة القطبية.



الشكل ١٢٩

تقطع دائرة معدّل النهار الأفقَ على النقطتين A وَ C - توجَد C في الشرق و A في الغرب- وتقطع دائرة نصف النهار على النقطتين E وَ G. القوس $\widehat{DE}$ هي ميل الفلك. يكون معنا: $\widehat{HZ} = \widehat{BG} = \widehat{DE}$ (Z هي قطب الأفق).

تقطع الدائرةُ IQB، ذات القطب H، والتي تمرُّ بالنقطة B، دائرةَ نصف النهار على النقطة I، ويكون معنا: $\widehat{BG} = \widehat{EI}$.

الدائرةُ IQB، في حالة الشمس، هي مدارُ السرطان. ترسم النقطة B، التي هي الطرف الشمالي للفلك، الدائرةَ IQB بفعل الحركة اليومية؛ والدائرة IQB مماسّة في B لدائرة الأفق $ABCD$ ، وهي إحدى دوائر الأفق التي تقبل الدائرة DEB كدائرة لنصف النهار.

لنفترض أنَّ الكوكب، في لحظة معلومة، موجودٌ في النقطة B من الأفق $ABCD$؛ وهو بفعل الحركة اليومية يبتعد عن الدائرة IQB منتقلاً نحو جنوب هذه الدائرة (وكنا قد رأينا ذلك في القضايا ١٦، ١٧ وَ ١٨ عندما تكون حركة الكوكب على فلكه من الطرف الشمالي نحو الطرف الجنوبي).

لتكن K على الأفق وَ O على دائرة نصف النهار بحيث تُحقِّق القوسُ الزمانية $\widehat{OK}$ المتباينةَ $\frac{\widehat{KO}}{\widehat{OB}} < \frac{\text{الزمن المحصَّل}}{\text{الميل الخاص}}$ ؛ والميل الخاصّ بالزمن $\widehat{OK}$، في حركة الكوكب بداية من النقطة B، هو $\widehat{BP}$ مع $\widehat{OB} < \widehat{BP}$. تقطع دائرةُ P الزمانيةُ الدائرةَ العظمى KH على النقطة L؛ ويكون معنا التساوي بين الأزمان: $(\widehat{BQ}) = (\widehat{LP}) = (\widehat{OK})$؛ وهذا الزمن هو في الحقيقة الزاوية التي توتّر كلاً من هذه الأقواس المتشابهة فيما بينها؛ ويكون معنا $\widehat{QL} = \widehat{BP}$ ، فتكون القوس $\widehat{QL}$ الميل الخاص بالزمن $(\widehat{BQ})$؛ فينتقل الكوكب، إذاً إلى النقطة L ، تحت دائرة الأفق $ABCD$.

لتكن النقطة J على دائرة نصف النهار بحيث يكون: $\widehat{BO} > \widehat{BJ}$ وَ $\widehat{OP} > \widehat{BJ}$ ؛ تقطع الدائرة $AJCS$ القوس $\widehat{DE}$ من دائرة نصف النهار على النقطة S، وتقطع الدائرةَ العظمى HKL على النقطة M ؛ فيكون معنا $\widehat{OP} > \widehat{BJ} > \widehat{KM}$ ، ولكن $\widehat{KL} = \widehat{OP}$ فنستنتج أنَّ $\widehat{KM} < \widehat{KL}$؛ فتكون L، إذاً، تحت الدائرة $AJCS$ وتكون B فوق هذه الدائرة التي هي دائرة أفقية قابلة للدائرة DEB كدائرة لنصف النهار؛ والكوكب الذي ينتقل من النقطة B إلى النقطة

L ، يكون قد غرب إذاً بالنسبة إلى الأفق $AJCS$ في نقطة من القوس $\widehat{MJ}$ ، أي من جهة الشرق.

لتكن N نقطة على دائرة نصف النهار بحيث تكون القوسُ $\widehat{IN}$ ميلَ حركة الكوكب الخاصّ بالزمن $\widehat{IQB}$ ؛ ينتقل الكوكب، إذاً، من النقطة L إلى النقطة N ويُشرِق في نقطة من القوس $\widehat{CM}$ ، أي شرق الأفق $AJCS$.

ملاحظات

١) نحن نعلم، في حالة الشمس، أنَّ القوسَ $\widehat{IN}$ ، الموافقة لنقصان الميل خلال نصف يوم، قريبة من $8'$ [٤٥]. فالقوس $\widehat{PB}$ هي، إذاً، أصغر بكثير من $8'$، وكل الأقواس $\widehat{OP}$ ، $\widehat{BJ}$ ، $\widehat{QK}$ ... هي أيضاً أكثر صغراً. فلا يكون الشكل، إذاً، صحيحاً ولكن الهدف منه هو إظهار النقاط التي تدخل في الاستدلال مع مواضعها النسبية.

والواضح هو أنَّ القوس KB صغيرة جداً، وكذلك هي حال القوس التي تفصل بين الشروق والغروب على الأفق $AJCS$؛ فالشروق والغروب هما عمليّاً متطابقان.

٢) إذا كان λ عرض المكان الذي يكون أفقه $ABCD$، يكون معنا: $\widehat{HB} = \lambda$. ولكن $\widehat{HJ} > \widehat{HB}$ ، فيكون $\widehat{HJ} = \varepsilon + \lambda$ عرض المكان الذي يكون أفقه $AJCS$ ، ويكون ε صغيراً جداً، ويكاد عرض المكان ذي الأفق $AJCS$ أنْ لا يزيد على λ، أيْ عن تمام الميل الأقصى للكوكب.

إذا زادت قليلاً أيضاً قيمة العرض الشمالي ، فإنَّ الشمس تبقى طيلة النهار فوق الأفق.

٣) نحن نعلم، وفقاً للفرضيات، أنَّ الكوكب يصل، إذا كانت الدائرة $ABCD$ أفقَ المكان ذي العرض λ، إلى النقطة B في اللحظة التي يبلغ فيها ميله الشمالي أقصاه المساوي α. يكون ميل الكوكب، قبل وصوله إلى B، متزايداً وأصغر من α، كما يكون مساره أكثر فأكثر قرباً من الدائرة الزمانية IQB ؛ وبعد مروره في B ، يبتعد الكوكب من جديد عن الدائرة IQB ؛ ولقد بيّن ابن الهيثم أنَّ الكوكب يمرُّ في نقطة، هي L، موجودة تحت الأفق $ABCD$؛

[٤٥] إنَّ ميل الشمس بالنسبة إلى معدِّل النهار يمرُّ من 0 إلى $23°27'$ خلال تسعين يوماً بالتقريب، أي أنه يتغيَّر بمقدار $15'$ إلى $16'$ في اليوم. وتجري الشمس، في يوم الاعتدال، لمدَّة ٦ ساعات بين شروقها ومرورها على نصف النهار، فيتغيَّر ميلها بما يقرب من أربع دقائق. ولقد دُرِس ميل القمر بالنسبة إلى معدِّل النهار في القضيتين ١٦ وَ ٢٢. ويتمّ بلوغ الميل الأقصى، القريب من $29°$ ، نادراً (الدورة تساوي ١٨ سنة وثمانية شهور). ويُتمُّ القمر دورة كاملة على مداره خلال شهر قمري (٢٩ يوماً ونصف تقريباً)؛ ولذلك يمرُّ ميل القمر من 0 إلى $29°$ خلال ربع هذه الفترة، أي أنه يتغيَّر بمقدار ٤ درجات تقريباً خلال يوم واحد، أو بمقدار درجة واحدة خلال ٦ ساعات في يوم الاعتدال.

فيلتقي الكوكب إذاً، في حركته من L نحو N، بالأفق $ABCD$ في نقطة بين K وَ C، أيْ من جهة الشرق.

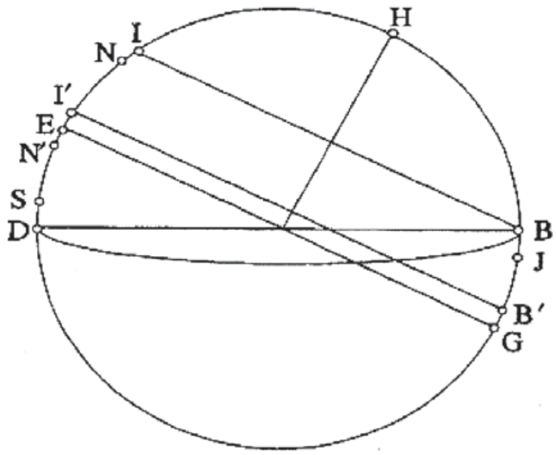
وهكذا يكون الكوكب قد غرب في النقطة B، النقطة الشمالية القصوى لدائرة الأفق $ABCD$ ويكون قد أشرق من جهة الشرق.

إنَّ الدائرة IQB تخصّ، في الفقرة السابقة، الميلَ الأقصى الذي يبلغه الكوكب يوم الانقلاب في حالة الشمس. يلتقي الكوكب بدائرة نصف النهار، في اليوم التالي، في نقطة X من القوس $\widehat{GB}$؛ تمرُّ بهذه النقطة دائرة زمانية Γ مماثلة للدائرة IQB؛ وتمرُّ بالنقطة X دائرة عظمى Γ' مماسّة للدائرة Γ؛ فتكون الدائرة Γ' مماثلة للدائرة $ABCD$. وإذا قمنا انطلاقاً من النقطة X والدائرتين Γ وَ Γ'، بما قمنا به انطلاقاً من النقطة B والدائرتين IQB وَ $ABCD$، نحدِّد أفقاً Γ'' مماثلاً للأفق $AJCS$، بحيث يغرب الكوكب عليه من جهة الشرق ثم يشرق عليه من جهة الشرق.

كل أفق من هذه الآفاق المعنية بالأمر هو أفق شمالي، لأنَّ ارتفاع القطب فوقه، أي القوس $\widehat{JH}$ أو إحدى الأقواس المماثلة لها، أصغر من ربع دائرة.

كل نقطة من الدائرة IQB هي نقطة تماسّ لهذه الدائرة مع دائرة عظمى تكون أفقاً. وهكذا نحصل على آفاق كل النقاط الأرضية التي لها ارتفاع مساوٍ لتمام الميل الأقصى للكوكب المعني بالأمر؛ كما يُطبَّق الاستدلال السابق على كل أفق من هذه الآفاق.

يتحرَّك الكوكب من الطرف الشمالي لفلكه نحو دائرة معدّل النهار، فيتناقص الميل، إذاً، بالنسبة إلى دائرة معدّل النهار. وإذا مرَّ الكوكب يوماً تحت الأفق على نقطة B' قريبة من G بحيث تكون $\widehat{B'G}$ أصغر من الميل عند مرور الكوكب على دائرة نصف النهار فوق الأفق، فإنَّ هذا المرور يحدث في نقطة N' قريبة من النقطة E، جنوب E.



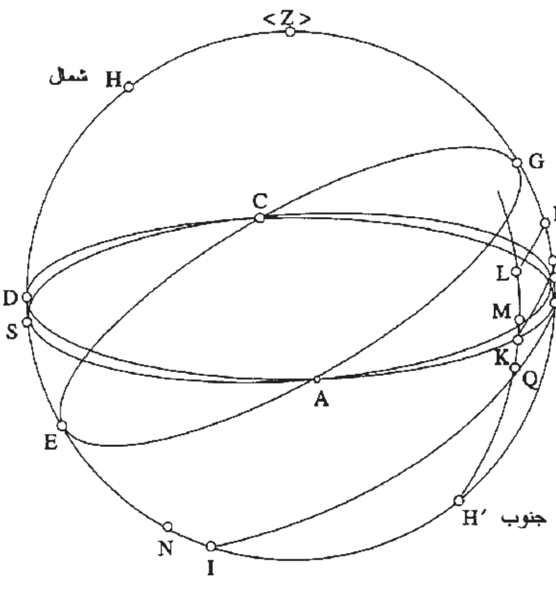
الشكل ١٣٠

إذا كان الأفق $AJCS$ بحيث تكون القوس $\widehat{ES}$ أكبر من ميل نصف دورة يومية، فإنَّ الكوكب يُشرق من جهة الشرق في نقطة من القوس $\widehat{MC}$ أو في نقطة من القوس $\widehat{CS}$.

٢) لنفرض أنَّ حركة الكوكب على فلكه تحدث بداية من الطرف الجنوبي نحو دائرة معدّل النهار.

لتكن النقطتان H وَ H' القطبين الشمالي والجنوبي لدائرة معدّل النهار $AGCE$، ولتكن $ABCD$ دائرة الأفق، وتكون A من جهة الغرب وَ C من جهة الشرق. يكون معنا: $\widehat{HZ} = \widehat{BG} = \widehat{DE}$، إذا كان Z سمت الرأس. لنفرض أنَّ دائرة الأفق $ABCD$ مماسَّة في B للدائرة الزمانية IQB التي تخصّ الميل الجنوبي الأقصى للكوكب المعني بالأمر.

وتكون الدائرة IQB، في حالة الشمس، مطابقة لمدار الجدي.



الشكل ١٣١

لتكن نقطة K على الأفق ونقطةَ O على دائرة نصف النهار بحيث تحقّق القوسُ الزمانية $\widehat{KO}$ المتباينةَ : $\frac{\widehat{KO}}{\widehat{OB}} < \frac{\text{الزمن المحصَّل}}{\text{الميل الخاص}}$ في حركة الكوكب بداية من النقطة B.

تقطع الدائرة العظمى $H'K$ دائرةَ B الزمانية على النقطة Q. الزمن $\widehat{KO}$ يساوي الزمن $\widehat{BQ}$ (معادلة بين زاويتين) والميل الخاصّ لهذا الزمن هو $\widehat{BP}$ مع $\widehat{BO}<\widehat{BP}$. تقطع دائرة P الزمانية الدائرةَ $H'K$ على النقطة L، ويكون معنا: $\widehat{BP}=\widehat{QL}$. وهكذا ينتقل الكوكب خلال الزمن $\widehat{BQ}$ من النقطة B إلى النقطة L.

نأخذ، كما فعلنا في القضية السابقة، النقطةَ J على دائرة نصف النهار (مع $\widehat{OP}>\widehat{BJ}$ وَ $\widehat{BO}>\widehat{BJ}$) ؛ تقطع الدائرةُ العظمى $AJCS$ الدائرة HK على النقطة M ؛ ونبيِّن أنَّ M موجودة بين K وَ L؛ فيكون الكوكب، إذاً، قد انتقل خلال الزمن $\widehat{BQ}$ من النقطة B إلى النقطة L، ويكون قد التقى بالدائرة $AJCS$ في نقطة بين B وَ M ؛ ولكن $AJCS$ هي الأفق في مكان تكون دائرة نصف النهار فيه BHD؛ تكون B تحت الأفق $AJCS$ وتكون L فوقه، فيكون الكوكب قد أشرق على هذا الأفق من جهة الغرب في نقطة بين J وَ M.

تَتَتَابع حركة الكوكب إلى ما بعد L، ويصل على القوس $\widehat{H'E}$ في النقطة N، فيلتقي إذاً بالقوس $\widehat{AJ}$ من الأفق $AJCS$ بعد النقطة M ، ويمرّ تحت الأفق؛ فيغرب إذاً من جهة الغرب في نقطة من القوس $\widehat{AM}$.

ملاحظات

١) إنَّ نقطتي الشروق والغروب قريبتان جداً إحداهما من الأخرى، كما كان كذلك في القسم الأوّل.

٢) يكون معنا : $\widehat{HD} = \lambda$ ، $\widehat{HS} > \widehat{HD}$ ، $\widehat{HS} = \varepsilon + \lambda$ ، حيث يكون ε صغيراً جداً. فيكون عرض الأفق $AJCS$ أكبر قليلاً من تمام الميل الأقصى للكوكب.

إذا زادت قليلاً أيضاً قيمة العرض الشمالي ، فإنّ الشمس تبقى طيلة النهار تحت الأفق.

٣) إذا كانت الدائرة $ABCD$ أفقَ المكان، يُمكن أن نُبيِّن، كما في السابق، أنّ الكوكب يُشرق في النقطة B، النقطة القصوى الجنوبية، ويغرب من جهة الغرب في نقطة قريبة جداً من B.

نرى في النتيجة أنّ ابن الهيثم قد أثبت الميزات التالية لحركة الكوكب على الكرة السماوية: يمر الكوكب بين شروقه وغروبه بنقطة وحيدة U ذات ارتفاع أقصى $h_m = h_U$ فوق الأفق، ويتمّ بلوغ كل ارتفاع h، مع $h_m > h$، مرّتين فقط. وهذه الميزة ترتكز على الحقيقة التي تؤكِّد أنَّ حركة الكوكب تحدث باستمرار من الشرق نحو الغرب.

يكون شروق الكوكب من جهة الشرق ويكون غروبه من جهة الغرب بالنسبة إلى الراصد خارج المناطق القطبية؛ يمرُّ الكوكب على دائرة نصف النهار في نقطة G خلال مساره بفعل الحركة اليومية. يُمكن أن يحدث هذا المرور في G بعد أو قبل المرور في U. ليكن h_G ارتفاع النقطة G؛ يتم بلوغ كل ارتفاع h مع $h_G > h$ مرة واحدة بين نقطة الشروق والنقطة G، ومرة أخرى بين G ونقطة الغروب. ويتم بلوغ كل ارتفاع h مع $h_G < h < h_m$ مرتين بين G وَ U.

إذا كان الراصد قريباً من الدائرة القطبية الشمالية، فإنَّ الشروق والغروب قد يحدثان كلاهما من جهة الشرق أو كلاهما من جهة الغرب، إذ إنَّ المرور على دائرة نصف النهار لا

يحدث خلال الحركة اليومية. ويُمكن للكوكب، بعد الدائرة القطبية، أن لا يُشرق أو بعكس ذلك أن لا يغرب.

٣ـ تاريخ النص

لقد وصَلَ إلينا الكتاب الأول فقط من بين الكتب الثلاثة التي يتألّف منها مؤلَّف ابن الهيثم "هيئة حركات الكواكب السبعة المتحيِّرة". يتعلّق الأمر بالكتاب الذي أعدَّ فيه ابن الهيثم نظرية حركات الكواكب. لقد وصل إلينا هذا الكتاب في مخطوطة وحيدة، ضمن مجموعة قيِّمة موجودة حالياً في مكتبة سان بطرسبرغ الوطنية، وهي ذات الرقم ٦٠٠ في السلسلة العربية الجديدة. لقد قدّمنا وصفاً لهذه المجموعة في المجلّد الرابع من هذه الموسوعة، "الرياضيات التحليليّة"، ص. ٧٢ـ٧٥ ؛ وهذا ما يُعفينا من إعادة تقديمه هنا. يكفي أن نُذكِّر بأن المخطوطة قد نُسخت حوالى منتصف القرن السابع عشر على ورق رقيق شفّاف ناعم لونه رماديٌّ فاتح. وقد يحدث أن تكون الكلمات والأشكالُ على وجه الورقة ظاهرةً، في بعض الأحيان، على ظهرها بسبب الشفافية. وقد يحدث أيضاً أن تكون أحياناً بعض الهوامش صعبة القراءة بسبب تلف أطراف الأوراق. والمخطوطة، أخيراً، مكتوبة مع قليل من العناية بخط نستعليق؛ وهذا ما يجعل قراءة بعض الكلمات في غاية من الصعوبة.

إنَّ نصّ "هيئة الحركات" مكتوب بيد واحدة على الأوراق ٣٦٨ ظ.ـ ٤٢٠ ظ. ولكنَّ هذه الأوراقَ، كما هي الحال في المؤلّفات الأخرى الواردة ضمن نفس المجموعةـ مثل "خواصّ الدوائر" لابن الهيثمـ غيرُ مرتبَّة. وهكذا، فإنَّ أوراق نصّ "هيئة الحركات" تترتَّب في النهاية على الشكل التالي:

٣٦٨ظ. ، ٣٩٧ظ. ، ٣٩٧ و-٤٠١ ظ ، ٤٠٢ظ ، ٤٠٢ و ،٤٠٣ و ـ ٤٠٨ظ ، ٣٦٩و ٣٩٦ ظ، ٤٠٩و ـ ٤٢٠ظ .

ولقد تحقّقنا بالإضافة إلى ذلك من انقلاب بعض الأوراق، رأساً على عقب، وهذا ما قد حصل على الأرجح عند تجليد المجموعة.

لقد تمَّ تحقيق هذا النصّ وفقاً للقواعد الأكثر صرامة التي اتبعناها في تحقيقاتنا النقدية الأخرى وشرحنا فيها طريقتنا في العمل أكثر من مرَّة. ولكن تبقى مسألة تحقيق الأشكال. نحن نعلم أنَّ الأشكال في النص قد رُسمت بيد آخر نسّاخ. هذه الأشكال موحِيَة ولكنها ليست صحيحة بل هي مُلْتَبِسَة. إنَّ الحالة الرديئة للمخطوطة تجعل هذه الأشكال غير قابلة للقراءة في أغلب الأحيان. وهكذا اضطررنا، أمام هذا الوضع، إلى إعادة رسم هذه الأشكال استناداً إلى ما بقي منها في المخطوطة وبالاستعانة بالنص نفسه على الأخص. وقد لجأنا في بعض الأحيان إلى تجزئة الشكل إلى شكلين لنجعله قابلاً للفهم (وخاصة للقضايا ١٤ وَ ١٥ وَ ١٦). ولقد أصررنا، في جميع الحالات، على استخدام بقايا الأشكال حتى ولو كانت غير قابلة للقراءة إلى حدٍّ بعيد، وذلك لكي نبقى، على أحسن وجه ممكن، أمَناء للنص الأصلي.



"في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"، مخطوطة سان بطرسبرغ ٦٠٠، ورقة ٣٧٩ و.

٤ ـ نصّ مخطوطة كتاب الحسن بن الحسن بن الهيثم

" في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"

٣٦٨-ظ

وبيان أن كل كوكب من الكواكب السبعة قد يكون له في بعض الأوقات في اليوم الواحد في جهة المشرق ارتفاعات متساوية في جميع المواضع من الأرض التي ينتصف فيها نهار الكوكب، وأنه في بعض الأوقات قد يكون له في اليوم الواحد في جهة المغرب ارتفاعات متساوية في جميع المواضع من الأرض التي ينتصف فيها نهار الكوكب، وأنه في بعض المواضع من الأرض في بعض الأوقات قد يغرب من أفق المشرق ويطلع في يومه من أفق المشرق، وأنه في بعض الأوقات في تلك المواضع بعينها من الأرض قد يطلع من أفق المغرب ويغرب في يومه من أفق المغرب والتوفيق من الله العليم.

لما كان معرفة حركات كل واحد من الكواكب بما لها من الاختلافات من أقسام صناعة النجوم، وكان أيضًا معرفة الطالع من ارتفاع القمر والكواكب الخمسة من أقسام صناعة النجوم، وكان أيضًا ما ذكرناه من غروب الكواكب في جهة المشرق وطلوعها من جهة المغرب من أقسام صناعة النجوم التي يجب على <أهل> التحقيق بهذه الصناعة أن يعرفوا حقيقتها، رأينا أن نجدد العناية بتحقق البراهين على جميع المعاني التي ذكرناها من الأعراض التي تعرض للكواكب، ليقع اليقين بأن جميع ما ذكرناه فيها على ما ذكرناه، ونجمع ذلك في مقالة مفردة تشتمل على جميع براهينها. ثم نتبع ذلك بمقالة ثانية نلخص فيها جميع الأعمال الحسابية التي تؤدي إلى إدراك حقائق هذه المعاني. ثم نتمم هذه الصناعة، وننقذ أهلها من غصّة التأليف على إدراك الدقائق والأجزاء الصغار من ارتفاع الشمس وسائر الكواكب بشرح

7 ينتصف: قد تقرأ ينتصف أو يتنصف، وكلاهما صحيح / فيها: منها / الكوكب: الكواكب – 9 فيها: بها – 14 ارتفاع: الارتفاع – 20 نتبع: ينتبع.

آلة قريبة المأخذ ممكنة لكل أحد يعرف بها ارتفاع الشمس وكل كوكب من الكواكب بدقائقه وأجزائه الصغار ليصح بذلك وبما نذكره من الأعمال جميع الأعمال النجومية، ويزول به جميع الاختلاف الذي يقع في الأصول من أجل الكسور التي تفوت الراصدين، ويتعذر عليهم إدراكها من أجل صنعة الآلات. ومن الله نستمد المعونة في جميع الأمور.

وجميع ما ذكرناه في غير هذا الكتاب من ارتفاع الشمس وارتفاعات الكواكب وارتفاع نصف النهار مما لم نحرر فيه هذه المعاني فإنما هو على طريقة جمهور أصحاب التعاليم وعلى الأصول المتعارفة؛ ومع ذلك فإن جميع ما ذكرناه من الارتفاعات على الطرق المتعارفة إنما هو فيما صنفناه من كتبنا قبل هذا الكتاب وقبل أن يظهر لنا هذا المعنى؛ ثم لما ظهر لنا هذا المعنى وتحرر ألفنا هذا الكتاب وخصنا فيه هذه المعاني. ثُمَّ <مَن> نظر في هذا الكتاب وفي غيره من كتبنا، فوجد فيما ذكرناه في الارتفاعات اختلافًا، فليعلم أن علته هي ما ذكرنا، وهو أن ما ذكرناه في هذا الكتاب من الارتفاعات للكواكب هو على غاية التحرير، وما ذكرناه في غيره من كتبنا التي ألفناها قبل هذا الكتاب، فهو على المتعارف من طريقة أصحاب التعاليم.

<آ> كل قوسين مختلفتين من دائرة واحدة يكون مجموعهما ليس بأعظم من نصف دائرة، فإن نسبة القوس العظمى إلى القوس الصغرى أعظم من نسبة وتر القوس العظمى إلى وتر القوس الصغرى.

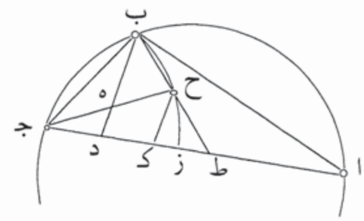
مثال ذلك: قوسا ا ب ب جـ مجموعهما قوس ا ب جـ وليست بأعظم من نصف دائرة، وقوس ا ب أعظم من قوس ب جـ وعلى وتري ا ب ب جـ.

فأقول: إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة وتر ا ب إلى وتر ب جـ.

برهان ذلك: أنا نصل خط ا جـ ونجعل زاوية جـ ب د مثل زاوية ب ا جـ التي هي أصغر من زاوية ا ب جـ، فتكون زاوية ب د جـ مثل زاوية ا ب جـ، فيكون مثلث جـ ب د شبيهًا بمثلث ا ب جـ. فنسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ب د إلى د جـ، وخط ا ب أعظم من خط ب جـ لأن قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ، فخط ب د أعظم من خط د جـ. وأيضًا، فإن نسبة زاوية ب جـ ا

13 هي: هو.

إلى زاوية ب ا جـ هي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ؛ فنسبة زاوية ب جـ د إلى زاوية جـ ب د كنسبة قوس ا ب / إلى قوس ب جـ. ونجعل نقطة ٣٩٧-ظ جـ مركزاً وندير ببعد جـ ب قوساً من دائرة، فلتكن ب ح ز، فهي تقطع خط جـ ا، فلتقطعه على نقطة ز. فيتبين أن نقطة ز تكون خارجة عن خط جـ د إلى ما يلي نقطة ا، لأن خط ز جـ مساوٍ لخط ب جـ وخط ب جـ أعظم من خط جـ د – وذلك لأن زاوية ب د جـ ليست بأصغر من قائمة لأنها مساوية لزاوية ا ب جـ؛ وخط ب جـ أصغر من خط جـ ا، فنقطة ز فيما بين نقطتي د ا.



ونجعل زاوية د جـ ه مثل زاوية جـ ب د، فنقطة ه تكون فيما بين ب د، لأن زاوية ب جـ ا أعظم من زاوية جـ ب د. ونخرج خط جـ ه إلى أن يلقى قوس ب ز، وليلقها على نقطة ح. فيكون نسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح كنسبة زاوية ب جـ د إلى زاوية د جـ ه المساوية لزاوية جـ ب د. وقد تبين أن نسبة زاوية ب جـ د إلى زاوية جـ ب د كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، فنسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح هي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ. ونخرج خط ح ك موازياً لخط د ه؛ فلأن زاوية ه جـ د مساوية لزاوية جـ ب د، وزاوية جـ د ه مشتركة لمثلثي جـ ب د جـ ه د، يكون مثلث جـ ه د شبيهاً بمثلث جـ ب د؛ فيكون نسبة ب د إلى د جـ كنسبة جـ د إلى د ه وكنسبة ب جـ إلى جـ ه. وب جـ مثل جـ ح، فنسبة جـ د إلى د ه كنسبة جـ ح إلى جـ ه. ونسبة جـ ح إلى جـ ه هي كنسبة ح ك إلى د ه، فنسبة جـ د إلى د ه هي كنسبة ح ك إلى د ه، فـ ح ك مثل جـ د. فقد تبين أن ب د أعظم من جـ د، فـ ب د أعظم من ح ك. فنصل ب ح ونخرجه على استقامة، فهو يلقى خط ا جـ، فليلقه على نقطة ط. فتكون نسبة ب ط إلى ط ح كنسبة

10 ب ز (الأولى): ب ز ه / ب ز (الثانية): ب د – 16 جـ ب د: جـ ه د – 18 جـ ح (الثانية): جـ.

ب د إلى ح ك، ونسبة ب د إلى ح ك هي كنسبة ب د إلى د جـ التي هي نسبة ا ب إلى ب جـ، فنسبة خط ب ط إلى خط ط ح هي كنسبة خط ا ب إلى خط ب جـ. وقد تبين أن نسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح هي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ؛ ونسبة خط ب ط إلى خط ط ح هي كنسبة مثلث جـ ب ط إلى مثلث جـ ح ط؛ ونسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح هي كنسبة قطاع جـ ب ز إلى قطاع جـ ح ز، وقطاع جـ ب ح أعظم من مثلث جـ ب ح، وقطاع جـ ح ز أصغر من مثلث جـ ح ط، فنسبة قطاع جـ ب ح إلى قطاع جـ ح ز هي أعظم من نسبة مثلث جـ ب ح إلى مثلث جـ ح ط. وبالتركيب تكون نسبة قطاع جـ ب ز إلى قطاع جـ ح ز أعظم من نسبة مثلث جـ ب ط إلى مثلث جـ ح ط. فنسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح أعظم من نسبة خط ب ط إلى خط ط ح. وقد تبين أن نسبة قوس ب ز إلى قوس ز ح هي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ وأن نسبة خط ب ط إلى خط ط ح هي كنسبة خط ا ب إلى خط ب جـ، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة وتر ا ب إلى وتر ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد بيّن بطلميوس هذا المعنى في كتاب المجسطي، لكن بطريق غير هذا الطريق.

وأقول أيضاً: إن نسبة قوس ا ب جـ / إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة ٣٩٧-و
خط ا جـ إلى خط جـ ب.

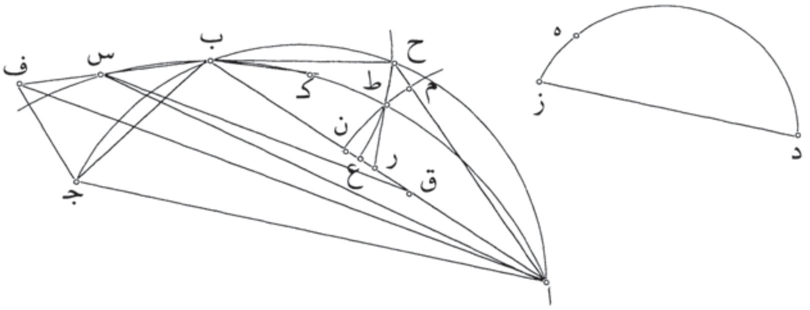
برهان ذلك: أن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ. فبالتركيب، تكون نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة خطي ا ب ب جـ إلى خط جـ ب. ونسبة ا ب ب جـ إلى خط جـ ب أعظم من نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب، لأن خطي ا ب ب جـ أعظم من ا جـ. فنسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

3 ب ز: ب ن – 20 جـ ب: ح ب.

<ب> إذا كانت قوسان مختلفتان، وكانت إحداهما أعظم من الشبيهة بالأخرى من دائرتين متساويتين أو كانتا من دائرتين مختلفتين، وكانت كل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة، وقسمت كل واحدة من القوسين بقسمين مختلفين وكانت نسبة القسم الأعظم من القوس العظمى إلى القسم الأصغر منها كنسبة القسم الأعظم من القوس الصغرى إلى القسم الأصغر منها، وأخرجت أوتار هذه القسي، فإن نسبة وتر القسم الأعظم من القوس الصغرى إلى وتر القسم الأصغر منها أعظم من نسبة وتر القسم الأعظم من القوس العظمى إلى وتر القسم الأصغر منها.

مثال ذلك: قوسا ا ب جـ د ه ز مختلفتان وقوس ا ب جـ أعظم من الشبيهة بقوس د ه ز وكل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة، وقسمت القوسان على نقطتي ب ه، وكانت قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ وقوس د ه أعظم من قوس ه ز، وكانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز؛ وأخرجت أوتار ا ب ب جـ د ه ه ز.

فأقول: إن نسبة وتر د ه إلى وتر ه ز أعظم من نسبة وتر ا ب إلى وتر ب جـ.



برهان ذلك: أنا نعمل على وتر ا ب قوسًا شبيهة بقوس د ه، فهي تقع في داخلها لأن قوس د ه ز أصغر من الشبيهة بقوس ا ب جـ؛ ونسبة قوس د ه إلى قوس ه ز كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، فقوس د ه أصغر من الشبيهة بقوس ا ب؛ فالزاوية التي تقع فيها أعظم من الزاوية التي تقع في قوس ا ب، فالقوس الشبيهة بقوس د ه تقع في داخل قوس ا ب، فلتكن مثل

2 أو كانتا: كانتا أو – 9 مختلفتان: مختلفان – 10 الشبيهة: عادة ما يكتبها الشبهة، ولن نشير إلى ذلك فيما بعد.

قوس ا ط ب. ونفصل قوس ب ح مساوية لقوس ب جـ ونصل خطي ب ح ا ح. فلأن قوس ا ب جـ ليست بأعظم من نصف دائرة، تكون قوس ا ب أصغر من نصف دائرة، فزاوية ا ح ب منفرجة. فنجعل نقطة ب مركزاً وندير ببعد ب جـ قوساً من دائرة. فهذه القوس تقطع زاوية ا ح ب، فلتكن هذه القوس قوس ح ط ع. فقوس ح ط ع تقطع قوس ا ط ب، فلتقطعها على نقطة ط. ونصل خط ب ط، فيكون مساوياً لخط ب ح. ونصل خط ح ط وننفذه إلى ر، فتكون زاوية ب ح ط مساوية لزاوية ب ط ح، فتكون زاوية ب ح ط حادة وتكون زاوية ب ط ر منفرجة وزاوية ا ر ط أعظم منها، فزاوية ا ر ط منفرجة. فخط ا ح أعظم من خط ا ط وخط ا ط أعظم من خط ا ر. فنجعل نقطة ا مركزاً وندير ببعد ا ط قوساً من دائرة. فهذه القوس تقطع خط ا ح على نقطة فيما بين نقطتي ا ح وتقطع خط ا ر على نقطة خارجة عن نقطة ر؛ فلتكن هذه القوس قوس م ط ن. فلأن قطاع ب ح ط أعظم من مثلث ب ح ط ومثلث ب ط ر أعظم من ب ط ع، تكون نسبة قطاع ب ح ط إلى قطاع ب ط ع أعظم من نسبة مثلث ب ح ط إلى مثلث ب ط ر. وبالتركيب أيضاً، تكون نسبة قطاع ب ح ع إلى قطاع ب ط ع أعظم من نسبة مثلث ب ح ر إلى مثلث ب ط ر. فتكون نسبة زاوية ح ب ا إلى زاوية ط ب ا أعظم من نسبة خط ح ر إلى خط ر ط. وأيضاً، من أجل أن مثلث ا ح ط أعظم من قطاع / ٣٩٨-و ا م ط وقطاع ا ط ن أعظم من مثلث ا ط ر، تكون نسبة مثلث ا ح ط إلى مثلث ا ط ر أعظم من نسبة قطاع ا م ط إلى قطاع ا ط ن. وبالتركيب أيضاً، يكون كذلك، فتكون نسبة ح ر إلى ر ط أعظم من نسبة زاوية ح ا ب إلى زاوية ط ا ب؛ ونسبة زاوية ح ب ا إلى زاوية ط ب ا أعظم من نسبة خط ح ر إلى خط ر ط، ونسبة خط ح ر إلى خط ر ط أعظم من نسبة زاوية ح ا ب إلى زاوية ط ا ب؛ فنسبة زاوية ح ب ا إلى زاوية ط ب ا أعظم بكثير من نسبة زاوية ح ا ب إلى زاوية ط ا ب. وإذا بدلنا، كانت نسبة زاوية ح ب ا إلى زاوية ح ا ب أعظم من نسبة زاوية ط ب ا إلى زاوية ط ا ب. فنسبة قوس ا ح إلى قوس ح ب أعظم

8 ب ح ط: ب ط ح / ب ط ر: الراء هي لام في المخطوطة – 21 ونسبة: فنسبة – 25 ح ا ب: ح ب ا.

من نسبة قوس ا ط إلى قوس ط ب. وبالتركيب، تكون نسبة قوس ا ح ب إلى قوس ب ح أعظم من نسبة قوس ا ط ب إلى قوس ب ط. فتكون القوس التي نسبة قوس ا ط ب إليها كنسبة قوس ا ح ب إلى قوس ب ح أصغر من قوس ب ط، فتكون قوس ب ک. ونصل خط ب ک، فيكون أصغر من خط ب ط، لأن قوس ب ط أصغر من نصف دائرة، فخط ب ک أصغر من خط ب ح. ونتمم دائرة ا ط ب، ونفصل منها قوس ب س مساوية لقوس ب ک. ونصل خطي ا س ب س. فتكون نسبة قوس ا ط ب إلى قوس ب س هي كنسبة قوس ا ح ب إلى قوس ب ح، أعني قوس ب جـ. وقد كانت نسبة قوس ا ح ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، فنسبة قوس ا ط ب إلى قوس ب س كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز؛ وقوس ا ط ب شبيهة بقوس د ه، فقوس ب س شبيهة بقوس ه ز، فتكون قوس ا ب س شبيهة بقوس د ه ز، فتكون نسبة خط ا ب إلى خط ب س كنسبة خط د ه إلى خط ه ز. وب س مثل ب ک وب ک أصغر من ب ح وب ح مثل ب جـ، فخط ب س أصغر من خط ب جـ، فنسبة <خط> ا ب إلى خط ب س أعظم من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ. وقد تبين أن نسبة ا ب إلى ب س هي كنسبة د ه إلى ه ز، فنسبة خط د ه إلى خط ه ز أعظم من نسبة خط ا ب <إلى خط ب جـ>؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأقول أيضًا: إن نسبة خط د ز إلى خط ز ه أعظم من نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب.

وقد تبين أن خط ب س أصغر من خط ب جـ. فنجعل خط ب ف مثل خط ب جـ ونصل ا ف ف جـ ونخرج س ق موازيًا لخط ا ف. فلأن جـ ب مثل ب ف، تكون زاوية ب ف جـ مثل زاوية ب جـ ف؛ وزاوية ب ف جـ أعظم من زاوية ا ف جـ، فزاوية ب جـ ف أعظم من زاوية ا ف جـ، فزاوية ا جـ ف أعظم بكثير من زاوية ا ف جـ. فخط ا ف أعظم من خط ا جـ، فنسبة ا ف إلى ف ب أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ب. وأيضًا، فإن زاوية ا ب س

4 ب ط: ا ط / ب ک (الأولى): ح ک – 5 ب ک: مطموسة – 13 ب ک: مكررة – 23 ا جـ ف: مكررة – 24 بكثير: كثير.

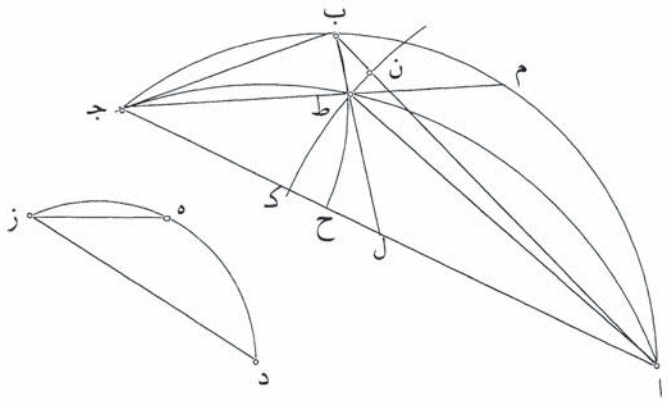
منفرجة، لأن قوس ا ب س أصغر من نصف دائرة لأنها مساوية لقوس د ه ز التي هي أصغر من الشبيهة بقوس ا ب جـ التي ليست بأعظم من نصف دائرة./ فزاوية ا ق س منفرجة، فخط ا س أعظم من خط ق س، فنسبة ا س ٣٩٨-ظ إلى س ب أعظم من نسبة ق س إلى س ب. ونسبة ق س إلى س ب هي كنسبة ا ف إلى ف ب، فنسبة ا س إلى س ب أعظم من نسبة ا ف إلى ف ب؛ ونسبة ا ف إلى ف ب أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ب، فنسبة ا س إلى س ب أعظم بكثير من نسبة ا جـ إلى جـ ب. ونسبة ا س إلى س ب كنسبة د ز إلى ز ه. فنسبة د ز إلى ز ه أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

〈جـ〉 إذا كانت قوسان مختلفتان، كل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة، وكانت إحداهما أعظم من الشبيهة بالأخرى، 〈و〉كانت القوسان من دائرتين متساويتين أو كانتا من دائرتين مختلفتين، وأخرج في القوسين وتران، فكانت نسبة وتر القوس العظمى إلى الوتر الخارج فيها كنسبة وتر القوس الصغرى إلى الوتر الخارج فيها، فإن القوس الباقية من القوس العظمى أعظم من الشبيهة بالقوس الباقية من القوس الصغرى، ونسبةَ القوس الباقية من القوس العظمى إلى القوس التي فصلها الوتر أعظم من نسبة القوس الباقية من القوس الصغرى إلى القوس التي فصلها الوتر.

مثال ذلك: قوسا ا ب جـ د ه ز مختلفتان وكل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة، وقوس ا ب جـ أعظم من الشبيهة بقوس د ه ز وخرج فيها وترا جـ ب ه ز 〈ووترا ا جـ د ز〉 وكانت نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب كنسبة خط د ز إلى خط ز ه.

فأقول: إن قوس ا ب أعظم من الشبيهة بقوس د ه، وإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

5 ا ف (الأولى والثانية): ا ب – 10 مختلفتان: مختلفان – 13 وتران: وترين.



برهان ذلك: أنا نعمل على خط ا ج قوساً من دائرة شبيهة بقوس د ه ز، ولتكن قوس ا ط ج. ولأن قوس ا ب ج ليست بأعظم من نصف دائرة، يكون خط ا ج أعظم من خط ج ب. فإذا جعلنا نقطة ج مركزاً وأدرنا ببعد ج ب قوساً من دائرة، فإنها تقطع خط ا ج فيما بين نقطتي ا ج، وإذا كانت تقطع خط ا ج فيما بين نقطتي ا ج، فهي تقطع ا ط ج، فلتكن هذه القوس قوس ب ط ح. ونصل خط ج ط وننفذه إلى م، ونصل خط ب ط وننفذه إلى ل، ونصل ا ب ا ط. فيكون خط ج ط مساوياً لخط ج ب، فتكون نسبة خط ا ج إلى خط ج ط هي نسبة خط ا ج إلى خط ج ب. وقد كانت نسبة ا ج إلى ج ب كنسبة خط د ز إلى خط ز ه، فنسبة خط ا ج إلى خط ج ط هي كنسبة خط د ز إلى خط ز ه، وقوس ا ط ج شبيهة بقوس د ه ز، فقوس ا ط شبيهة بقوس د ه؛ وقوس ط ج شبيهة بقوس ه ز وقوس ا ط هي شبيهة بقوس ا م وقوس ا ب أعظم من قوس ا م، فقوس ا ب أعظم من الشبيهة بقوس د ه. ولأن خط ج ط مثل خط ج ب، تكون زاوية ب ط ج حادة وتكون زاوية ب ط م منفرجة، فزاوية ا ط ب منفرجة وزاوية ل ط ج منفرجة لأنها مساوية لزاوية ب ط م. وزاوية ا ل ط أعظم من زاوية ل ط ج، فزاوية ا ل ط منفرجة، فخط ب ا أعظم من خط ا ط وخط ا ط أعظم من خط ا ل. فنجعل نقطة ا مركزاً ونديرببعد ا ط قوساً من دائرة؛ فهذه القوس تقطع خط ا ب فيما بين نقطتي ا ب وخارجاً عن نقطة م.

10 ز ه: د ه – 15 مساوية: متساوية.

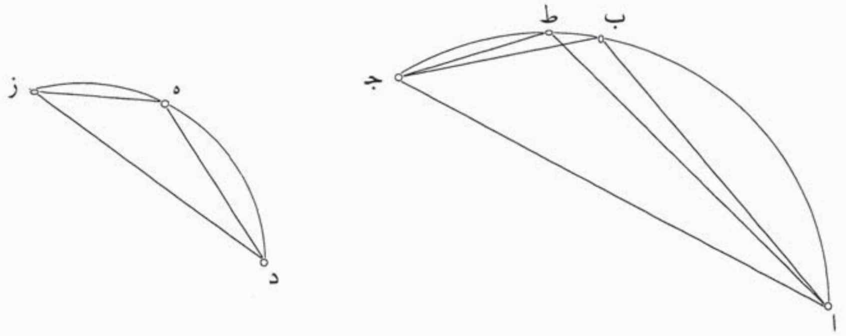
لأن زاوية ا ط م حادة. وهذه القوس تقطع خط ا ل خارجًا عن نقطة ل، فلتكن هذه القوس قوس ن ط ك. فلأن قطاع جـ ب ط أعظم من مثلث جـ ب ط وقطاع جـ ط ح أصغر من مثلث جـ ط ل، تكون نسبة قطاع جـ ب ط إلى قطاع / جـ ط ح أعظم من نسبة مثلث جـ ب ط إلى مثلث ٢٩٩-و جـ ط ل. وبالتركيب، تكون نسبة قطاع جـ ب ح إلى قطاع جـ ط ح أعظم من نسبة مثلث جـ ب ل إلى مثلث جـ ط ل، فنسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية ا جـ ط أعظم من نسبة خط ب ل إلى خط ل ط. وأيضًا، لأن مثلث ا ب ط أعظم من قطاع ا ن ط ومثلث ا ط ل أصغر من قطاع ا ط ك، تكون نسبة مثلث ا ب ط إلى مثلث ا ط ل أعظم من نسبة قطاع ا ن ط إلى قطاع ا ط ك. وبالتركيب أيضًا كذلك، فتكون نسبة خط ب ل إلى خط ل ط أعظم من نسبة زاوية جـ ا ب إلى زاوية جـ ا ط. ونسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية ا جـ ط أعظم من نسبة خط ب ل إلى خط ل ط، ونسبة خط ب ل إلى خط ل ط أعظم من نسبة زاوية جـ ا ب إلى زاوية جـ ا ط؛ فنسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية ا جـ ط أعظم بكثير من نسبة زاوية جـ ا ب إلى زاوية جـ ا ط. وإذا بدلنا، كانت نسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية جـ ا ب أعظم من نسبة زاوية ا جـ ط إلى زاوية جـ ا ط. فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس ا ط إلى قوس ط جـ؛ ونسبة قوس ا ط إلى قوس ط جـ هي كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز لأنهما شبيهتان بهما، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

〈د〉 كل قوسين مختلفتين تكون إحداهما أعظم من الشبيهة بالأخرى وكل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة. ويخرج في كل واحدة منهما وتران مختلفان، فتكون نسبة الوتر الأعظم من القوس العظمى إلى الوتر الأصغر منهما كنسبة الوتر الأعظم من القوس الصغرى إلى الوتر الأصغر منهما، فإن نسبة أعظم القوسين من القوس العظمى إلى أصغر القوسين منهما أعظم من نسبة أعظم القوسين من القوس الصغرى إلى أصغر القوسين منهما.

2 ن ط ك: ز ط ك – 3 جـ ط ل: ح ط ل – 6 جـ ط ل: ح ط ل – 7 ب ل: ب ا – 11 ونسبة: فنسبة – 12 ب ل (الثانية): ب ا – 18 شبيهتان: شبيهتين – 20 مختلفتين: مختلفين – 22 الوتر: الوتران – 23 منهما: الضمير يعود على الوترين من القوس العظمى – 24 منهما: الضمير يعود على الوترين من القوس الصغرى.

مثال ذلك: قوسا ا ب جـ د ه ز، وقوس ا ب جـ أعظم من الشبيهة بقوس د ه ز، وكل واحدة منهما ليست بأعظم من نصف دائرة. وخرج فيهما أوتار ا ب ب جـ د ه ه ز وكانت نسبة وتر ا ب إلى وتر ب جـ كنسبة وتر د ه إلى وتر ه ز.

فأقول: إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.



برهان ذلك: أنه إن لم تكن كذلك، فإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ إما مساوية لنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، وإما أصغر من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

فإن كانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، فإن نسبة خط د ه إلى خط ه ز أعظم من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ، كما تبين في الشكل الثاني. لكن نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ هي بالفرض كنسبة خط د ه إلى خط ه ز. فليس نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

وإن كانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أصغر من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، فإنه بالتركيب تكون نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس / جـ ب ٣٩٩-ظ أصغر من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، فتكون نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه كنسبة قوس ا ب جـ إلى قوس أصغر من قوس ب جـ، فلتكن قوس جـ ط؛ فتكون نسبة قوس ا ط إلى قوس ط جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز. ونصل خطي ا ط ط جـ. فلأن نسبة قوس ا ط إلى قوس ط جـ كنسبة

12 هي: كتب ك – 13 د ه: ك ه.

قوس د ه إلى قوس ه ز، وقوس ا ط جـ أعظم من الشبيهة بقوس د ه ز، تكون نسبة خط د ه إلى خط ه ز أعظم من نسبة خط ا ط إلى خط ط جـ. ونسبة خط ا ط إلى خط ط جـ أعظم من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ، لأن خط ا ط أعظم من خط ا ب وخط ط جـ أصغر من خط ب جـ. وإذا كانت نسبة خط د ه إلى خط ه ز أعظم من نسبة خط ا ط إلى خط ط جـ، ونسبة خط ا ط إلى خط ط جـ أعظم من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ، كانت نسبة خط د ه إلى خط ه ز أعظم بكثير من نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ. ونسبة خط د ه إلى خط ه ز هي بالفرض كنسبة خط ا ب إلى خط ب جـ. فليس نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز ولا أصغر من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ هي أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ويلزم أيضًا أنه إذا كانت نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ أعظم من نسبة خط د ه إلى خط ه ز، فإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، لأن الخطين اللذين نسبة إحداهما إلى الآخر كنسبة خط د ه إلى خط ه ز تكون النقطة المشتركة لهما فيما بين نقطتي ا ب، وتلك النقطة تقسم قوس ا ب جـ بقسمين، نسبة إحداهما إلى الآخر أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز. فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ تكون أعظم بكثير من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

وأقول أيضًا: إنه إن كانت نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب كنسبة خط د ز إلى خط ز ه، فإن نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى <قوس> ز ه.

برهان ذلك: أنه إن لم تكن نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، فإن نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب مساوية لنسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه أو أصغر من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه.

10 فنسبة: كنسبة – 15 لهما: لها.

فإن كانت نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب مساوية لنسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، فإن نسبة خط د ز إلى خط ز ه أعظم من نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب، كما تبين في آخر الشكل الثاني من هذه المقالة. لكن نسبة خط د ز إلى خط ز ه هي بالفرض كنسبة ا جـ إلى جـ ب، فليس نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب كنسبة / قوس د ه ز إلى قوس ز ه. ٤٠٠-و

وإن كانت نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أصغر من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، فإن نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه هي أعظم من نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب. ويكون قوس د ه ز إلى قوس ز ه هي كنسبة قوس ا ب جـ إلى قوس أصغر من قوس جـ ب؛ فلتكن تلك القوس قوس جـ ط. ونصل ا ط ط جـ. فتكون نسبة د ز إلى ز ه أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ط؛ ونسبة ا جـ إلى جـ ط أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ب، فتكون نسبة د ز إلى ز ه أعظم من نسبة ا جـ إلى جـ ب. لكن نسبة د ز إلى ز ه هي بالفرض كنسبة ا جـ إلى جـ ب. فليس نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب مساوية لنسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، ولا أصغر منها، فنسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ويلزم أنه إن كانت نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب أعظم من نسبة خط د ز إلى خط ز ه، فإن نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب تكون أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه.

فيلزم من جميع ذلك أنه إذا كانت قوسان مختلفتان، وكانت إحداهما أعظم من الشبيهة بالأخرى وكانت أعظمهما ليست بأعظم من نصف دائرة، وأخرج فيهما وتران وكانت نسبة قاعدة القوس العظمى إلى الوتر الذي أخرج فيها ليست بأصغر من نسبة قاعدة القوس الصغرى إلى الوتر الذي أخرج فيها، فإن نسبة القوس العظمى إلى ما يفصل الوتر منها أعظم من نسبة القوس الصغرى إلى ما يفصل الوتر منها.

2 خط (الأولى): قوس – 15 قوس (الثانية): مكررة – 20 مختلفتان: مختلفان – 25 ما: ه̄، كتبها هكذا في المخطوطة.

وأقول أيضًا: إنه إن كانت قوسا ا ب جـ د ه ز متشابهتين وكانت ⟨نسبة⟩ خط ا جـ إلى خط جـ ب أعظم من نسبة خط د ز إلى خط ز ه، فإن نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ه ز.

وذلك أنه إذا كانت نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب كنسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه، فإن نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب تكون كنسبة خط د ز إلى خط ز ه. فإذا كانت نسبة خط ا جـ إلى خط جـ ب أعظم من نسبة خط د ز إلى خط ز ه، فإن خط جـ ب أصغر من الخط الذي يوتر القوس المناسبة لقوس ز ه؛ فتكون قوس جـ ب أصغر من القوس المناسبة لقوس ز ه، ويكون نسبة قوس ا جـ ب إلى قوس جـ ب أعظم من نسبة قوس د ه ز إلى قوس ز ه.

وأقول أيضًا: إنه إذا كانت كل واحدة من قوسي ا ب جـ د ه ز أعظم من نصف دائرة، وكانت كل واحدة من قوسي ا ب د ه ليست بأعظم من نصف دائرة، وكانت قوس ا ب ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ه، وكانت قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ وقوس د ه أعظم من قوس ه ز، وكانت نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ أعظم من نسبة خط د ه إلى خط ه ز، فإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

برهان ذلك: أنه إذا كانت قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ وقوس د ه أعظم من قوس ه ز، فإنه يمكن أن نفصل من قوس ا ب قوسًا مساوية لقوس ب جـ ومن قوس د ه قوسًا مساوية لقوس ه ز ونفصلَ وتريهما، فتكون نسبة خط ا ب إلى وتر ما ينفصل من قوس ا ب أعظم من نسبة خط د ه إلى وتر ما ينفصل من قوس د ه. وقوس ا ب ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ه، وكل واحدة من قوسي ا ب د ه ليست بأعظم من نصف دائرة. فتكون نسبة قوس ا ب إلى ما ينفصل منها أعظم من نسبة قوس د ه إلى ما ينفصل منها، كما تبين فيما تقدم. والذي فصل من قوس ا ب هو مساوٍ لقوس ب جـ والذي فصل من قوس د ه هو مساوٍ لقوس ه ز، فتكون نسبة قوس ا ب إلى

9 ز ه (الثانية): د ه – 13 ا ب د ه: مطموسة – 18 كانت: كان – 21 ما: ا ه.

قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز. فإذا كانت كل واحدة من قوسي ا ب جـ د ه ز أعظم من نصف دائرة، وكانت واحدة من قوسي ا ب د ه / ليست بأعظم من نصف ‹دائرة›، وكانت قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ وقوس د ه أعظم من قوس ه ز، وكانت قوس ا ب ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ه، وكانت نسبة خط ا ب إلى خط ب جـ أعظم من نسبة خط د ه إلى خط ه ز، فإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ٤٠٠-ظ

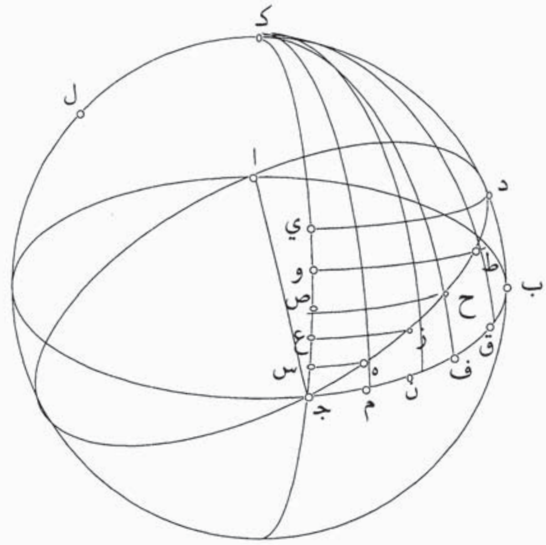
‹ه› كل دائرتين عظيمتين تتقاطعان في كرة ويكون البُعد الذي بين قطبيهما أقلّ من ربع دائرة.

ونقسم الربع من إحداهما بأجزاء متساوية كم كانت، وتخرج من قطب الدائرة الأخرى دوائر عظام تمرّ بمواضع القسمة من الربع المقسوم وتنتهي إلى الدائرة الأخرى، فإن تفاضل القسي من هذه الدوائر التي تنفصل بين الدائرتين الأوليين التي هي ميول أجزاء الربع المقسوم تكون مختلفة، وإن ما كان منها يلي نقطة التقاطع، فإنه أعظم من تفاضل ما بعد منها عن نقطة التقاطع.

مثال ذلك: دائرتا ا ب جـ ا د جـ عظيمتان متقاطعان في كرة، ولتكن قوس جـ د ربع دائرة ا د جـ وقوس ا ب ربع دائرة ا ب جـ. ولنقسم ربع جـ د بأجزاء متساوية، ولتكن بأجزاء جـ ه ه ز ز ح ح ط ط د. وليكن قطب دائرة ا ب جـ نقطة ك وقطب دائرة ا د جـ نقطة ل. ونجيز على نقطتي ل ك دائرة عظيمة، فهي تمرّ بنقطتي د ب، لأنه إذا كان قطبا دائرتي ا ب جـ ا د جـ على دائرة ل ك، فإن قطب دائرة ل ك على دائرتي ا ب جـ ا د جـ؛ فنقطة جـ هي قطب دائرة ل ك، فتكون كل قوس تخرج من نقطة جـ إلى دائرة ل ك من الدوائر العظام فهي ربع دائرة. فدائرة ل ك تمرّ بنقطتي د ب. ولأن كل واحدة من قوسي ل د ك ب ربع دائرة، تكون قوس ل ك مساوية لقوس د ب وقوس ل ك أقلّ من ربع دائرة، فقوس د ب أقل من ربع دائرة.

9 قطبيهما: قطبها – 16 دائرتا: دائرتان – 24 ل ك: د ك.

ونجيز على نقطة ك وعلى كل واحدة من نقط جـ ه ز ح ط دائرة عظيمة، ولتكن دوائر ك جـ ك ه م ك ز ن ك ح ف ك ط ق. فتكون قسي ه م ز ن ح ف ط ق د ب هي ميول قسي جـ ه جـ ز جـ ح جـ ط جـ د، وتكون قوس د ب أعظم الميول وهي ميل ربع جـ د. ونديـر على قطب ك وببعد ك ه ك ز ك ح ك ط ك د قسيًا من دوائر متـوازية تقطع قـوس ك جـ، فلتكن هذه القسي قسي ه س ز ع ح ص ط و د ي، فتكون قسي ي و و ص ص ع ع س هي تفاضل ميول قسي جـ د جـ ط جـ ح جـ ز جـ ه.



فأقول: إن قوس ي و أصغر من قوس و ص وإن و ص أصغر من ص ع وإن ص ع أصغر من ع س وإن ع س أصغر من س جـ. أما أن ع س أصغر من س جـ، فإنه يتبين كما نصف.

وهو أنه تبين من الشكل القطاع أن نسبة وتر ضعف قوس ه جـ إلى وتر ضعف قوس جـ د هي نسبة وتـر ضعف قوس ه م إلى وتر ضعف قوس د ب، أعني نسبة وتر ضعف قوس س جـ إلى وتر ضعف قـوس جـ ي، لأن قـوس ك م مساوية لقوس ك ب؛ وكذلك أيضًا نسبة وتر ضعف قوس ز جـ إلى وتر

2 ك ح ف: ك ح ه – 3 هي: هو – 6 ز ع: د ع / ط و: ط د / ي و: ي د – 8 ي و: ي د / و ص (الأولى والثانية): د ص – 14 وكذلك: ولذلك.

ضعف قوس جـ د هي نسبة وتر ضعف قوس ع جـ إلى وتر ضعف قوس
جـ ي. فيكون نسبة وتر ضعف قوس ز جـ إلى وتر / ضعف قوس جـ ه هي ٤٠١-و
نسبة وتر ضعف قوس ع جـ إلى وتر ضعف قوس جـ س.

وأيضًا، من أجل أن نسبة وتر ضعف قوس جـ ه إلى وتر ضعف قوس جـ د هي نسبة وتر ضعف قوس ه م إلى وتر ضعف قوس د ب، تكون نسبة وتر ضعف قوس جـ ه إلى وتر ⟨ضعف⟩ قوس ه م هي نسبة وتر ضعف قوس جـ د إلى وتر ضعف قوس د ب. ووتر ضعف قوس جـ د أعظم من وتر ضعف قوس د ب، لأن قوس د ب أقلّ من ربع دائرة، فوتر ضعف قوس جـ ه أعظم من وتر ضعف قوس ه م، فضعف قوس جـ ه أعظم من ضعف قوس ه م وقوس جـ ه أعظم من قوس ه م، فقوس جـ ه أعظم من قوس جـ س. وكذلك تبين أن قوس جـ ز أعظم من قوس جـ ع. ونسبة وتر ضعف قوس ز جـ إلى وتر ضعف قوس جـ ه كنسبة وتر ضعف قوس ع جـ إلى وتر ضعف قوس جـ س. وضعف قوس ز جـ أعظم من ضعف قوس جـ ع وضعف قوس جـ ه أعظم من ضعف قوس جـ س، فزيادة ضعف ⟨قوس⟩ جـ ز على ضعف قوس جـ ه التي هي ضعف قوس ز ه أعظم من زيادة ضعف قوس ع جـ على ضعف قوس جـ س التي ⟨هي⟩ ضعف قوس ع س، فقوس ز ه أعظم من قوس ع س، كما تبين في الشكل الثالث من هذه المقالة، وتكون نسبة زيادة ضعف قوس ز جـ على ضعف قوس ز ه إلى ضعف قوس جـ ه أعظم من نسبة زيادة ضعف قوس ع جـ على ضعف قوس جـ س إلى ضعف قوس جـ س، كما تبين في الشكل الثالث أيضًا. وزيادة ضعف قوس ز جـ على ضعف قوس جـ ه هي مساوية لضعف قوس جـ ه لأن هذه القسي متساوية بالفرض، فزيادة ضعف قوس ع جـ على ضعف قوس جـ س هي أصغر من ضعف قوس جـ س، فضعف قوس ع س أصغر من ضعف قوس س جـ، فقوس ع س أصغر من قوس س جـ.

فأما القسي الباقية فإنها تبين كما نصف.

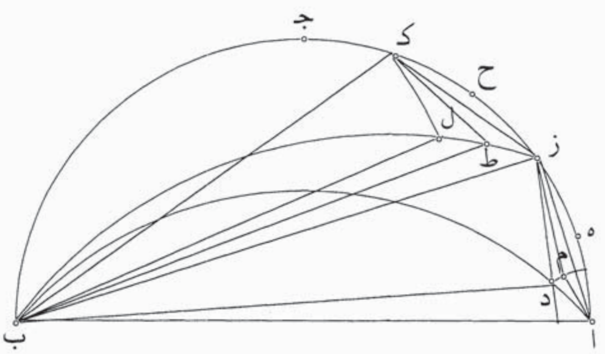
نخط خطًا مستقيمًا مساويًا لقطر دائرة ا د جـ وليكن ا ب. وندير عليه نصف دائرة ولتكن ا جـ ب؛ فتكون مساوية لقوس ا د جـ. ونقسمها بنصفين

3 ع جـ: ح جـ – 10 جـ س: ه س – 11 ونسبة: فنسبة – 18 ز ه: جـ ه.

على نقطة جـ، فتكون قوس ا جـ مساوية لقوس جـ د، التي في الصورة الأولى. ونرسم على خط ا ب أيضًا قوسًا شبيهة بضعف قوس جـ ي التي هي الميل الأعظم، ولتكن ا د ب، فتكون قوس ا د ب هي ضعف ميل قوس ا جـ. ولتكن نقطة جـ نظيرة جـ في الصورة الأولى التي هي نقطة التقاطع، فتكون نقطة ا نظيرة نقطة د من الصورة الأولى. ولتكن قوسا ا ه ه ز متساويتين وكل واحدة منهما مساوية لكل واحدة من الأجزاء المتساوية التي قسمت بها قوس جـ د. فتكون قوس ا ه مساوية لقوس د ط من الصورة الأولى، وقوس ه ز مساوية لقوس ط ح من الصورة الأولى. ونصل ب ز. فلأن قوس ا جـ ب نصف دائرة وقوس ا جـ ربع دائرة، يكون خط ا ب هو وتر ضعف قوس ا جـ. ولأن قوس ا ز ضعف قوس ا ه، تكون قوس ب جـ ز ضعف قوس جـ ه، فيكون خط ب ز هو وتر ضعف قوس جـ ه؛ وخط ب ز أصغر من خط ب ا لأن قوس ا جـ ب نصف دائرة. فإذا جعلنا نقطة ب مركزاً وأدرنا ببعد خط ب ز قوساً من دائرة فهي تقطع خط ا ب فيما بين نقطتي / ا ب. وإذا كانت ٤٠١-ظ
تقطع خط ا ب فيما بين نقطتي ا ب، فإنها تقطع قوس ا د ب، فلتقطعها على نقطة د. ونصل ب د، فيكون مساوياً لخط ب ز. فتكون نسبة ا ب إلى ب ز هي نسبة ا ب إلى ب د؛ ونسبة ا ب إلى ب ز هي نسبة وتر ضعف قوس ا جـ إلى وتر ضعف قوس جـ ه، فهي نسبة وتر ضعف ميل قوس ا جـ إلى وتر ضعف ميل قوس جـ ه من الصورة الثانية، فنسبة ا ب إلى ب د الذي هو مساوٍ لـ ب ز، هي نسبة وتر ضعف ميل قوس ا جـ إلى وتر ضعف ميل قوس [ا جـ إلى وتر ضعف ميل قوس] جـ ه. وكل قوسين متشابهتين يخرج فيهما وتران، فتكون نسبة وتر إحدى القوسين إلى الوتر الذي خرج فيها كنسبة وتر القوس الأخرى إلى الوتر الذي خرج فيها. فإن الوترين الخارجين في القوسين المتشابهتين تفصلان منها قوسين متشابهتين. وقوس ب د ا شبيهة بضعف ميل قوس ا جـ. ونسبة ا ب إلى ب د كنسبة وتر ضعف ميل قوس ا جـ إلى وتر ضعف ميل قوس جـ ه. فقوس ب د شبيهة بضعف ميل قوس جـ ه، أعني ضعف قوس جـ ز من الصورة الأولى التي هي مساوية لقوس ط ز

3 ا د ب (الثانية): ا ر ب – 6 منهما: منها – 17 ميل: مثل – 24 ميل (الأولى والثانية): مثل.

– التي هي ميل قوس ط جـ المساوية لقوس جـ ه من الصورة الثانية. وقوس ا د ب شبيهة بضعف قوس جـ ي من الصورة الأولى، وقوس د ب شبيهة بضعف قوس جـ و من الصورة الأولى. فتبقى قوس ا د شبيهة بضعف قوس ي و من الصورة الأولى، فنصف قوس ا د شبيهة بقوس ي و من الصورة الأولى.



ونرسم على خط ب ز المساوي لخط ب د قوسًا مساوية لقوس ب د، ولتكن قوس ب ط ز. ولتكن قوسا ز ح ح كـ مساويتين لكل واحدة من أجزاء قوس جـ د من الصورة الأولى، فتكون قوس ز كـ مساوية لقوس ا ز. ونصل خطوط ا ز ا د د ز ز كـ ب كـ، ونفصل من قوس ب ط ز قوس ز ط مساوية لقوس ا د، ونصل خطوط ب ط ز ط كـ ط. فلأن قوس ب جـ كـ أصغر من قوس ب جـ ز بقوس ز كـ المساوية لقوس ا ز، تكون زاوية ب ز كـ أصغر من زاوية ب ا ز بزاوية ا ب ز، ولأن قوس ب ط ز مساوية لقوس ب د وقوس ز ط مساوية لقوس ا د، يكون قوس ب ط أصغر من قوس ب د بقوس ا د، فتكون زاوية ب ز ط أصغر من زاوية ب ا د بزاوية ا ب د. فتبقى زاوية كـ ز ط أصغر من زاوية ز ا د بزاوية د ب ز. ونجعل زاوية د ا م مثل زاوية د ب ز، فتبقى زاوية ز ا م مثل زاوية كـ ز ط. ونجعل نقطة ا مركزاً وندير ببعد ا د قوسًا من دائرة، فهذه القوس تقع في داخل زاوية ا د ز لأن زاوية ا د ز منفرجة. وذلك أن خط د ب مساوٍ لخط ب ز، فزاوية ب د ز حادة، وإذا أخرج خط ب د على استقامة في جهة د، كانت الزاوية الخارجة

1 وقوس: فقوس – 3 جـ و: جـ د، كثيراً ما كتب الواو دالاً، ولن نشير إليها فيما بعد – 8 ا ز: ا ب – 14 ا د: ا ر.

منفرجة؛ وخط ب د إذا أخرج في جهة د، فهو يقطع زاوية ا د ز، فزاوية ا د ز منفرجة؛ فالقوس التي تدار على مركز ا وببعد ا د تقع في داخل زاوية ا د ز، فهي تقطع خط ا م إذا خرج ا م على استقامة؛ ولتقطع هذه القوس خط ا م على نقطة م. فلأن خط ا م في داخل زاوية ز ا د والقوس التي <تمر> بنقطتي د م في داخل زاوية ا د ز، تكون نقطة م في داخل مثلث ز ا د. ونصل خط ز م، فيكون هذا الخط في داخل مثلث ز ا د، فزاوية ا ز م أصغر من زاوية ا ز د. فلأن قوس ا ز مثل قوس ز ك، يكون خط ا ز مثل خط ز ك؛ وخط ا د مثل خط ا م، فخط ا م مثل خط ز ط. فخطا ز ا ا م مثل خطي ك ز ز ط، وزاوية ز ا م قد تبين أنها مثل زاوية ك ز ط، فخط ز م مثل خط ط ك ومثلث ز ا م مساوٍ لمثلث ك ز ط، فزاوية ا ز م مساوية لزاوية ز ك ط؛ وزاوية ا ز م أصغر من زاوية ا ز د، فزاوية ز ك ط أصغر من زاوية ا ز د. ولأن قوس ب جـ ز أصغر من قوس ب جـ ا، تكون زاوية ب ك ز أعظم من زاوية ب ز ا؛ وقد تبين أن زاوية ز ك ط أصغر من زاوية ا ز د، فتبقى زاوية ب ك ط أعظم من زاوية / ب ز د. ولأن قوس ا ز مثل قوس ز ك وقوس ا د ٤٠٢-ظ
مثل قوس ز ط، تكون زاوية ا ب ز مثل زاوية ك ب ز وزاوية ا ب د مثل زاوية ط ب ز، فتبقى زاوية د ب ز مثل زاوية ك ب ط. وقد تبين أن زاوية ب ك ط أعظم من زاوية ب ز د، فتبقى زاوية ز د ب أعظم من زاوية ك ط ب. وزاوية ز د ب مساوية لزاوية ب ز د، لأن خط ب ز مساوٍ لخط ب د، فزاوية ب ز د أعظم من زاوية ك ط ب. وقد كانت زاوية ب ك ط أعظم من زاوية ب ز د، فزاوية ب ك ط أعظم بكثير من زاوية ب ط ك، فخط ب ط أعظم من خط ب ك. فإذا جعلنا نقطة ب مركزاً وأدرنا عليها ببعد ب ك قوساً من دائرة، فإنها تقطع خط ب ط فيما بين نقطتي ب ط. وإذا كانت تقطع خط ب ط فيما بين نقطتي ب ط، فهي تقطع قوس ب ط فيما بين نقطتي ب ط، فلتقطع هذه القوس التي مركزها نقطة ب قوس ب ط على نقطة ل؛ فنقطة ل فيما بين نقطتي ب ط، فتكون قوس ز ل أعظم من قوس ز ط، فتكون قوس ا د أصغر من قوس ز ل. ونصل خط ب ل، فيكون

4 التي: الذي – 7 ا ز (الثانية): ا د – 9 ز ا م: ا م – 10 ز ك ط: د ك ط – 14 ب ك ط: مطموسة / ا ز: ا د – 15 ز ط: د ط.

مساوياً لخط ب د، فتكون نسبة خط ب ز إلى خط ب ك هي نسبة خط ب ز إلى خط ب ل؛ وخط ب ز هو وتر ضعف قوس جـ ه، ولأن قوس ب جـ ز ضعف قوس جـ ه وقوس ك ز ضعف قوس ز ه، تكون قوس ب جـ ك ضعف قوس جـ ز؛ فيكون خط ب ك هو وتر ضعف قوس جـ ز، فتكون نسبة خط ب ز إلى خط ب ل هي نسبة وتر ضعف قوس ه جـ إلى وتر ضعف قوس جـ ز، فنسبة خط ب ز إلى خط ب ل هي نسبة وتر ضعف ميل قوس جـ ه من الصورة الثانية إلى وتر ضعف ميل قوس جـ ز. وميل قوس ه جـ هو قوس جـ و من الصورة الأولى وميل قوس جـ ز هو قوس جـ ص من الصورة الأولى. فنسبة خط ب ز إلى خط ب ل هي نسبة وتر ضعف قوس جـ و إلى وتر ضعف قوس جـ ص. وقوس ب ل ز هي شبيهة بضعف قوس جـ و، لأنها مساوية لقوس ب د، فقوس ب ل هي شبيهة بضعف قوس جـ ص، فتبقى قوس ز ل شبيهة بضعف قوس ص و، فنصف قوس ز ل هي شبيهة بقوس ص و، ونصف قوس ا د هي شبيهة بقوس و ي؛ وقد تبين أن قوس ا د أصغر من قوس ز ل، فقوس ي و أصغر من قوس و ص.

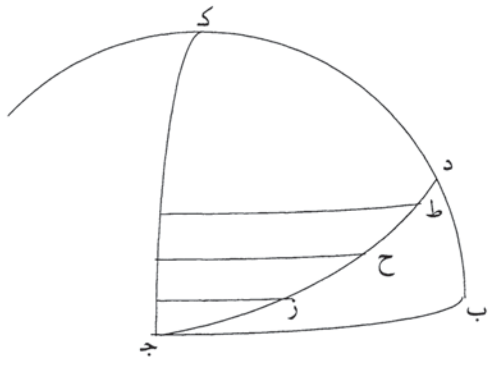
وكذلك تبين أن قوس و ص أصغر من قوس ص ع، إذا عملنا على خط ب ك قوساً مساوية لقوس ب ل وفصلنا من قوس ك جـ قوساً مساوية لقوس ك ز وتممنا العمل على مثل ما تقدم.

وكذلك تبين أيضًا أن قوس ص ع أصغر من قوس ع س؛ وقد تبين أن قوس ع س أصغر من قوس س جـ.

فقد تبين مما بيناه أن قوس ي و أصغر من قوس و ص، وأن قوس و ص أصغر من القوس التي تليها، وكذلك جميع القسي الباقية، كل واحدة منها أصغر من التي تليها.

فإذا قسمت قوس جـ د التي من الصورة الأولى بأجزاء متساوية كم كانت، صغرت الأجزاء أو عظمت، فإن تفاضل ميولها تكون مختلفة، ويكون أصغرها مما يلي نقطة د التي عند نهاية الميل، ويكون أعظمها مما يلي نقطة جـ التي هي نقطة التقاطع، ويكون جميع القسي الباقية ما قرب منها من تفاضل ميولها التي تلي نقطة د أصغر من تفاضل ما بعد؛ وذلك ما <أردنا> أن نبين./

16 مساوية (الأولى): مساويا.



وسيتبين مما بيناه أن كل قوسين متساويتين متتاليتين تفصلان من قوس ٤٠٢-و جـ د، وأن تكونا جزأين من قوس جـ د ‹مشاركتين أو› لا مشاركتين لها، ولم تكونا طرفي لقوس جـ د، فإن فضل ميل أبعدها عن نقطة التقاطع أصغر من فضل ميل القوس التي تليها هي أقرب إلى نقطة التقاطع.

وذلك أن البرهان على كل قوسين متساويتين متتاليتين هو البرهان الذي بيناه لأنه ليس يحتاج في هذا البرهان إلى مشاركة القوس لجميع الربع، ولا يحتاج أيضًا إلى أن يكون طرف إحدى القوسين طرفًا للربع. فكل قوسين متساويتين متتاليتين ينفصلان من ربع دائرة مائلة على دائرة أخرى، فإن فضلي ميلي القوسين المتساويتين مختلفان وأصغرهما الذي يلي نهاية الميل الأعظم.

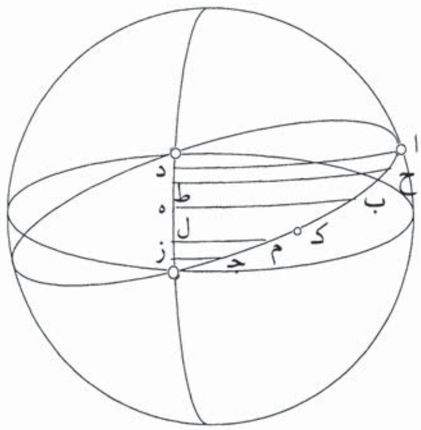
‹و› وإذ قد تبين جميع ذلك، فإنا نقول: إن كل قوسين تفصلان من ربع دائرة مائلة على دائرة أخرى، مشاركتين كانتا لربع الدائرة أو غير مشاركتين، متصلتين كانت القوسان أو مفترقتين، متساويتين كانتا أو مختلفتين، فإن نسبة أبعدهما عن نقطة التقاطع بين الدائرتين، المائلة إحداهما على الأخرى، إلى أقربهما هي أعظم من نسبة فضل ميل أبعدهما إلى فضل ميل أقربهما.

مثال ذلك: قوسا ا ب ب جـ فصلتا من ربع دائرة، مائلة على دائرة أخرى، وقوس ا ب أبعد عن نقطة التقاطع من قوس ب جـ، وقوس د ه هي فضل ميل قوس ا ب وقوس ه ز هي فضل ميل قوس ب جـ.

3 طرفي: طرفا – 7 للربع: الربع – 9 مختلفان: مختلفتين.

فأقول: إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ هي أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

برهان ذلك: أن قوسي ا ب ب جـ إما أن تكونا مشتركتين أو غير مشتركتين.



〈فإن كانتا مشتركتين〉، فهما تنقسمان بالجزء الذي يقدرهما إلى أجزاء متساوية. فإذا فصلت قوسا د ه ه ز بالقسي التي هي فضول ميول تلك الأجزاء، كانت أقسام قوسي د ه ه ز مختلفة وكان عدد ما في قوس د ه من الأقسام كعدد ما في قوس ا ب من الأجزاء المتساوية، وكان عددها في قوس ه ز من الأقسام كعدد ما في قوس ب جـ من الأجزاء المتساوية، وكان ما قرب من نقطة ز من أجزاء قوس د ز أصغر مما بعد. فيكون أجزاء قوس د ه أصغر من أجزاء قوس ه ز. فتكون نسبة عدد أجزاء قوس د ه إلى عدد أجزاء قوس ه ز أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز، لأن نسبة الأعداد بعضها إلى بعض هي نسبة الأجزاء المتساوية؛ وأجزاء قوس د ه مختلفة وكل واحد منها أصغر من كل واحد من أجزاء قوس ه ز، فنسبة عدد أجزاء قوس د ه إلى عدد أجزاء قوس ه ز أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز. ونسبة عدد أجزاء قوس د ه إلى عدد أجزاء قوس ه ز هي نسبة عدد أجزاء قوس ا ب المتساوية إلى عدد أجزاء قوس ب جـ المتساوية، فنسبة عدد أجزاء

قوس ا ب إلى عدد أجزاء قوس ب جـ هي نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، لأن أجزاء قوسي ا ب ب جـ متساوية، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

وإن كانت قوسا ا ب ب جـ غير مشتركتين، فإنا نقول أيضًا إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ هي أعظم من نسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.

برهان ذلك: أنه إن لم يكن كذلك، فإن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ إما مساوية لنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز وإما أصغر.

فليكن أولاً نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ مساوية لنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز. ونقسم قوس ا ب بأجزاء متساوية كم شئنا، ونأخذ من تلك الأجزاء مقدار أصغر / من قوس ب جـ، ولتكن قوس ح ب. ولتكن قوس ٤٠٣-و
ط ه هي فضل ميل قوس ح ب، فتكون نسبة ا ح إلى ح ب أعظم من نسبة د ط إلى ط ه، كما تبين في القسم الأول من هذا الشكل. وتكون بالتركيب أيضًا نسبة ا ب إلى ب ح أعظم من نسبة د ه إلى ه ط. فتكون نسبة ط ه إلى ه د أعظم من نسبة ح ب إلى ب ا. ونسبة د ه إلى ه ز هي بالفرض كنسبة ا ب إلى ب جـ، فنسبة ط ه إلى ه ز أعظم من نسبة ح ب إلى ب جـ. ولتكن نسبة ط ه إلى ه ز كنسبة ح ب إلى ب ك. ونفصل من ب جـ أجزاء متساوية ومساوية للأجزاء التي في قوس ح ب إلى أن تنتهي الأجزاء إلى مقدار هو أعظم من قوس ب ك وأصغر من قوس ب جـ. فإن كانت قوس ك جـ أصغر من الجزء الواحد من الأجزاء التي في ح ب، جزئنا الأجزاء التي في ح ب بأجزاء صغار إلى أن يصير كل واحد منها أصغر من ك جـ، ونأخذ من ب جـ مقداراً من الأجزاء الصغار يكون أصغر من ب جـ وأعظم من ب ك؛ وليكن ذلك المقدار مقدار ب م. وليكن ه ل هو فضل ميل قوس ب م، فتكون قوس ه ل أصغر من قوس ه ز، لأن ه ز هي فضل ميل قوس ب جـ التي هي أعظم من ب م، وتكون نسبة قوس ح ب إلى قوس ب م أعظم من نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ل؛ ونسبة قوس ط ه إلى قوس ه ز أعظم من نسبة قوس ح ب إلى قوس ب م، لأنها كنسبة ح ب إلى ب ك، فيكون نسبة ط ه

4 مشتركتين: مشتركين – 10 ولتكن: كتب بعدها «تلك الاجزاء»، ثم ضرب عليها بالقلم / ح ب: حـ ب – 13 ب ح: ب جـ.

إلى ه ز أعظم من نسبة ح ب إلى ب م. ونسبة ح ب إلى ب م أعظم من نسبة ط ه إلى ه ل، فنسبة ط ه إلى ه ز أعظم بكثير من نسبة ط ه إلى ه ل، فقوس ه ز أصغر من قوس ه ل؛ وهذا محال. فليس نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة د ه إلى ه ز.

وإن كانت نسبة ا ب إلى ب جـ أصغر من نسبة د ه إلى ه ز، تكون نسبة ط ه إلى ه د أعظم من نسبة ح ب إلى ب ا. ونسبة د ه إلى ه ز أعظم من نسبة ا ب إلى ب جـ، فتكون نسبة ط ه إلى ه ز أعظم بكثير من نسبة ح ب إلى ب جـ. فنجعل نسبة ح ب إلى ب ك كنسبة ط ه إلى ه ز، وتمام البرهان على مثل ما تقدم، فتكون قوس ه ز أصغر من قوس ه ل؛ وهذا محال.

فليس نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة د ه إلى ه ز ولا أصغر منها، فنسبة ا ب إلى ب جـ أعظم من نسبة د ه إلى ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

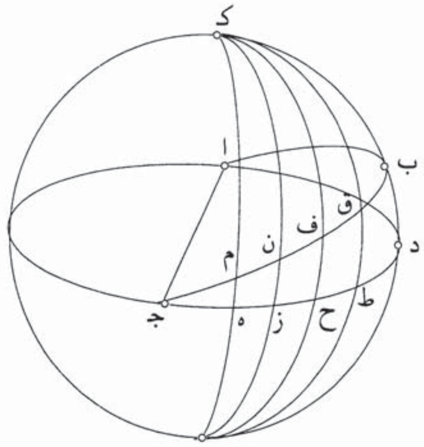
وتكون النسبة بالتركيب أيضًا كذلك.

وبهذا البرهان نبين إن كانت قوسا ا ب ب جـ مفترقتين، لأن فضول ميول القسي المتفرقة أيضًا مختلفة، وما كان منها أبعد عن نقطة التقاطع، تكون ميولها أصغر.

<ز> وأيضًا، فلتكن دائرتان عظيمتان تتقاطعان في كرة، ولتكونا دائرتي ا ب جـ ا د جـ، وليكن كل واحدة من قوسي جـ ب جـ د ربع دائرة. ونجيز على نقطتي ب د ربع دائرة عظيمة، ولتكن ب د ك. فهذه الدائرة تمرّ بأقطاب دائرتي ا ب جـ ا د جـ، فليكن قطب دائرة ا د جـ نقطة ك. ولنقسم قوس جـ ب بأقسام متساوية ولتكن جـ م م ن ن ف ف ق ق ب. ونجيز على مواضع القسمة وعلى نقطة ك دوائر عظام، ولتكن ه م ك ز ن ك ح ف ك ط ق ك؛ ولتكن نقط ه ز ح ط على قوس جـ د. فإذا كانت دائرة جـ د ا دائرة معدل النهار، كانت القسي التي تنفصل منها بين الدوائر العظام التي تخرج من نقطة ك هي مطالع القسي المتساوية المنفصلة من قوس جـ ب في الفلك المستقيم.

11 د ه: د ز – 22-23 ه م ك ز ن ك ح ف ك ط ق ك: ك ه م ك ز ن ك ح ف ك ط ق – 23 جـ د ا: جـ د – 26 المستقيم: المستقيمة.

فأقول: إن قسي د ط ط ح ح ز ز ه ه جـ مختلفة وإن د ط أعظمها وإن ه جـ أصغرها، وما قرب من د ط أعظم مما بعد.



برهان ذلك: أن نسبة وتر ضعف قوس جـ م إلى وتر ضعف قوس م ن مؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ه إلى وتر ضعف قوس ه ز ومن نسبة وتر ضعف قوس ز كـ إلى وتر ضعف قوس كـ ن. ووتر ضعف قوس جـ م مساوٍ لوتر ضعف قوس م ن، فالنسبة المؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ه إلى وتر ضعف قوس ه ز ومن نسبة وتر ضعف قوس ز كـ إلى وتر ضعف <قوس> كـ ن هي نسبة التساوي. ووتر ضعف قوس ز كـ أعظم من وتر ضعف قوس كـ ن،/ لأن وتر ضعف قوس ز كـ هو القطر. وإذا كانت نسبة ٤٠٣-ظ
التساوي مؤلفة من نسبتين إحداهما نسبة أعظم إلى أصغر، فالنسبة الأخرى هي نسبة أصغر إلى أعظم، فوتر ضعف قوس جـ ه أصغر من وتر ضعف قوس ه ز، فضعف قوس جـ ه أصغر من ضعف قوس ه ز، فقوس جـ ه أصغر من قوس ه ز. وأيضًا، فإن نسبة وتر ضعف قوس جـ ن إلى وتر ضعف قوس ن ف مؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف قوس ز ح ومن نسبة وتر ضعف قوس ح كـ إلى وتر ضعف قوس كـ ف. ونسبة وتر ضعف قوس جـ ن إلى وتر ضعف قوس ن م مؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف قوس ز ه ومن نسبة وتر ضعف قوس ه كـ إلى وتر ضعف

قوس كـ م؛ ونسبة وتر ضعف قوس جـ ن إلى وتر ⟨ضعف⟩ قوس ن م هي بعينها نسبة وتر ضعف قوس جـ ن إلى وتر ضعف قوس ن ف، لأن قوس ن م مثل قوس ن ف. فالنسبة المؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف قوس ز ح ومن نسبة وتر ضعف قوس ح كـ إلى وتر ضعف قوس كـ ف هي النسبة المؤلفة من نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف ⟨قوس⟩ ز ه ومن نسبة وتر ضعف قوس ه كـ إلى وتر ضعف قوس كـ م. وقوس كـ ف أصغر من قوس كـ م، فوتر ضعف قوس كـ ف أصغر من وتر ضعف قوس كـ م، وقوس ح كـ مثل قوس ه كـ، فنسبة وتر ضعف قوس ح كـ إلى وتر ضعف قوس كـ ف أعظم من نسبة وتر ضعف قوس ه كـ إلى وتر ضعف قوس كـ م، فتبقى نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف قوس ز ح أصغر من نسبة وتر ضعف قوس جـ ز إلى وتر ضعف قوس ز ه، فوتر ضعف قوس ز ح أعظم من وتر ضعف قوس ز ه، فقوس ز ح أعظم من قوس ز ه.

وكذلك يتبين أن قوس ح ط أعظم من قوس ح ز، وقوس ط د أعظم من قوس ط ح.

وكذلك يتبين في كل قوسين متساويتين متصلتين تفصلان من قوس ب جـ، أن مطالعهما مختلفة، وأن مطالع أقرب القوسين إلى نقطة التقاطع تكون أصغر من مطالع ⟨أبعدهما⟩، كانت كل واحدة من القوسين المتساويتين بقدر ربع الدائرة أو لم تكن بقدرها، كانت مشاركة للدائرة أو لم تكن مشاركة لها. فالقسي المتساوية المتصلة التي تفصل من الدائرة المائلة، تكون مطالعها في الفلك المستقيم مختلفة وأقرب القسي المتساوية إلى نقطة التقاطع أصغرها مطالع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذ قد تبين ذلك فإن كل قوسين متصلتين تفصلان من ربع دائرة مائلة على دائرة معدل النهار، متساويتين كانتا أو مختلفتين، مشاركتين كانتا لربع الدائرة أو غير مشاركتين، نسبة أقربهما من نقطة التقاطع إلى أبعدهما عن نقطة التقاطع هي أعظم من نسبة مطالع أقربهما من نقطة التقاطع إلى مطالع أبعدهما عن نقطة التقاطع.

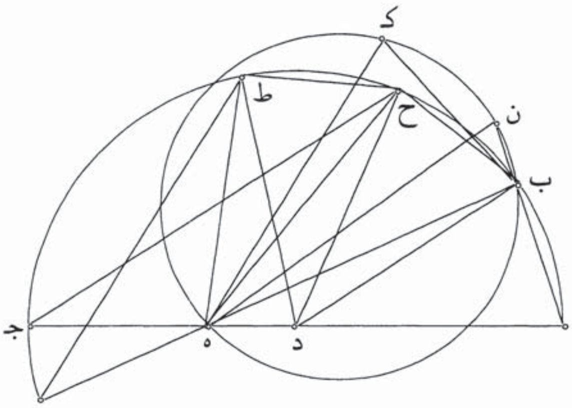
7 أصغر (الأولى): أعظم – 14 ح ز: ح د – 16 متصلتين: بنصفين – 17 مختلفة: مختلفين – 21 مختلفة: مختلف – 26 أقربهما: اقربها.

والبرهان على ذلك مثل البرهان على الشكل الذي قبل هذا الشكل الذي في نسبة القوسين وميلهما؛ ولكنه في ذاك نسبة أبعد القوسين عن نقطة التقاطع إلى أقربهما أعظم من نسبة فضل ميل أبعدهما إلى فضل ميل أقربهما، وهو في هذا الشكل نسبة أقرب القوسين من نقطة التقاطع إلى أبعدهما أعظم من نسبة مطالع أقربهما إلى مطالع أبعدهما. ويكون النسبتان بالتركيب أيضاً كذلك.

<ح> كل دائرة يخرج فيها قطر من أقطارها ويتعلم على القطر نقطة على غير المركز، ويخرج منها خطوط مستقيمة إلى محيط الدائرة، فتفصل من محيط الدائرة قسياً متساوية، يوتر كل واحدة منها خط هو أصغر من تمام القطر، فإن الزوايا التي تحدث عند النقطة المفروضة تكون مختلفة وتكون الزاوية التي تلي أعظم قسمي القطر أصغرها، وما قرب / من تلك ٤٠٤-و
الزاوية أصغر مما بعد.

مثاله: دائرة ا ب جـ خرج فيها قطر ا جـ والمركز د، وفرض على القطر نقطة كيفما اتفقت وهي نقطة ه، وخرج من نقطة ه خطوط ه ب ه ح ه ط، فكانت قسي ا ب ب ح ح ط متساوية وكل واحد من أوتارها أصغر من خط ه جـ.

فأقول: إن زاوية ا ه ب أصغر من زاوية ب ه ح وإن زاوية ب ه ح أصغر من زاوية ح ه ط.



9 واحدة: واحد.

برهان ذلك: أنا نصل خطوط د ب د ح د ط ا ب ب ح ح ط. فلأن قسي ا ب ب ح ح ط متساوية، يكون مثلثات ا د ب ب د ح ح د ط متساوية الزوايا، فزوايا د ا ب د ب ا د ح ب ‹د ب ح› د ح ط د ط ح جميعها متساوية، وزاوية ه ح ب أعظم من زاوية د ح ب، فزاوية ه ح ب أعظم من زاوية ه ا ب. ونصل ح جـ، فيكون شكل ا ب ح جـ ذا أربعة أضلاع في دائرة، فزاوية جـ ا ب مع زاوية جـ ح ب مساويتان لقائمتين، فزاوية ه ا ب مع زاوية ه ح ب أصغر من قائمتين، فزاوية ه ح ب أعظم من زاوية ه ا ب ومجموعهما أصغر من قائمتين. ونعمل على خط ه ب زاوية ه ب ك مساوية لزاوية ه ا ب. فزاوية ه ا ب حادة، فزاوية ه ب ك حادة. فنجعل خط ه ك مساوياً لخط ه ب، فتكون زاوية ه ك ب مساوية لزاوية ه ب ك؛ وندير على مثلث ه ب ك دائرة ب ك ه، فتكون زاوية ب ك ه مع الزاوية التي تقع في قطعة ه ب المقابلة لها مساويتين لقائمتين؛ وزاوية ب ك ه مع زاوية ه ح ب أصغر من قائمتين، لأن ‹زاوية› ب ك ه مساوية لزاوية ه ا ب، فزاوية ه ح ب أصغر من الزاوية التي تقبلها قطعة ه ب. فالقطعة من دائرة ب ك ه التي تقبل زاوية مساوية لزاوية ه ح ب هي أعظم من قطعة ه ب؛ وزاوية ه ح ب أعظم من زاوية ه ب ك لأنها أعظم من زاوية ه ا ب المساوية لزاوية ه ب ك. ولأن زاوية ه ح ب أعظم من زاوية ه ب ك، تكون القطعة من دائرة ب ك ه التي تقبل زاوية مساوية لزاوية ه ح ب أصغر من قطعة ه ب ك؛ ولأن قطعة ه ب ك أعظم من نصف دائرة، فالقطعة من دائرة ب ك ه التي تقبل زاوية مثل زاوية ه ح ب هي أعظم من قطعة ه ب وأصغر من قطعة ه ب ك. فلتكن قطعة القطعة التي تقبل زاوية مثل زاوية ه ح ب هي قطعة ه ب ن. ونصل ه ن ب ن، فتكون زاوية ه ن ب مثل زاوية ه ك ب لأنهما في قطعة واحدة. وزاوية ه ك ب مثل زاوية ه ب ك، فزاوية ه ن ب مثل زاوية ه ب ك؛ وزاوية ه ب ن أعظم من زاوية ه ب ك، فزاوية ه ب ن أعظم من زاوية ه ن ب، فخط ه ن أعظم من خط ه ب. وإذا أدير على مثلث ه ح ب دائرة، كانت القطعة من تلك الدائرة التي يفصلها خط ه ب شبيهة

5 ذا: ذو – 6 مساويتان: مساويتين – 20 ه ح ب: ه ح ف.

بقطعة ه ب ن، وخط ه ب الذي هو قاعدة تلك القطعة أصغر من خط ه ن الذي هو قاعدة قطعة ه ب ن. فالدائرة التي تحيط بمثلث ه ح ب أصغر من دائرة ب ک ه ودائرة ب ک ه مساوية للدائرة التي تحيط بمثلث ا ه ب، لأن خط ه ب يفصل من الدائرة المحيطة بمثلث ا ه ب قطعة شبيهة بقطعة ب ک ه التي يفصلها خط ه ب بعينه. فدائرة ب ک ه مساوية للدائرة التي تحيط بمثلث ا ه ب، فالدائرة التي تحيط بمثلث ا ه ب أعظم من الدائرة التي تحيط بمثلث ه ب ح. والزوايا التي عند نقطة ه كل واحدة منها هي زاوية حادة، لأن كل خط يخرج من نقطة ه إلى محيط الدائرة هو أعظم من خط ه جـ، وخط ه جـ أعظم من كل واحد من خطوط ا ب ب ح ح ط، فخط ه ب أعظم من خط ب ا، فزاوية ه ا ب أعظم من زاوية ا ه ب؛ وزاوية ه ا ب حادة، فزاوية ا ه ب / ٤٠٤-ظ حادة. وكذلك خط ه ح أعظم من خط ه ب، فزاوية ه ب ح أعظم من زاوية ب ه ح؛ وزاوية ه ب ح حادة، فزاوية ب ه ح حادة. وكذلك يتبين في جميع الزوايا التي عند نقطة ه، فالزوايا التي عند نقطة ه <كل> واحدة منها هي زاوية حادة. فالقوس من الدائرة المحيطة بمثلث ا ه ب التي توتر زاوية ا ه ب هي أصغر من نصف دائرة، وكذلك القوس من الدائرة المحيطة بمثلث ه ب ح التي توتر زاوية ب ه ح هي أصغر من نصف دائرة، فالقوس التي يفصلها خط ا ب من الدائرة المحيطة بمثلث ا ه ب وهي التي توتر زاوية ا ه ب هي أصغر من نصف دائرة، والقوس التي يفصلها خط ب ح من الدائرة المحيطة بمثلث ب ه ح وهي التي توتر زاوية ب ه ح هي أصغر من نصف دائرة. وخط ا ب مساوٍ لخط ب ح والدائرة المحيطة بمثلث ا ه ب أعظم من الدائرة المحيطة بمثلث ب ه ح، فالقوس التي يفصلها خط ا ب من الدائرة المحيطة بمثلث ا ه ب التي توتر زاوية ا ه ب أصغر من الشبيهة بالقوس التي يفصلها خط ب ح من الدائرة المحيطة بمثلث ب ه ح التي توتر زاوية ب ه ح، فزاوية ا ه ب أصغر من زاوية ب ه ح.

وأيضًا، فإنا نخرج خط ب ه إلى محيط الدائرة، وليكن خط ب ه ز؛ ونصل ط ز، فيكون شكل ب ح ط ز ذا أربعة أضلاع في دائرة، فزاوية

4 المحيطة: المحيط – 9 واحد: واحدة / أعظم: متآكلة – 26 ذا: ذو.

ح ب ز مع زاوية ح ط ز مساويتان لقائمتين، فزاوية ه ب ح مع زاوية ه ط ح أصغر من قائمتين؛ وزاوية ه ط ح أعظم من زاوية د ط ح المساوية لزاوية د ب ح ؛ وزاوية د ب ح أعظم من زاوية ه ب ح، فزاوية ه ط ح أعظم من زاوية ه ب ح، فمثلثا ب ه ح ح ه ط زاوية ه ط ح من الثاني منهما أعظم من زاوية ه ب ح من الأول منهما ؛ وزاوية ه ب ح مع زاوية ه ط ح أصغر من قائمتين. فيتبين في هذين المثلثين مثل ما تبين في مثلثي ا ه ب ب ه ح أن زاوية ب ه ح أصغر من زاوية ح ه ط . وكذلك جميع الزوايا تتلوا هذه الزوايا إلى أن تنتهي القسي المتساوية إلى نقطة جـ، إن كانت قوس ا ب بقدر قوس ا ب جـ، أو تنتهي القسي المتساوية إلى قوس هي أصغر من قوس ا ب تلي نقطة جـ.

فتبين من ذلك أن الزوايا التي عند نقطة ه تكون مختلفة على الصفة التي بيناها ، كانت كل واحدة من القسي المتساوية التي تنفصل على قوس ا ب جـ بقدر قوس ا ب جـ أو لا بقدرها ، كانت مشاركة لها أو لم تكن مشاركة لها ؛ ويتبين أيضًا بالبرهان الثاني الذي ذكرناه في زاويتي ب ه ح ح ه ط أن الزوايا التي عند نقطة ه تكون مختلفة، وإن لم تكن القسي المتساوية مبتدئة من نقطة ا .

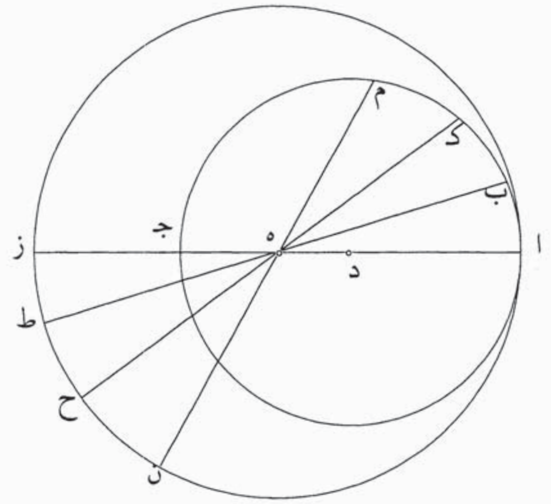
فكل دائرة يخرج فيها قطر من أقطارها ، ويتعلم عليه نقطة على غير المركز، ويخرج من النقطة خطوط مستقيمة إلى محيط الدائرة تفصل من محيط الدائرة قسيًا متساوية، يوتر كل واحدة منها خط هو أصغر من تمام القطر، فإن الزوايا التي تحدث عند النقطة المفروضة تكون مختلفة، وأصغرها التي تلي جهة المركز وما قرب من تلك الزاوية أصغر مما بعد ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

< ط > وسيتبين مما بيناه أنه إن أدير على مركز ه دائرة، كانت القسي التي تفصلها الخطوط المستقيمة الخارجة من نقطة ه من محيط الدائرة التي مركزها نقطة مختلفة، تكون / التي تلي قطر ا جـ منها أصغر من التي تليها ، ٤٠٥-و
إذا كانت القسي التي تفصلها الخطوط الخارجة من نقطة ه من قوس ا ب جـ متساوية.

12 ا ب جـ: ا ب ح – 19 واحدة: واحد.

ولنعد دائرة ا ب جـ وليكن المركز د، ولتكن نقطة ه على غير المركز. ونديـر على مركز ه دائرة ا ط ز ونخرج من نقطة ه ثلاثة خطوط مستقيمة كيفما اتفق، ولتقطع دائرة ا ب جـ على نقط ب كـ م ولتقطع دائرة ا ط ن على نقط ط ح ن.

فأقول: إن نسبة قوس ب كـ إلى قوس كـ م أعظم من نسبة قوس ط ح إلى قوس ح ن، كانت قوسا ب كـ كـ م متساويتين أو كانتا مختلفتين، كانت كل واحدة منهما مشاركة لقوس ب ا جـ أو غير مشاركة لها، كانت القوسان متصلتين أو كانتا مفترقتين.



برهان ذلك: أنه إن كانت قوسا ب كـ كـ م مشتركتين، قسمناهما بالمقدار المشترك الذي يقدرهما، وأخرجنا من نقطة ه إلى مواضع القسمة خطوط مستقيمة وأخرجناها حتى تلقى دائرة ا ط ز، فتلك الخطوط تفصل من دائرة ا ط ز قسياً مختلفة، يكون ما قرب منها من نقطة آ أصغر مما بعد. فيتبين من ذلك أن نسبة قوس ب كـ إلى قوس كـ م أعظم من نسبة قوس ط ح إلى قوس ح ن. وإن كانت قوس ب كـ غير مشاركة لقوس كـ م، كان البرهان على أن نسبة قوس ب كـ إلى قوس كـ م أعظم من نسبة قوس ط ح إلى قوس ح ن هو البرهان المستعمل في شكل و بعينه، وهو أن تكون نسبة

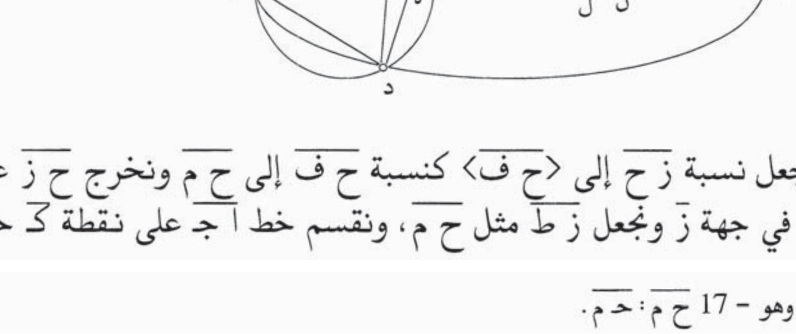
2 مركز ه: مركزه – 6 كانتا: كانت – 11 وأخرجناها: واخرجنا – 14 ح ن: ح ر.

ب كـ إلى كـ م إما مساوية لنسبة ط ح إلى ح ن أو أصغر. ويلزم من ذلك المحال الذي لزم في شكل و؛ فنسبة قوس ب كـ إلى قوس كـ م أعظم من نسبة قوس ط ح إلى قوس ح ن.

وكذلك إن كانت قوسا ب كـ كـ م مفترقتين غير متصلتين لأن القسي التي تنفصل من دائرة ا ط ن تكون مختلفة، ويكون ما يلي نقطة ا منها أصغر وإن كانت مفترقة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨ي⟩ وأيضًا، فليكن دائرة ا ب جـ معلومة وقد خرج فيها قطر ا جـ ⟨و⟩قطعة دائرة أصغر من نصف دائرة مثل قطعة ا د جـ، وكانت هذه القطعة قائمة على سطح دائرة ا ب جـ على زوايا قائمة، وكانت نسبة ز ح إلى ح ف معلومة.

ونريد أن نخرج في قطعة ا د جـ وتراً مثل وتر جـ د حتى إذا أخرجنا من طرفه عموداً على قطر ا جـ مثل عمود د ه، وأخرجنا من مسقط العمود عموداً على قطر ا جـ في سطح دائرة ا ب جـ مثل عمود ه ب، ووصلنا بين طرفه وبين طرف الوتر الأول بخط مثل خط ب د، كانت نسبة ب د إلى د جـ أعظم من نسبة ز ح إلى ح ف.



فنجعل نسبة ز ح إلى ⟨ح ف⟩ كنسبة ح ف إلى ح م ونخرج ح ز على استقامة في جهة ز ونجعل ز ط مثل ح م، ونقسم خط ا جـ على نقطة كـ حتى

14 وبين: وهو – 17 ح م: حـ م.

تكون نسبة ا ك إلى جـ ك كنسبة ط م إلى م ح، فيكون ا ك أعظم من ⟨جـ ك ويكون⟩ ط م أعظم من م ح؛ وذلك أن ط م مثل ز ح. ونعمل على خط ك جـ نصف ⟨دائرة في⟩ سطح قطعة ا د جـ، وليكن نصف دائرة ك د جـ، فهذا النصف يقطع قوس ⟨جـ د ا⟩. / ٤٠٥-ظ وذلك أنه إن أخرج من نقطة جـ مماس قطعة جـ د ا، فإنه يحيط مع خط جـ ا بزاوية حادة، لأنه يحيط معه بزاوية مساوية للزاوية التي تقع في بقية دائرة ا د جـ؛ وهذه البقية هي أعظم من نصف دائرة، فالزاوية التي تقع فيها هي زاوية حادة، فالخط المماس لقوس جـ د ا على نقطة جـ يحيط مع خط جـ ا بزاوية حادة، وكل خط يخرج من نقطة جـ ويحيط مع خط جـ ا بزاوية حادة، فإنه يقع في داخل قوس جـ د ك، فالخط المماس لقوس جـ د ا الذي يخرج من نقطة جـ يقع فيما بين قوس جـ د ا وقوس جـ د ك، فبعض قوس جـ د ك خارج عن قوس جـ د ا، ونقطة ك من قوس جـ د ك في داخل قوس جـ د ا، فنصف دائرة جـ د ك يقطع قوس جـ د ا، فليقطعها على نقطة د. ونصل جـ د ونخرج من نقطة د عموداً على خط جـ ك، وليكن د ه؛ ونخرج ه ب عموداً على خط جـ ا في سطح دائرة ا ب جـ ونصل ب د.

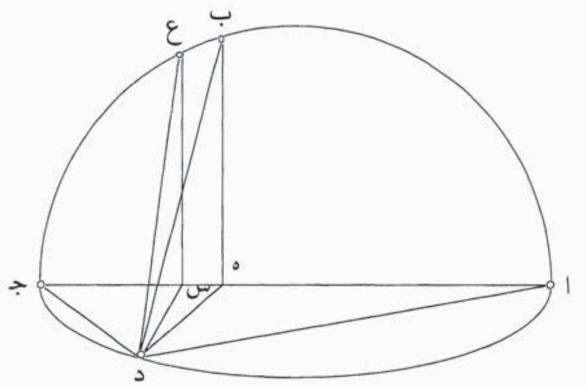
فأقول: إن نسبة ب د إلى د جـ أعظم من نسبة ز ح إلى ح ف.

برهان ذلك: أنا نفصل ا ل مثل ك جـ، فيكون نسبة ا ك إلى ك جـ كنسبة ز ح إلى م ح، وك جـ أعظم من جـ ه. فنجعل ا ن مثل جـ ه، فيكون ن ه أعظم من ل ك، فتكون نسبة ن ه إلى ك جـ أعظم من نسبة ل ك إلى ك جـ؛ وقد كانت نسبة ل ك إلى ك جـ كنسبة ز م إلى م ح. فنسبة ن ه إلى ك جـ أعظم من نسبة ز م إلى م ح؛ ونسبة ن ه إلى ك جـ هي نسبة ضرب ن ه في ه جـ إلى ضرب ك جـ في ه جـ، فنسبة ضرب ن ه في ه جـ إلى ضرب ك جـ في جـ ه أعظم من نسبة ز ح إلى م ح. وضرب ن ه في ه جـ هو زيادة ضرب ا ه في ه جـ على ضرب ا ن في ه جـ. وضرب ا ن في ه جـ هو مربع ه جـ لأن ا ن مثل ه جـ. فضرب ن ه في ه جـ هو زيادة ضرب ا ه في ه جـ على مربع ه جـ؛ وضرب ا ه في ه جـ هو مربع ه ب، فضرب ن ه في ه جـ هو زيادة مربع

1 جـ ك: جـ ح – 2 ⟨جـ ك ويكون⟩: تآكلت المخطوطة في هذا الموضع في هذه الورقة والأوراق التي بعدها– 3 ⟨دائرة في⟩: متآكلة – 4 ⟨جـ د ا⟩: ممحوة – 12 فنصف: لنصف – 18 ز ح: ز م – 26 وضرب: فضرب.

ب ه على مربع ه جـ. وضرب كـ جـ في جـ ه هو مربع جـ د، فنسبة ضرب ن ه في ه جـ إلى ضرب كـ جـ في جـ ه هو نسبة زيادة مربع ب ه على مربع ه جـ إلى مربع جـ د. وقد كانت نسبة ضرب ن ه في ه جـ إلى ضرب كـ جـ في جـ ه أعظم من نسبة ز م إلى م ح، فنسبة زيادة مربع ه ب على مربع ه جـ إلى مربع جـ د أعظم من نسبة ز م إلى م ح؛ وزيادة مربع ب ه على مربع ه جـ هي زيادة مربع ب د على مربع د جـ لأن د ه عمود على سطح دائرة ا ب جـ، فنسبة زيادة مربع ب د على مربع د جـ إلى مربع د جـ أعظم من نسبة ز م إلى م ح. وبالتركيب تكون نسبة مربع ب د إلى مربع د جـ أعظم من نسبة ز ح إلى ح م ‹التي› هي نسبة مربع ز ح إلى مربع ح ف، فنسبة مربع ب د إلى مربع د جـ أعظم من نسبة مربع ز ح إلى مربع ح ف، فنسبة ب د إلى د جـ أعظم من نسبة ز ح إلى ح ف؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وإن أردنا أن يكون خط د ه يحيط مع قطر ا جـ بزاوية حادة معلومة مما يلي نقطة ‹جـ، و›جـ د كـ الزاوية القائمة، وتكون نسبة ب د إلى د جـ أعظم من النسبة المفروضة، فإنا نعمل كما عملنا من قبل في الزاوية القائمة.



وليكن العمود د س والعمود الخارج من نقطة س إلى دائرة ا ب جـ عمود س ع. ‹ونصل ع د›، فتكون نسبة ع د إلى د جـ أعظم من النسبة ‹المفروضة› فيما تقدم. ثم نخرج من نقطة د خطًا يحيط مع ‹خط ا جـ›

16 ‹ونصل ع د›: متآكلة – 17 ‹المفروضة›: متآكلة / ‹خط ا جـ›: متآكلة.

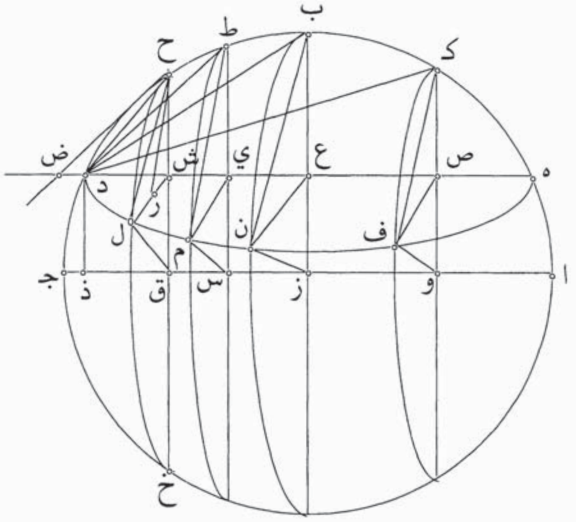
٤٠٦-و ‹بزاوية حادة› / مما يلي نقطة جـ، وليكن د ه. ونخرج من نقطة ه عموداً على خط ا جـ وليكن ه ب، فيكون عمود ه ب موازيًا لعمود س ع. ونصل ب د، فيكون أعظم من د ع، لأن قوس ا د جـ قائمة على قطعة دائرة ا ب جـ. وقوس جـ د أصغر من قوس د ا، فخط ب د أعظم من خط د ع، فنسبة ب د إلى د جـ أعظم من نسبة ع د إلى د جـ؛ ونسبة ع د إلى د جـ أعظم من النسبة المفروضة، فنسبة ب د إلى د جـ أعظم من النسبة المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وإذا رسمنا على خط ع د أو خط ب د قوسًا من دائرة مساوية لدائرة ا د جـ، كانت القوس التي على خط ع د أو خط ب د أعظم من قوس د جـ، لأن كل واحد من خطي ع د د ب أعظم من خط د جـ، فتكون نسبة القوس التي على خط ع د أو ب د إلى قوس د جـ من دائرة ا د جـ أعظم من نسبة وتر ع د ‹أو ب د› إلى وتر د جـ كما تبين في الشكل الأول من هذه المقالة، لأن القوس التي على وتر ع د أو ب د أصغر من قوس ا د، فتكون القوس المرسومة على وتر ع د أو ب د مع قوس د جـ أصغر من نصف دائرة. وإن كانت القوس المرسومة على خط ع د أو ب د من دائرة أصغر من دائرة ا د جـ، كانت أعظم من الشبيهة بالقوس التي من دائرة مساوية لدائرة ا د جـ، فتكون نسبة القوس التي على وتر ع د أو ب د إلى قوس د جـ أعظم بكثير من نسبة وتر ع د أو ب د إلى وتر د جـ. ونسبة وتر ع د أو ب د إلى وتر د جـ أعظم من النسبة المفروضة، كانت القوس المرسومة على خط ع د أو ب د من دائرة مساوية لدائرة ا د جـ أو من دائرة أصغر من دائرة ا د جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹**يا**› وأيضًا، فإنه إذا كانت دائرة ا ب جـ دائرة نصف النهار، وكان قطر ا جـ محور الكرة، وكانت نقطتا ا جـ قطبي الكرة، وكانت دائرة د ن ه مقنطرة من مقنطرات الارتفاع – أعني من الدوائر الموازية للأفق – وكانت موازية لأفق يمرّ بنقطتي ا جـ، وقطع هذه الكرة دوائر متوازية من الدوائر التي قطباها نقطتا ا جـ كدوائر ح ل ط م ب ن كـ ف وكانت ب ن منها دائرة

1 ‹بزاوية حادة›: متآكلة – 6 النسبة (الأولى): نسبة – 23 قطبي: قطبا.

معدل النهار، وكانت 〈أنصاف〉 أقطار هذه الدوائر خطوط ح ق ط س ب ز كـ و، وكان خط د ه الفصل المشترك بين مقنطرة د ن ه وبين دائرة نصف النهار وقطع هذا الخط أقطار الدوائر المتوازية على نقط ش ي ع ص، ووصلت خطوط ل ح م ط ن ب ف كـ ح د ط د ب د كـ د، فإن نسبة ل ح إلى ح د أعظم من نسبة م ط إلى ط د ونسبة م ط إلى ط د أعظم من نسبة ن ب إلى ب د ونسبة ن ب إلى ب د أعظم من نسبة ف كـ إلى كـ د.



برهان ذلك: أنا نصل خطوط ل ش م ي ن ع ف ص، فتكون هذه الخطوط هي الفصول المشتركة بين سطوح الدوائر المتوازية وبين سطح المقنطرة. ونصل خطوط ل ق م س ن ز ف و. فلأن الدوائر المتوازية قطباها نقطتا ا جـ، تكون مراكزها على خط ا جـ؛ ولأن الفصول المشتركة بين هذه الدوائر المتوازية وبين سطح دائرة ا ب جـ هي خطوط ح ق ط س ب ز كـ و، تكون هذه الدوائر المتوازية تقطع خط ا جـ على نقط ق س ز و، فهذه النقط هي مراكز هذه الدوائر وخطوط ل ق ح ق م س ط س ن ز ب ز ف و كـ و هي 〈أنصاف〉 أقطار هذه الدوائر؛ ولأن نقطتي ا جـ قطبا هذه الدوائر، يكون خط ا جـ عموداً على سطوح هذه الدوائر؛ ولأن مقنطرة د ن ه موازية للأفق

2 كـ و: كـ د – 3 وقطع: وقطبي – 9 ف و: ف د – 11 كـ و: كـ ز – 12 وَ: دَ، وكذلك فيما يلي – 13 ح ق: س ق – 15 د ن ه: د ب ه.

الذي يمرّ بنقطتي آ جـ، يكون خط د ه موازيًا لخط آ جـ لأنهما الفصلان المشتركان <للأفق الذي يمر بنقطتي آ جـ> ومقنطرة د ن ه وبين دائرة نصف النهار، فيكون خط د ه عموداً <على سطوح> الدوائر المتوازية. فتكون زوايا د ش ل د ش ح د ي م د ي ط د ع ن / <د ع ب د ص ف د ص ك> كل ٤٠٦-ظ واحدة منها هي زاوية قائمة، وتكون خطوط ق ش س ي ز ع و ص متساوية وأعمدة على سطح المقنطرة؛ أما أنها متساوية فلأنها متوازية ولأن خط د ه موازٍ لخط جـ آ؛ فأما أنها أعمدة على سطح المقنطرة، فلأنها هي الفصول المشتركة بين الدوائر المتوازية وبين دائرة نصف النهار. والدوائر المتوازية قائمة على سطح الأفق الذي يمرّ بنقطتي آ جـ، ودائرة نصف النهار أيضًا قائمة على ذلك الأفق. فهذه الفصول المشتركة أعمدة على سطح ذلك الأفق، وسطح المقنطرة موازٍ لسطح ذلك الأفق. فهذه الفصول أعمدة على سطح المقنطرة، <و>زوايا ق ش ل س ي م ز ع ن و ص ف كل واحدة منها هي زاوية قائمة، وخط ش ل أصغر من خط ي م وخط ي م أصغر من خط ع ن، فزاوية ش ق ل أصغر من زاوية ي س م وزاوية ي س م أصغر من زاوية ع ز ن. ونقط ق س ز هي مراكز الدوائر، فقوس ل ح أصغر من الشبيهة بقوس م ط وقوس م ط أصغر من الشبيهة بقوس ن ب. وإذا أخرجت هذه الدوائر المتوازية حتى تقطع المقنطرة في الجهة الأخرى، كانت القسي التي تنفصل من كل واحدة منها – فيما بين المقنطرة وبين قوس ه ب د – مساوية لنظيرتها من قسي ل ح م ط ن ب. فزاوية ح ل ش أصغر من زاوية ط م ي وزاوية ط م ي أصغر من زاوية ب ن ع وكل واحدة من زوايا ح ش ل ط ي م ب ع ن هي زاوية قائمة، فتبقى زاوية ل ح ش أعظم من زاوية م ط ي وزاوية م ط ي أعظم من زاوية ن ب ع. فنخط زاوية ش ح ر مساوية لزاوية ي ط م، فيكون مثلث ش ح ر شبيهاً بمثلث ي ط م، فتكون نسبة ر ح إلى ح ش كنسبة م ط إلى ط ي. وخط ل ح أعظم من خط ر ح لأن زاوية ل ر ح منفرجة، فتكون نسبة ل ح إلى ح ش أعظم من نسبة م ط إلى ط ي. وكذلك يتبين أن نسبة م ط إلى ط ي أعظم من نسبة ن ب إلى ب ع.

2 <للأفق الذي يمر بنقطتي آ جـ>: ممحوة تمامًا / د ن ه: د ب ه – 4 د ش ح: د ب ح – 5 و ص: ف ص – 13 ش ل: ل – 15 مراكز: مر – 21 ب ع ن: د ع ن.

وأيضًا، لأن زاوية ح د ش أعظم من زاوية ط د ش وزاويتا ح ش د ط ي د كل واحدة منهما هي زاوية قائمة، تكون زاوية د ط ي أعظم من زاوية د ح ش. فنجعل زاوية ش ح ض مساوية لزاوية د ط ي، فيكون مثلث ش ح ض شبيهًا بمثلث ي ط د، فتكون نسبة ش ح إلى ح ض كنسبة ي ط إلى ط د؛ وح ض أعظم من ح د لأن زاوية ح د ض منفرجة، فنسبة ش ح إلى ح د أعظم من نسبة ش ح إلى ح ض، فنسبة ش ح إلى ح د أعظم من نسبة ي ط إلى ط د، فنسبة ل ح إلى ح ش أعظم من نسبة م ط إلى ط ي ونسبة ش ح إلى ح د أعظم من نسبة ي ط إلى ط د، فنسبة ل ح إلى ح د أعظم بكثير من نسبة م ط إلى ط د. وكذلك تبين أن نسبة م ط إلى ط د أعظم من نسبة ن ب إلى ب د. وأيضًا، فإن عمود ك ص أصغر من عمود ب ع وعمود ص ف أصغر من عمود ع ن، فخط ك ف أصغر من خط ب ن، وخط ك د أعظم من خط ب د، فنسبة ن ب إلى ب د أعظم من نسبة ف ك إلى ك د.

فقد تبين أن نسبة خط ل ح إلى خط ح د أعظم من نسبة خط م ط إلى خط ط د ونسبة خط م ط إلى ط د أعظم من نسبة خط ن ب إلى خط ب د ونسبة خط ن ب إلى خط ب د أعظم ‹من نسبة› خط ف ك إلى خط ك د؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

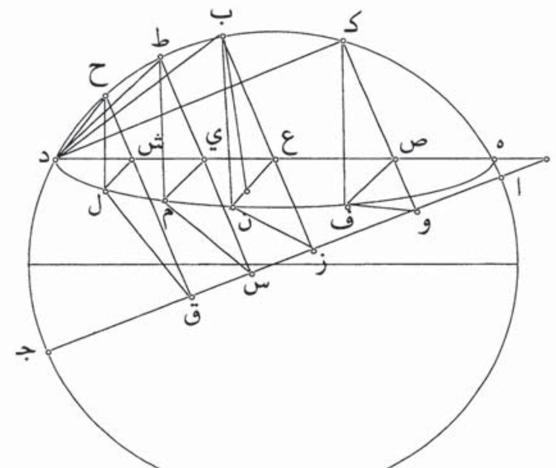
‹يب› وأيضًا، فلنعد الصورة. وليكن قطب آ مرتفعًا عن الأفق ومنخفضًا عن سمت الرأس، وقطب جـ منخفضًا عن الأفق والدوائر المتوازية مائلة على سطح المقنطرة ونقطة ع مركز المقنطرة. ٤٠٧-و

فأقول: إن الأوتار التي ذكرناها تكون على ما كانت عليه.

برهان ذلك: أنه إذا كان قطب آ مرتفعًا عن الأفق، كان خط د ه يلقى محور آ جـ في جهة ه، وتكون مراكز الدوائر المتوازية على محور آ جـ، فتكون خطوط ش ق ي س ع ز ص و مختلفة، أطولها خط ش ق وأقصرها ص و. ويكون زوايا د ش ل د ي م د ع ن د ص ف ل ش ح م ي ط ن ع ب ف ص ك كل واحدة منها هي زاوية قائمة لأن الدوائر المتوازية قائمة على

1 ح د ش: ح د ب – 3 ش ح ض: د ح ص، وكتب الضاد صاداً، ولن نشير إليها فيما بعد – 21 إن: مكررة – 23 ه: آ – 24 ص و (الثانية): ص د – 25 د ع ن: د ع ر / م ي ط: م ي ك.

دائرة نصف النهار والمقنطرة قائمة على دائرة نصف النهار وخطوط ل ش م ي ن ع ف ص هي الفصول المشتركة بين الدوائر المتوازية وبين المقنطرة، فهي أعمدة على سطح دائرة نصف النهار. وخط ل ش أصغر من خط م ي؛ وخط م ي أصغر من خط ن ع لأن ن ع هو نصف قطر للمقنطرة. فلأن خط ق ش أعظم من خط س ي وخط ش ل أصغر من خط ي م، تكون زاوية ش ق ل أصغر من زاوية ي س م وتكون زاوية ح ل ش – التي توترها قوس مساوية لقوس ح ل – نصف زاوية س ق ل. وكذلك زاوية ط م ي نصف زاوية ي س م، فتكون زاوية ح ل ش أصغر من زاوية ط م ي؛ وكل واحدة من زاويتي ل ش ح م ي ط قائمة. فيتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أن نسبة ل ح إلى ح ش أعظم من نسبة م ط إلى ط ي، ومثل ما بيّن في الشكل الذي قبل هذا يتبين أيضًا أن نسبة ش ح إلى ح د أعظم من نسبة ي ط إلى ط د، فنسبة ل ح إلى ح د أعظم من نسبة م ط إلى ط د. وكذلك يتبين أن نسبة م ط إلى ط د أعظم من نسبة ن ب إلى ب د.



وهذا البرهان بعينه يلزم إن كان محور آ ج يقطع خط د ه في داخل دائرة نصف النهار، لأنه إذا قطعه في داخل دائرة نصف النهار، فليس يقطعه فيما بين نقطتي ه ع، فلا يتغير شيء من البرهان لأن محور آ ج إن مرّ بنقطة ع التي هي مركز المقنطرة، كان قطب آ على سمت الرأس، وهو بالفرض

4 وخط م ي: مكررة – 9 ل ش ح: ر س ح – 15 النهار (الثانية): مكررة – 17 بالفرض: كتبها بالمفروض، ثم صححها عليها.

منخفض عن سمت الرأس. ويلزم هذا البرهان أيضًا كانت نقطة ه هي القطب المرتفع. ونسبة ن ب إلى ب د هي أيضًا أعظم من نسبة ف ك إلى ك د. وذلك أن زاوية ك ف ص إما أن تكون أصغر من زاوية ب ن ع وإما مساوية لها وإما أعظم منها.

فإن كانت زاوية ك ف ص أصغر من زاوية ب ن ع، فإن قوس ف ك تكون أصغر من الشبيهة بقوس ب ن؛ وقوس ف ك من دائرة أصغر من دائرة ب ن، لأن أعظم الدوائر المتوازية تكون مائلة ‹...› إلى جهة د، فدائرة ب ن أصغر من أعظم الدوائر المتوازية، فدائرة ك ف أصغر ‹من دائرة ب ن، وخط ك ف› يكون أصغر من خط ب ن، وك د أعظم من ب د. فنسبة ن ب إلى ب د / أعظم من نسبة ف ك إلى ك د. ٤٠٧-ظ

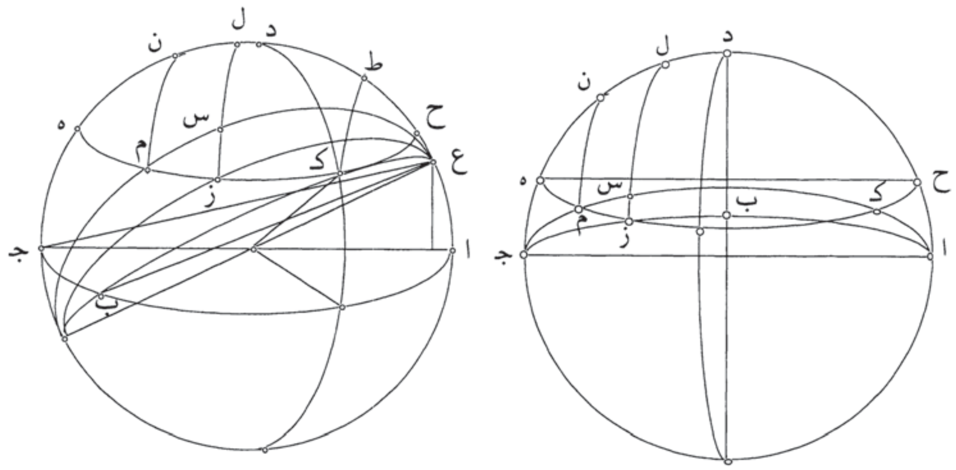
وإن كانت زاوية ك ف ص مساوية لزاوية ب ن ع، فإن قوس ك ف تكون شبيهة بقوس ب ن؛ وك ف من دائرة أصغر، فخط ك ف أصغر من خط ب ن.

وإن كانت زاوية ك ف ص أعظم من زاوية ب ن ع، فإن زاوية ف ك ص تكون أصغر من زاوية ن ب ع. فإذا فصلنا من زاوية ن ب ع زاوية مثل زاوية ف ك ص، حدث في داخل مثلث ن ب ع مثلث شبيه بمثلث ك ف ص وكانت ‹نسبة› الخط الذي يقع في داخل مثلث ن ب ع إلى خط ب ع كنسبة ف ك إلى ك ص، فتكون نسبة ن ب إلى ب ع أعظم من نسبة ف ك إلى ك ص؛ ونسبة ع ب إلى ب د أعظم من نسبة ص ك ك د، لأن ذلك يتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا. فنسبة ن ب إلى ب د أعظم من نسبة ف ك إلى ك د. وكذلك يتبين أن نسبة ف ك إلى ك د أعظم من نسبة كل وتر نظير لخط ف ك يكون أميل إلى نقطة ه من خط ف ك، إلى الوتر النظير لخط ك د.

فقد تبين أن نسبة كل وترين من هذه الأوتار المتقدمة أعظم من نسبة كل وترين متأخرين عنهما على جميع أوضاع الدوائر المتوازية وجميع أوضاع المقنطرات؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

7 ‹...›: ممحوة – 15 زاوية ن ب ع (الثانية): مكررة – 18 ك ص: ك ع – 22 ف ك (الثانية): ر ك.

〈يجـ〉 وأيضًا، فإن إذا كانت دائرة ا ب جـ أفقًا من الآفاق وكانت دائرة ا د جـ دائرة نصف النهار وكانت نقطة د قطب الأفق وكانت دائرة ه ح مقنطرة من مقنطرات الارتفاع، وكانت قوسا ل ز ن م من الدوائر الزمانية، أعني الدوائر الموازية لمعدل النهار، وكانت نقطتا ل ن على قوس د ه وكانت الكرة منتصبة أو مائلة إلى جهة نقطة ه، فإن قوس ل ز أعظم من الشبيهة بقوس ن م.



برهان ذلك: أن الكرة إذا كانت منتصبة، فإن دائرة معدل النهار تمرّ بنقطة د وتمرّ بمركز مقنطرة ه ز ح ويكون نقطتا ز م فيما بين دائرة معدل النهار وبين نقطة ه، ويكون قطبا معدل النهار نقطتي ا جـ، فتكون الدائرة العظيمة التي تخرج من قطبي ا جـ وتكون مماسة لمقنطرة ه ز ح إنما تماسها على وسط قوس ه ز ح التي هي نقطة التقاطع بين مقنطرة ه ز ح وبين دائرة معدل النهار، ويكون كل دائرة عظيمة تخرج من قطبي ا جـ وتقطع مقنطرة ه ز ح فهي تفصل من المقنطرة قوسين متساويتين عن جنبتي نقطة التماس، وتكون الدائرة التي هي أقرب إلى الدائرة المماسة تفصل من المقنطرة مما يلي نقطة التماس قوسًا أصغر. فيتبين من ذلك أن الدائرتين العظيمتين اللتين تخرجان من نقطتي ا جـ وتمران بنقطتي م ز تقطعان المقنطرة وتكون الدائرة التي تمرّ بنقطة ز أقرب إلى الدائرة المماسة من الدائرة التي تمر بنقطة م، لأن نقطة ز أقرب إلى وسط قوس ه ز ح من نقطة م. وإذا كان ذلك كذلك، فإن الدائرة العظيمة التي 〈تمر بنقطتي م كـ تقطع قوس〉 ز ل. وإذا كانت تقطع

قوس ز ل، فهي تفصل منها قوساً <شبيهة بقوس> / م ن، فقوس ز ل إذن أعظم من الشبيهة بقوس م ن. ٤٠٨-و

وإن كانت الكرة مائلة إلى جهة ه، فإن القطب الظاهر يكون إما تحت مقنطرة ه ز ح وإما على المقنطرة نفسها مكان نقطة ح وإما فوق المقنطرة.

فليكن القطب أولاً تحت المقنطرة، وليكن نقطة ع. ونجيز على نقطة ع دائرة عظيمة تماس مقنطرة ه ز ح، وهي الدائرة التي ميلها على الأفق مساوٍ لارتفاع المقنطرة، فلتكن دائرة ع ک ب. فلأن دائرة ا د جـ قائمة على الأفق على زوايا قائمة، تكون الخطوط الخارجة من نقطة ع إلى محيط الأفق مختلفة وأعظمها وتر قوس ع جـ، فوتر قوس ع جـ أعظم من وتر قوس ع ب، فقوس ع جـ أعظم من قوس ع ب. ونجيز على نقطتي د ک دائرة عظيمة، ولتكن دائرة د ک. فلأن دائرة ع ک ب تماس دائرة ه ز ح ودائرة د ک دائرة عظيمة وهي تمرّ بموضع التماس وبقطب دائرة ه ز ح، تكون دائرة د ک تمرّ بقطب دائرة ع ک ب، فقطب دائرة د ک على محيط دائرة ع ک ب وقطب دائرة د ک على محيط دائرة ا ب جـ أيضًا؛ فنقطة ب هي قطب دائرة د ک، فقوس ب ک ربع دائرة وقوس د جـ ربع دائرة، فتبقى <قوس> ع د أعظم من قوس ع ک. ونديـر على نقطة ک قوسًا زمانية، ولتكن قوس ک ط، فنقطة ط فيما بين نقطتي د ح. ونخرج من نقطة ع إلى نقطتي ز م دائرتين عظيمتين – فهما تقطعان قوس ک ط الزمانية على نقطتين مختلفتين، لأن كل واحدة منهما أقل من نصف دائرة – تتقاطعان قبل نقطتي م ز، وهما أيضًا تقطعان قوس ک ح من المقنطرة، ولتكونا دائرتي ع ز ع م. فتكون دائرة ع ز أقرب إلى نقطة التماس من دائرة ع م، لأن نقطة ز أقرب إلى نقطة التماس من نقطة م، فدائرة ع م تقطع قوس ز ل، فلتقطعها على نقطة س. فتكون قوس س ل شبيهة بقوس م ن، فتكون قوس ز ل أعظم من الشبيهة بقوس م ن.

وإن كان القطب نقطة ح، فإن الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقطتي ح م تكون أقرب إلى دائرة نصف النهار من الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقطتي ح ز، فالدائرة العظيمة التي تمر بنقطتي ح م تقطع قوس ز ل.

وكذلك إن كان القطب على قوس د ح، فإن الدائرة العظيمة التي تخرج

19-18 واحدة منهما: واحد منها: يقصد هنا القوسين المنقطعتين على هاتين النقطتين، انظر الترجمة والتحليل – 22 فلتقطعها: فليقطعها – 27 د ح: د جـ.

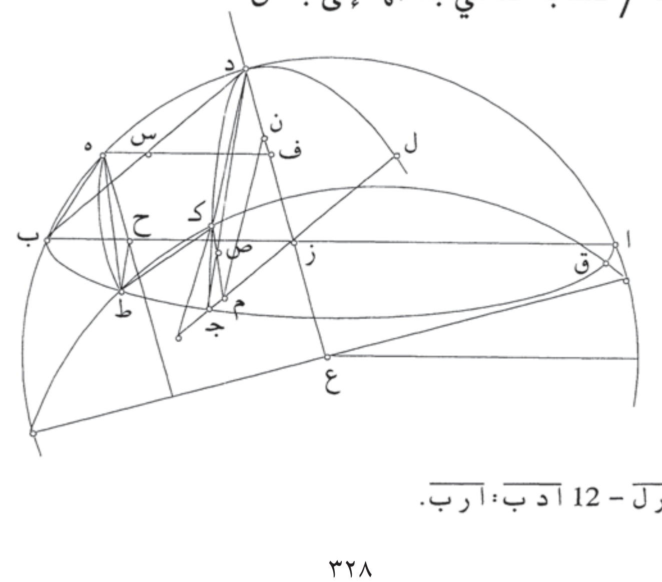
من القطب إلى نقطة م تكون أقرب إلى دائرة نصف النهار من الدائرة العظيمة التي تخرج من القطب إلى نقطة ز.

فقوس ز ل على جميع الأوضاع أعظم من الشبيهة بقوس م ن؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨يد⟩ وأيضًا، فلتكن دائرة ا ب جـ مقنطرة من المقنطرات الموازية للأفق، ولتكن قوس ا د من دائرة نصف النهار ولتكن الكرة منتصبة أو مائلة إلى جهة ب. فيكون قطب معدل النهار الذي يلي نقطة ا إما على محيط الأفق وإما مرتفعًا عن الأفق. ولتكن قوس جـ د ل إما دائرة معدل النهار أو موازية لدائرة معدل النهار. ولنخرج من قطب معدل النهار دائرة عظيمة، ولتقطع قوس د جـ وقوس ا جـ ولتكن دائرة ط ك ق؛ وليكن قطعها لقوس د جـ على نقطة ك وقطعها لقوس ا جـ ب على نقطة ط. ونجيز على نقطة ط قوسًا من دائرة موازية لمعدل النهار، ولتكن قوس ط ه؛ ولتقطع قوس ا د ب على نقطة ه. ولتكن قوس د ب ليست بأعظم من نصف قوس ا د ب.

فأقول: إن نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب، وإن نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ ك إلى قوس ك ط. وأريد بقولي: نسبة ⟨القوس إلى⟩ القوس في الدائرتين المختلفتين نسبة القوس من الدائرة المساوية للدائرة ⟨إلى القوس⟩ الشبيهة بالقوس من الدائرة الأولى. وكذلك أريد في جميع ما أذكره من بعد

٤٠٨-ظ إذا استعملت / نسب القسي بعضها إلى بعض.



8 جـ د ل: جـ ر ل – 12 ا د ب: ا ر ب.

والبرهان على ما ذكرناه: أن دائرة ط ه إما أن تكون مساوية لدائرة جـ د ل وإما أن تكون أصغر منها وإما أن تكون أعظم منها.

فلتكن دائرة ط ه أولاً أصغر من دائرة جـ د ل. ونصل خطوط ب ه ب د د ه د جـ د كـ كـ جـ كـ ط ه ط. وليكن ا ب الفصل المشترك بين دائرة نصف النهار وبين سطح المقنطرة، وليكن جـ ز ل الفصل المشترك بين المقنطرة وبين دائرة ل د جـ، وليكن د ز الفصل المشترك بين دائرة نصف النهار وبين دائرة ل د جـ، وليكن ه ح الفصل المشترك بين دائرة نصف النهار وبين دائرة ه ط، وليكن ح ط الفصل المشترك بين دائرة ه ط وبين المقنطرة. فيكون د ز عموداً على ز جـ لأن كل واحدة من المقنطرة ودائرة د جـ قائمة على دائرة نصف النهار، ففصلهما المشترك وهو جـ ز عمود على دائرة نصف النهار، فزاوية د ز جـ قائمة وكذلك زاوية ه ح ط. ونخرج كـ م عموداً على خط ل جـ، فيكون موازياً لخط د ز. ونخرج م ن موازياً لـ د كـ، فيكون د ن مساوياً لـ كـ م ون م مساوٍ لـ د كـ. ولأن قوسي ه ط د كـ فيما بين دائرتين من الدوائر العظام الخارجة من قطبيها، تكون قوس د كـ شبيهة بقوس ه ط. ولأن دائرة د كـ جـ أعظم من دائرة ه ط وقوس د كـ شبيهة بقوس ه ط، يكون خط د كـ أعظم من خط ه ط. وإذا أخرجنا من نقطة كـ عموداً على خط د ز، حدث مثلث شبيه بمثلث ه ط ح، لأن خط ه ح قطر دائرة ه ط وخط ط ح جيب قوس ه ط. وكذلك خط د ز قطر دائرة د كـ جـ والعمود الذي يخرج من نقطة كـ على قطر د ز هو جيب قوس د كـ؛ وقوس د كـ شبيهة بقوس ه ط، فالمثلث الذي يحدث من العمود الذي يخرج من نقطة كـ على خط د ز شبيه بمثلث ه ط ح. ومثلث ن م ز شبيه بالمثلث الذي يحدث من العمود الخارج من نقطة كـ، لأن خط م ن موازٍ لخط د كـ، فمثلث ن م ز شبيه بمثلث ه ط ح. وخط م ن مساوٍ لخط د كـ ود كـ أعظم من ه ط، فخط ن م أعظم من خط ه ط. ولأن مثلث ن م ز شبيه بمثلث ه ط ح وخط ن م أعظم من خط ه ط، يكون ن ز أعظم من ه ح.

ونخرج خط ه س ف موازياً لخط ح ز، فيكون ف ز مثل ه ح؛ ون ز أعظم من ه ح، فـ ن ز أعظم من ف ز، فنقطة ف فيما بين نقطتي ن ز، فخط

4 د ه: جـ ه – 8 ه ط: ط – 9 ز جـ: د جـ – 21 ن م ز: ن م د.

ف د أعظم من خط ن د. ولأن دائرة ا ب جـ مقنطرة موازية للأفق، تكون قوس ا د ب أقلّ من نصف دائرة، فقوس ا د أقلّ بكثير من نصف دائرة، فزاوية د ب ح حادة؛ وزاوية د س ف مساوية لزاوية د ب ح، فزاوية د س ف حادة، فزاوية د س ه منفرجة، فخط د ه أعظم من خط د س. ولأن دائرة د ك جـ أعظم من دائرة ه ط، تكون دائرة د ك جـ إما دائرة معدل النهار أو من الدوائر الموازية لها التي هي أقرب إلى القطب الخفي أو من الدوائر الموازية لمعدل النهار التي هي أقرب إلى القطب الظاهر أو أقرب إلى معدل النهار من دائرة ه ط. فإن كانت دائرة د ك جـ دائرة معدل النهار، فإن الذي فوق مقنطرة ا ب جـ منها هو أقلّ من نصف دائرة، لأن الذي فوق الأفق من معدل النهار هو نصف دائرة، فيكون قوس 〈جـ د ل أقل〉 من نصف دائرة. وكذلك إن كانت دائرة د ك جـ أقرب إلى القطب 〈الخفي لمعدل〉 / ٣٦٩-و
النهار، فإن الذي فوق الأفق منها، إن كانت الكرة منتصبة، فنصف دائرة، وإن كانت الكرة مائلة إلى جهة ب، فأقلّ من نصف دائرة؛ فيكون الذي فوق مقنطرة ا ب جـ من دائرة د ك جـ أقل من نصف دائرة، فتكون قوس ل د ك أقلّ بكثير من نصف دائرة.

وإن كانت دائرة د ك جـ أقرب إلى القطب الظاهر، وهي أقرب إلى معدل النهار من دائرة ه ط، فإنه إن كانت الكرة منتصبة، فإن الذي فوق الأفق من دائرة د ك جـ هو نصف دائرة، فيكون الذي فوق المقنطرة أقل من نصف دائرة، فتكون قوس ل د ك أقل بكثير من نصف دائرة. وإن كانت الكرة مائلة إلى جهة ب، فإن الذي فوق الأفق من دائرة د ك جـ يكون أكثر من نصف دائرة، إلا أن الذي تحت الأفق منها يكون أعظم من الشبيهة بالذي فوق الأفق من دائرة ه ط، لأنها أقرب إلى معدل النهار من دائرة ه ط؛ والذي تحت المقنطرة من دائرة د ك جـ هو أعظم من الذي تحت الأفق منها، فالذي تحت المقنطرة من دائرة د ك جـ أعظم بكثير من الشبيهة بالذي فوق الأفق من دائرة ه ط؛ والذي فوق الأفق من دائرة ه ط فهو أعظم من الذي فوق المقنطرة منها؛ فالذي تحت المقنطرة من دائرة د ك جـ هو أعظم بكثير من الشبيهة بالذي فوق المقنطرة من دائرة ه ط. والذي فوق المقنطرة من دائرة

10 〈جـ د ل اقل〉: ممحوة، وذلك لان قوس جـ د ل قد فصله خط جـ ل من نصف دائرة – 11 〈الخفي لمعدل〉: ممحوة.

ه ط هو ضعف قوس ه ط، فهو ضعف الشبيهة بقوس د ك، فالذي تحت المقنطرة من دائرة د ك ج أعظم من ضعف قوس د ك. ونأخذ قوس ج ك مشتركة، فيكون الذي تحت المقنطرة من دائرة د ك ج مع قوس ج ك أعظم من ضعف قوس د ك مع قوس ج ك؛ وضعف قوس د ك مع قوس ج ك هو قوس ج د مع قوس د ك، [وقوس ل ك] وقوس ج د مثل قوس د ل، فقوس ج د مع قوس د ك هي قوس ل ك، فالذي تحت المقنطرة من دائرة د ك ج مع قوس ج ك أعظم من قوس ل ك، والذي تحت المقنطرة من دائرة د ك ج مع قوس ج ك ومع قوس ل ك هو جميع الدائرة، فقوس ل ك أصغر من بقية الدائرة، فقوس ل ك أقلّ من نصف دائرة، فقوس ل ك على تصاريفات الأقسام يكون أقل من نصف دائرة، فزاوية ك ج ل على تصاريف الأحوال هي زاوية حادة، فعمود ك م يقع على خط ز ج، فنقطة م هي فيما بين نقطتي ز ج، فخط د ج يقطع عمود ك م، فليقطعه على نقطة ص. فإذا أخرجنا من نقطة ك خطًا موازيًا لخط ص ج، لقي م ج خارجًا من المثلث وكان أعظم من ك ج، لأن زاوية ك ج م حادة، فالزاوية التي تليها منفرجة، فيكون نسبة الخط الموازي الخارج من نقطة ك إلى خط ك م أعظم من نسبة خط ج ك إلى خط ك م؛ ونسبة الخط الموازي لخط ص ج الخارج من نقطة ك إلى خط ك م هي كنسبة خط ج ص إلى خط ص م، فنسبة خط ج ص إلى خط ص م أعظم من نسبة ج ك إلى ك م؛ ونسبة ج ص إلى ص م هي كنسبة ج د إلى د ز، فنسبة ج د إلى د ز أعظم من نسبة ج ك إلى ك م. وأيضًا، فإنه قد تبين أن خط ه د أعظم من خط د س وخط ن د أصغر من خط ف د، ⟨فنسبة ف د⟩ إلى د س أعظم من نسبة ن د إلى د ه. ونسبة ف د إلى د س هي كنسبة ز د إلى د ب، فنسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة ن د إلى د ه. ون د مثل م ك، لأن سطح ك م ن د متوازي الأضلاع وخط د ه مثل خط ك ط لأن قوس د ه مثل قوس ك ط لأنهما من دائرتين متساويتين خارجتين من قطب الدائرتين المتوازيتين، فنسبة ن د إلى د ه هي نسبة م ك إلى ك ط، فنسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة م ك إلى ك ط، فنسبة ج د

21 د س: د ص.

إلى د ز أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ م ونسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة م كـ إلى كـ ط، فنسبة جـ د إلى د ب أعظم بكثير من نسبة / جـ كـ إلى ٣٦٩-ظ كـ ط. وإذا بدلنا، كانت نسبة د جـ إلى جـ كـ أعظم من نسبة ب د إلى كـ ط؛ وكـ ط مثل د ه، فنسبة خط د جـ إلى خط جـ كـ أعظم من نسبة خط ب د إلى خط د ه.

وأيضًا، فإنه إن كانت الكرة منتصبة، فإن خط د ز عمود على خط ا ب وقوس د ب ليست أعظم من نصف قوس ا د ب، فخط ا ز ليس بأصغر من خط ز ب وخط ا ب هو قطر مقنطرة ا ب جـ، فخط ا ز ليس بأصغر من نصف قطر مقنطرة ا ب جـ وخط ز جـ ليس بأعظم من نصف قطر هذه المقنطرة. فخط ا ز ليس بأصغر من خط ز جـ وخط ز د عمود على خطي ا ز ز جـ، إذا كانت الكرة منتصبة. ونصل خط ا د؛ فيكون ليس بأصغر من خط د جـ، فتكون زاوية د ا ز ليست بأعظم من زاوية د جـ ز. فقوس د ب ليست بأعظم من الشبيهة بقوس د ل؛ وقوس د ل مساوية لقوس د كـ جـ، فقوس د كـ جـ ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ب.

وإن كانت الكرة مائلة إلى جهة ب، فإن العمود الخارج من نقطة د على خط ا ب يقع فيما بين نقطتي ب ز ويكون الذي يفصل العمود من خط ا ب مما يلي نقطة ا ليس بأصغر من نصف القطر. وذلك أنه إن كانت قوس د ب نصف قوس ا د ب، فإن العمود يقع على مركز المقنطرة ويكون نقطة ز فيما بين المركز ونقطة ا، لأن خط د ز مائل على خط ا ب، فيكون خط ز جـ أصغر من نصف القطر ويكون خط ز د أعظم من العمود. فتكون زاوية د جـ ز أعظم من زاوية د ا ب، فيكون قوس ل د، أعني قوس د جـ، أعظم من الشبيهة بقوس د ب. وإن كانت قوس د ب أصغر من نصف قوس ا د ب، فإن العمود الواقع من نقطة د على خط ا ب يفصل من خط ا ب مما يلي نقطة ا خطًا هو أعظم من نصف قطر المقنطرة؛ وخط ز جـ ليس بأعظم من نصف قطر المقنطرة، فالخط الذي يفصله العمود من خط ا ب مما يلي نقطة ا يكون أعظم من خط ز جـ والعمود نفسه يكون أصغر من خط د ز،

3 ب د: ب كـ – 8 ز ب: د ب – 12 د ب: ا ب – 13 فقوس: وقوس.

فزاوية د جـ ز يكون أعظم من زاوية د ا ب، فقوس د كـ جـ يكون أعظم من الشبيهة بقوس د ب. فعلى جميع الأقسام تكون قوس د كـ جـ ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ب.

وقد تبين أن نسبة خط د جـ إلى خط جـ كـ أعظم من نسبة خط ب د إلى خط د ه، فنسبة قوس د كـ جـ إلى قوس جـ كـ أعظم من نسبة قوس ب ه د إلى قوس د ه، كما تبين في الشكل د من هذه المقالة. وإذا بدلنا كانت نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس د ه، أعني قوس كـ ط. وإذا كانت نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس د ه، فإن نسبة القوس الباقية وهي قوس د كـ، أعني قوس ه ط إلى القوس الباقية وهي قوس ه ب، أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس د ه. فنسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب ونسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

٣٧٠-و وإن كانت دائرة ا ب جـ أفقًا وكانت / الكرة مائلة وكانت دائرة ا ب جـ تقطع دائرة ل د جـ وكانت دائرة ل د جـ دائرة معدل النهار أو أقرب إلى القطب الخفي من معدل النهار، فإن الذي فوق الأفق منها ليس بأعظم من نصف دائرة ويلزم جميع ما ذكرناه في المقنطرة. والبرهان عليه مثل البرهان الذي ذكرناه في المقنطرة.

وإن كانت دائرة ل د جـ أقرب إلى القطب الظاهر من معدل النهار، فإن القوس منها التي تحت الأفق تكون أعظم من الشبيهة بالقوس التي فوق الأفق من دائرة ه ط، وتكون القوس التي تحت الأفق من دائرة ل د جـ مع قوس جـ كـ أعظم من قوس ل كـ، فتكون قوس ل كـ أصغر من نصف دائرة، فتكون زاوية كـ جـ ز حادة وتمام البرهان مثل جميع ما تقدم في المقنطرة.

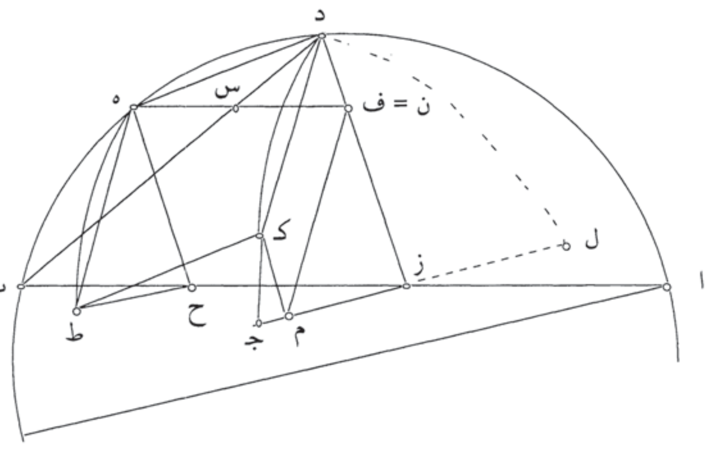
وإن كانت الكرة منتصبة وكانت دائرة ا ب جـ أفقًا، فإن القطبين يكونان نقطتي ا ب وتكون كل دائرة عظيمة تخرج من القطبين فهي تقطع دائرتي د جـ ه ط ولا تقطع قوس ا جـ ب ولا تحدث قوس مثل قوس كـ ط. ولكن

8 د ه: ط ه – 11 د ه: د ب.

تكون نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب.

وذلك أنه إذا كانت الكرة منتصبة، فإن الذي فوق الأفق من كل واحدة من دائرتي جـ د ط ه يكون نصف دائرة. وقوس ه ب أصغر من قوس د ب، فتكون نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب.

وأيضًا، فلتكن دائرة ط ه مساوية لدائرة جـ د، فتكون دائرتا جـ د ط ه على جنبتي معدل النهار. وإذا كانت دائرتا ل د جـ ط ه متساويتين، تكون القوس التي تحت الأفق من دائرة ل د جـ مساوية للقوس التي فوق الأفق من دائرة ه ط، وتكون القوس التي تحت المقنطرة من دائرة ل د جـ أعظم من القوس التي فوق المقنطرة من دائرة ه ط، كانت الكرة مائلة إلى جهة ب أو كانت منتصبة. فتكون القوس التي تحت المقنطرة من دائرة ل د جـ مع قوس جـ كـ أعظم من قوس ل كـ، فتكون زاوية كـ جـ ز حادة، فتكون نقطة م فيما بين نقطتي ز جـ. وإذا كانت دائرتا ل د جـ ط ه متساويتين، فإن قوسي د كـ ه ط تكونان متساويتين ويكون خط د كـ مساويًا لخط ه ط، فيكون خط ن م مساويًا لخط ه ط ويكون ن ز مساويًا لـ ه ح، فتكون نقطة ن هي نقطة ف ويكون خط ن د هو خط ف د. فيكون ف د مساويًا لخط م كـ. ود ه هو أعظم من د س على تصاريف الأحوال لأن زاوية د س ه أبداً منفرجة لأن زاوية د س ف أبداً حادة لأنها مساوية لزاوية د ب ا الحادة، لأن قوس ا د أبداً أقل من نصف دائرة. ولأن خط د ه أعظم من خط د س، تكون نسبة ف د إلى د س أعظم من نسبة ف د، الذي هو م كـ، إلى د ه. فيلزم من ذلك أن تكون نسبة خط جـ د إلى خط د ب أعظم من نسبة خط جـ كـ إلى خط كـ ط، وتمام البرهان على ما تقدم. فتكون نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب ونسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط.



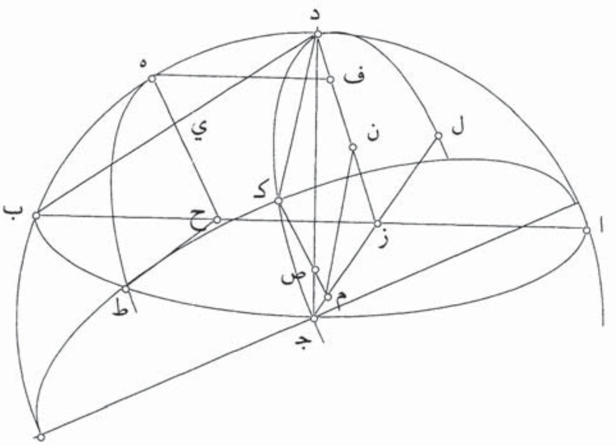
وإن كانت دائرة ا ب جـ أفقًا وكانت الكرة مائلة، فإن القوس التي تحت الأفق من دائرة ل د جـ تكون مساوية للقوس التي فوق الأفق من دائرة ه ط، / فتكون القوس التي تحت الأفق من دائرة ل د جـ مع قوس جـ كـ مساوية ٣٧٠-ظ لقوس ل كـ. فتكون زاوية كـ جـ ل قائمة، فتكون نقطة جـ هي نقطة م، ويكون خط كـ جـ مساويًا لخط ف د، وتكون نسبة كـ جـ إلى كـ ط هي نسبة ف د إلى كـ ط. وتكون نسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ ط وتكون نسبة جـ د إلى د ب أعظم بكثير من نسبة جـ كـ إلى كـ ط، لأن جـ د أعظم من د ز؛ وتمام البرهان على مثل ما تقدم.

وإن كانت دائرة ا ب جـ أفقًا وكانت دائرتا ل د جـ ه ط متساويتين وكانت الكرة منتصبة، فإن دائرتي ل د جـ ه ط تكونان عن جنبتي قطب الأفق، وتكون قوس د جـ مساوية لقوس ه ط وقوس ه ب أصغر من قوس د ب، فتكون نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب، وتكون الدائرة التي تخرج من القطبين تمر بنقطة ط <و>تمر بنقطة جـ ولا تقطع قوس د جـ.

وأيضًا، فلنعد الصورة: ولتكن دائرة ه ط أعظم من دائرة ل د جـ ولتكن الكرة مائلة إلى جهة ب، فتكون دائرة ه ط إما دائرة معدل النهار وإما أقرب إلى القطب الخفي عن معدل النهار، فتكون دائرة ل د جـ أقرب إلى القطب

2 ه ط: الطاء ممحوة – 5 مساويًا: مساو – 6 كـ ط: د ه.

الظاهر من معدل النهار ويكون بُعد دائرة ل د جـ عن معدل النهار أكثر من بُعد دائرة ه ط، أو تكون دائرتا ه ط ل د جـ مائلتين معًا إلى جهة القطب الظاهر وتكون دائرة ل د جـ أبعد عن معدل النهار من دائرة ه ط، وليس تكون دائرة ه ط أعظم من دائرة ل د جـ إذا كانت قوس د ب ليست بأعظم من نصف قوس ا د ب إلا إذا كانت الكرة مائلة إلى جهة ب؛ فنقطة ي هي النقطة التي عليها يقطع خط د ب خط ه ح.

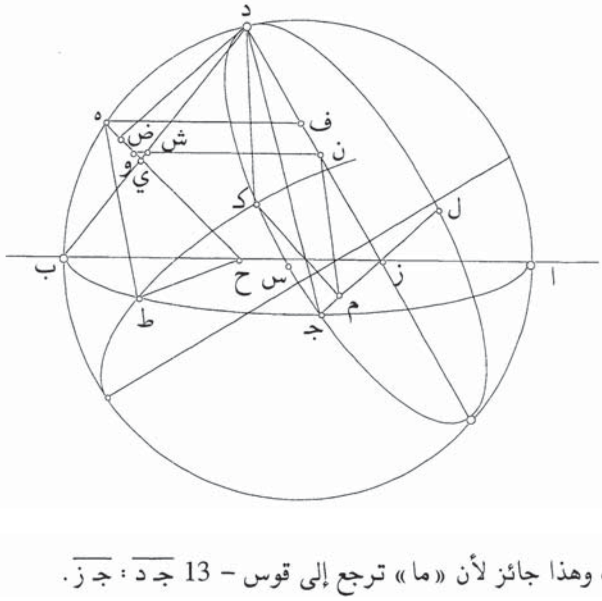


فأقول: إنه إذا كانت نسبة خط ه ح إلى خط ح ي ليست بأصغر من <نسبة> نصف قطر دائرة ه ط إلى <نصف> قطر د جـ، فإنه إن كانت قوس ل د جـ ليست بأعظم من نصف دائرة – وذلك قد يعرض إذا كانت دائرة ا ب جـ مقنطرة من المقنطرات الموازية للأفق ولم تكن أفقًا –، فإن نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب، وإن نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ ك إلى قوس ك ط؛ وإن كانت قوس ل د جـ أعظم من نصف دائرة – وذلك قد يعرض إذا كانت دائرة ا ب جـ مقنطرة من المقنطرات الموازية للأفق ويلزم إذا كانت دائرة ا ب جـ أفقًا، فإن نسب القسي تكون على ما ذكرنا إذا كان <ما> فوق دائرة ا ب جـ من دائرة ه ط ليس بأعظم من ضعف الشبيهة بما تحت دائرة ا ب جـ من دائرة ل د جـ. وهذه الشروط هي في هذا القسم فقط، أعني إذا كانت دائرة ه ط أعظم من دائرة د جـ.

5 فنقطة: فنقط.

فإذا كانت قوس ل د جـ ليست بأعظم من نصف دائرة، فإن قوس ل د كـ تكون أقل من نصف دائرة، فتكون زاوية كـ جـ ل حادة، فيكون عمود كـ م في داخل قوس ل د جـ، فتكون نسبة جـ ص إلى ص م أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ م، وتكون نسبة جـ د إلى د ز أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ م، ⟨التي هي مثل نسبة جـ كـ⟩ إلى ن د.

وإن كانت قوس ل د جـ أعظم من نصف دائرة وكان ما فوق دائرة ا ب جـ من دائرة ه ط ليس بأعظم من ضعف الشبيهة بما تحت دائرة ا ب جـ من دائرة ل د جـ، فإنا نخرج خط جـ س موازيًا لخط ز د، فتكون د س مساوية لنصف ما تحت دائرة ا ب جـ من دائرة ل د جـ. لأن خط د ز قطر لدائرة ل د جـ وهو قائم على خط ل ز جـ، فهو يقسم ما تحت دائرة ا ب جـ من دائرة ل د جـ بنصفين. وقوس ه ط هي نصف ما فوق دائرة ا ب جـ من دائرة ه ط، فقوس ه ط ليست بأعظم / من ضعف الشبيهة ٣٧١-و
بقوس د س، ويكون خط جـ س عمودًا على خط جـ د لأنه مواز لخط ز د. وإذا كانت قوس ه ط ليست بأعظم من ضعف الشبيهة بقوس د س، فإن قوس ه ط إما أصغر من الشبيهة بقوس د س، وإما مساوية للشبيهة بقوس د س، وإما أعظم من الشبيهة بقوس د س.



7 ليس: ليست، وهذا جائز لأن «ما» ترجع إلى قوس – 13 جـ د: جـ ز.

فإن كانت <قوس> ه ط أصغر من الشبيهة بقوس د س، فإن قوس د ك أصغر من قوس د س، ونقطة س تكون فيما بين نقطتي ك جـ، فتكون زاوية ك جـ ز حادة، لأن زاوية س جـ ز قائمة، فيكون عمود ك م في داخل قوس جـ د ل وتكون نقطة م فيما بين نقطتي ز جـ، فتكون نسبة جـ د إلى د ز أعظم من نسبة جـ ك إلى ك م كما تبين من قبل. وك م مثل ن د، فتكون نسبة جـ د إلى د ز أعظم من نسبة جـ ك إلى ن د.

وإن كانت قوس ه ط مساوية للشبيهة بقوس د س، فإن قوس د ك هي قوس د س ونقطة س هي نقطة ك وخط جـ ك هو خط جـ س، فيكون خط جـ ك عموداً على خط ز جـ وتكون نقطة م هي نقطة جـ ويكون خط ن د مساويًا لخط جـ ك.

وإن كانت قوس ه ط أعظم من الشبيهة بقوس د س، فإن قوس د ك أعظم من قوس د س ونقطة س تكون فيما بين نقطتي د ك؛ وتكون قوس د ك ليست بأعظم من ضعف قوس د س، فتكون قوس س ك ليست بأعظم من قوس س د، فتكون زاوية س جـ ك ليست بأعظم من زاوية س جـ د؛ وزاوية س جـ د مساوية لزاوية جـ د ز لأن خط س جـ موازٍ لخط د ز، فتكون زاوية س جـ ك ليست بأعظم من زاوية جـ د ز، ويكون العمود الخارج من نقطة ك على خط ز جـ يقع على نقطة خارجة عن نقطة جـ لأنه يكون موازيًا لخط جـ س لأن خط جـ س عمود على خط ز جـ وتكون نقطة م خارجة عن خط ز جـ ويكون العمود الخارج من نقطة ك على خط ز جـ أصغر من خط ز د لأن خط ز د هو سهم قوس ل د جـ، وسهم كل قوس هو أعظم عمود يقع من القوس على وترها. فالعمود الذي يخرج من نقطة ك على خط ز جـ يكون أصغر من خط ز د، ويكون هذا العمود مساويًا لخط ن د لأن خط م ن خارج من مسقط العمود وهو موازٍ لخط ك د. وإذا خرج العمود من نقطة ك على خط ز جـ، فإنه يحيط مع خط ك جـ عند نقطة ك بزاوية مساوية لزاوية ك جـ س لأن العمود يكون موازيًا لخط جـ س. وزاوية ك جـ س ليست بأعظم من زاوية جـ د ز، فتكون الزاوية التي يحيط بها خط جـ ك مع العمود الخارج من نقطة ك على خط ز جـ ليست بأعظم من زاوية جـ د ز. والزاوية القائمة التي عند مسقط العمود مساوية لزاوية جـ ز د

17 لأنه: مكررة.

القائمة. فإن كانت الزاوية التي يحيط بها خط جـ ك والعمود مساوية لزاوية جـ د ز، فإن نسبة جـ د إلى د ز كنسبة جـ ك إلى العمود. وإن كانت الزاوية التي يحيط بها خط جـ ك والعمود أصغر من زاوية جـ د ز، فإن نسبة جـ د إلى د ز أعظم من نسبة جـ ك إلى العمود. والعمود الخارج من نقطة ك على خط ز د هو مساوٍ لخط ن د. فعلى كلا الوجهين تكون نسبة جـ د إلى د ز ليست بأصغر من نسبة جـ ك إلى ن د. فعلى جميع الأقسام يكون خط جـ ك إما مساويًا لخط ن د وإما نسبته إلى خط ن د ليست بأعظم من نسبة خط جـ د إلى خط د ز.

وأيضًا، فلأن قوس د ك شبيهة بقوس ه ط ودائرة د جـ أصغر من دائرة ه ط، يكون خط د ك أصغر من خط ه ط، فخط م ن أصغر من خط ه ط ومثلث ن م ز شبيه بمثلث ه ط ح، فخط ن ز أصغر من خط ه ح، فخط ن ز أصغر من خط ف ز، فنقطة ن فيما بين ف ز وخط ن د أعظم من خط ف د. ولأن قوس د ك شبيهة بقوس ه ط، تكون نسبة خط ه ط إلى د ك كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. فنسبة خط ه ط إلى خط ن م كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. / ٣٧١-ظ ونسبة ه ط إلى ن م هي كنسبة ه ح إلى ن ز، فنسبة ه ح إلى ن ز هي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. ونسبة ه ح إلى ح ي ليست بأصغر من نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فنسبة ه ح إلى ح ي ليست بأصغر من نسبة ه ح إلى ن ز، فنسبة ه ح إلى ح ي هي إما كنسبة ه ح إلى ن ز أو أعظم من نسبة ه ح إلى ن ز. فإن كانت نسبة ه ح إلى ح ي كنسبة ه ح إلى ن ز، فإن ن ز مساوٍ لـ ح ي. وإن كانت نسبة ه ح إلى ح ي أعظم من نسبة ه ح إلى ز ن، فإن ن ز أعظم من ح ي. فإن كان ن ز مساويًا لـ ح ي، فإنا نصل ن ي، فيكون موازيًا لـ ز ح وتكون نسبة ن د إلى د ي كنسبة ز د إلى د ب. وإن كان ن ز أعظم من ي ح، فإنا نخرج من نقطة ن خطًا موازيًا لخط ز ح، فهو يقطع خط ه ي لأن ن ز أصغر من ه ح وأعظم من ي ح، فليقطعه على نقطة و. وإذا قطع هذا الخط الموازي خط ه ي، فهو يقطع خط د ي، فيقطعه على

5 مساوٍ: مساوية – 11 فخط ... ه ح: مكررة – 21 ز ن: ح ن – 24 ن: ر – 25 خط ه ي: مكررة – 26 و: د، وكذلك فيما بعد.

نقطة ش، فليكن الموازي خط ن ش. فتكون نسبة ن د إلى د ش كنسبة ز د إلى د ب وتكون نسبة ه ح إلى ح و هي نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. وأيضًا، فإن كانت نسبة ه ح إلى ح ي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن نسبة ه ح إلى ه ي هي نسبة قطر دائرة ه ط إلى زيادته على قطر دائرة د جـ. وزيادة قطر دائرة ه ط على قطر دائرة د جـ هي ضعف ما يفصله العمود الخارج من نقطة د على خط ه ح مما يلي نقطة ه. وخط ه ح هو أصغر من قطر دائرة ه ط، فخط ه ي هو أصغر من ضعف ما يفصله العمود الخارج من نقطة د على خط ه ح مما يلي نقطة ه. فإن كان خط ه ح نصف قطر دائرة ه ط، فإن خط ه ي هو ما يفصله العمود الخارج من نقطة د على خط ه ح. فيكون خط د ي هو العمود، فيكون زاوية د ي ه قائمة، فيكون خط د ه أعظم من خط د ي. فإن كان خط ه ح أصغر من نصف قطر دائرة ه ط، فإن خط ه ي أصغر من المقدار الذي يفصله العمود مما يلي نقطة ه، فتكون زاوية د ي ه منفرجة، فيكون خط د ه أعظم من خط د ي. وإن كان خط ه ح أعظم من نصف قطر دائرة ه ط، فإن خط ه ي أعظم من المقدار الذي يفصله العمود. إلا أن خط ه ح هو على تصاريف الأحوال أصغر من القطر، فخط ه ي يكون أقل من ضعف ما يفصله العمود. فالعمود الذي يخرج من نقطة د على خط ه ي هو يقسم خط ه ي بقسمين مختلفتين، يكون أعظمهما على نقطة ه، فيكون خط د ه أعظم من خط د ي. فعلى تصاريف الأحوال إذا كانت نسبة ه ح إلى ح ي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن خط د ه يكون أعظم من خط د ي. وإذا كانت نسبة ه ح إلى ح ي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن خط ن ي يكون موازيًا لخط ز ح وتكون نسبة ن د إلى د ي كنسبة ز د إلى د ب. ونسبة ن د إلى د ي أعظم من نسبة ن د إلى د ه، لأن د ه أعظم من د ي، فإذا كانت نسبة ه ح إلى ح ي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن نسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة ن د إلى د ه. وإن كانت نسبة ه ح إلى ح ي أعظم من نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ تكون كنسبة ه ح إلى ح و وتكون نسبة ح ه إلى ه و هي نسبة قطر دائرة ه ط إلى زيادته على قطر دائرة د جـ،

18 د ه: ز ه – 27 ح و: ح د – 28 ه و: ه د.

فيكون خط ه و إما هو المقدار الذي / يفصله العمود أو أصغر منه أو أقل من ضعفه كما تبين في خط ه ي. فيكون خط د ه أعظم من الخط الخارج من نقطة د إلى نقطة و والخط الخارج من نقطة د إلى نقطة و أعظم من خط د ش، لأن زاوية د ش و منفرجة؛ وذلك لأن زاوية د ش ن حادة لأنها مساوية لزاوية د ب ز، فيكون خط د ه أعظم بكثير من خط د ش، فتكون نسبة ن د إلى د ش أعظم من نسبة ن د إلى د ه. ونسبة ن د إلى د ش هي كنسبة ز د إلى د ب لأن خط ن ش مواز لخط ز ح ب. فنسبة ز د إلى د ب تكون أعظم من نسبة ن د إلى د ه. فإذا كانت نسبة ه ح إلى ح ي ليست بأصغر من نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن نسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة ن د إلى د ه على تصاريف الأحوال. ٣٧٢-و

فقد تبين من جميع ما ذكرناه على الشروط التي قدمناها أن خط جـ ك إما مساوٍ لخط ن د وإما نسبته إليه ليست بأعظم من نسبة جـ د إلى د ز، وأن نسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة ن د إلى د ه. وخط د ه مثل خط ك ط، فإن كان خط جـ ك مثل خط ن د، فإن نسبة ن د إلى د ه هي نسبة جـ ك إلى ك ط. ونسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة ن د إلى د ه، فنسبة ز د إلى د ب أعظم من نسبة جـ ك إلى ك ط. وجـ د أعظم من د ز لأن زاوية د ز جـ قائمة، فنسبة جـ د إلى د ب أعظم من نسبة ز د إلى د ب، فنسبة جـ د إلى د ب أعظم بكثير من نسبة جـ ك إلى ك ط.

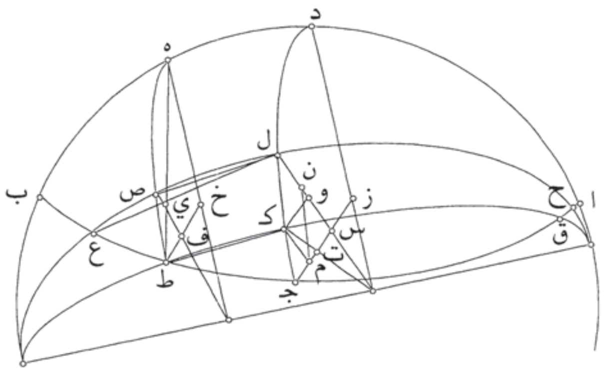
فإن كانت نسبة جـ ك إلى ن د ليست بأعظم من نسبة جـ د إلى د ز، فإن نسبة جـ د إلى د ز تكون كنسبة جـ ك إلى ن د أو أعظم من نسبة جـ ك إلى ن د. ونسبة ز د إلى د ب هي أعظم من نسبة ن د إلى د ه، فتكون نسبة جـ د إلى د ب أعظم من نسبة جـ ك إلى د ه، فنسبة جـ د إلى د ب أعظم على تصاريف الأحوال من نسبة جـ ك إلى د ه. وإذا بدلنا، تكون نسبة د جـ إلى جـ ك أعظم من نسبة ب د إلى د ه؛ وقوس د جـ ليست بأصغر من الشبيهة بقوس د ب كما تبين فيما مضى. فتكون نسبة قوس د جـ إلى قوس جـ ك أعظم من قوس ب د إلى قوس د ه. وإذا بدلنا كانت نسبة قوس جـ د

1 ه و: ه د – 4 د ش ن: د س ب – 7 ز د: ن د / ن ش: ر س / ز ح ب: ر ح د – 9 د جـ: ه جـ – 21 د ه: د و.

إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس د ه، أعني قوس كـ ط؛ وتكون نسبة الباقي إلى الباقي أعظم من نسبة قوس جـ د إلى قوس د ب. فتكون نسبة قوس ط ه إلى قوس ه ب أعظم من نسبة ⟨قوس⟩ جـ د إلى قوس د ب. ونسبة قوس جـ د إلى قوس د ب أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨**يه**⟩ وأيضًا، فلنعد الصورة ولنخرج من قطب الكرة دائرة عظيمة تقطع قوسي د كـ ه ط، ولتكن دائرة ح ل ص ع.

فأقول: إنه إذا كان فرق دائرة ا ب جـ من دائرة ل جـ د ليس بأعظم من نصف دائرة، فإن نسبة قوس ص ط إلى قوس ص ع أعظم من نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع، وإن نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط.



برهان ذلك: أنا نخرج الفصول المشتركة، وليكن الفصل المشترك بين دائرة ح ل ع وبين دائرة ا ب جـ خط ح ع، وليكن الفصل المشترك بين دائرة ق كـ ط وبين دائرة ا ب جـ خط ق ط، وليكن الفصل المشترك بين دائرة ح ل ع وبين دائرة د ل جـ خط ل س، وليكن الفصل المشترك بين دائرة ق كـ ط وبين دائرة د ل جـ خط كـ ت وليكن الفصل المشترك بين دائرة ح ل ع وبين دائرة ه ط خط ص ف. فلأن قطب دائرة د ل جـ هو قطب معدل

15 ح ل ع: خ ل ع.

النهار، يكون مركز د ل جـ على محور العالم وتكون دائرتا ح ل ق كـ تقطعان دائرة د ل جـ على أقطارها، فخطا ل س كـ ت / قطران لدائرة د ل جـ، فهما يلتقيان على مركزها. وخط د ز أيضًا هو قطر لدائرة د ل جـ فهو يمر بمركزها. ٣٧٢-ظ

فإن كان الذي فوق دائرة ا ب جـ من دائرة د ل جـ هو أقل من نصف دائرة، فإن مركز دائرة د ل جـ يكون تحت دائرة ا ب جـ، وتكون الصورة هي الصورة الأولى. وقطر د ز يحيط مع خط ز جـ بزاوية قائمة، فقطر ل س يحيط مع خط ز جـ بزاوية حادة مما يلي نقطة جـ، فزاوية ل س جـ حادة. وكذلك زاوية كـ ت جـ حادة. لكن قطر كـ ت إذا انتهى إلى المركز، فإنه يعمل مثلثًا يحيط بالمثلث الذي يعمله قطر ل س، فزاوية ل س جـ تكون خارجة من المثلث الذي يحيط به قطرا ل س كـ ت ورأسه نقطة المركز. فزاوية ل س جـ أعظم من زاوية هذا المثلث، التي عند نقطة ت؛ وزاوية المثلث التي عند نقطة ت مساوية لزاوية كـ ت جـ، فزاوية ل س جـ أعظم من زاوية كـ ت جـ. فنخرج من نقطة كـ خطًا موازيًا لخط ل س، فهو يلقى خط ز جـ وهو يلقى <خط> ز جـ على نقطة خارجة عن خط س ت؛ فليكن الخط الموازي لخط ل س خط كـ م. ونصل خطوط جـ ل جـ كـ كـ ل ل ص ي ع ص ط ونخرج من نقطة م خطًا موازيًا لخط كـ ل، فهو يقطع خط س ل. لأن خط ز د هو سهم قوس جـ ل د، فهو أعظم عمود يقع من قوس د جـ على خط ز جـ، وما قرب منه من الأعمدة أعظم مما بعد، فالعمود الخارج من نقطة كـ على خط ز جـ أصغر من العمود الخارج من نقطة ل على خط ز جـ. وكذلك يكون خط كـ م أصغر من خط ل س لأنه مواز له. فالخط الذي يخرج من نقطة م موازيًا لخط كـ ل هو يقطع خط ل س، فليكن الموازي خط م ن. فيكون ن ل مساويًا لخط م كـ. وأيضًا، لأن قوس كـ ل شبيهة بقوس ط ص، تكون نسبة خط ط ص إلى خط كـ ل كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. وم ن مثل كـ ل، فنسبة ط ص إلى م ن كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. ومن أجل أن سطحي دائرتي د جـ ه ط متوازيان وسطح دائرة

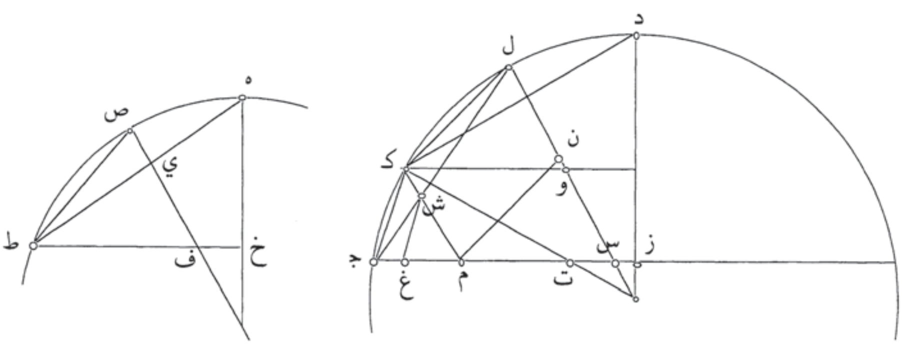
9 وكذلك: ولذلك – 10 ل س: د س – 12 ل س جـ: ل ب جـ – 14 ل س: ل ب – 24 قطر (الثانية): مكررة.

ح ل ع يقطعهما، يكون خطا ل س ص ف متوازيين وخطا س جـ ف ط متوازيان، فزاوية ل س جـ مساوية لزاوية ص ف ط. ونخرج خط كـ و موازيًا لخط جـ ز، فتكون زاوية ل كـ و مساوية لزاوية ن م س لأن خط ن م موازٍ لخط ل كـ وخط كـ و موازٍ لخط ز جـ؛ وخط كـ و إذا خرج على استقامة، فإنه يلقى خط د ز ويحيط معه بزاوية قائمة لأن زاوية جـ ز د قائمة وخط كـ و موازٍ لخط جـ ز، فيكون هذا الخط جيب قوس كـ د وقوس كـ د شبيهة بقوس ط ه وخط ط خ هو جيب قوس ط ه وقوس كـ ل شبيهة بقوس ط ص، فزاوية ل كـ د مساوية لزاوية ص ط ه. وقد تبين أن زاوية ل كـ و مساوية لزاوية ن م س، فزاوية ن م س مساوية لزاوية ص ط ف؛ وقد تبين أن زاوية ن س م مساوية لزاوية ص ف ط، فمثلث ن م س شبيه بمثلث ص ط ف. فنسبة ط ص إلى م ن هي كنسبة ص ف إلى ن س؛ ونسبة ط ص إلى م ن هي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فنسبة ص ف إلى ن س هي كنسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ. فإن كانت دائرة ه ط أصغر من دائرة د جـ، فإنه خط ص ف أصغر من خط ن س. فتبين كما تبين من قبل في خط / د ز أن نسبة س ل إلى ل ع أعظم من نسبة ن ل إلى ل ص. ٢٧٣-و

وكذلك إن كانت دائرة ه ط مساوية لدائرة د جـ، تبين أن نسبة س ل إلى ل ع أعظم من نسبة ن ل إلى ل ص؛ وإن كانت دائرة ه ط أعظم من دائرة د جـ، فإنه إذا كانت نسبة ص ف إلى ف ي ليست بأصغر من نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د جـ، فإن نسبة س ل إلى ل ع أعظم من نسبة ن ل إلى ل ص، كما تبين من قبل. وزاوية كـ جـ ز حادة لأن الذي فوق دائرة ا ب جـ من دائرة د ل جـ أقل من نصف دائرة؛ وزاوية كـ ت جـ حادة. فالعمود الخارج من نقطة كـ على خط جـ ز واقع فيما بين نقطتي ت جـ. وزاوية كـ م جـ أيضًا حادة وهي أعظم من زاوية كـ ت جـ، فخط كـ م هو فيما بين خط كـ ت وبين العمود الواقع من نقطة كـ على خط ت جـ، فنقطة م هي فيما بين نقطتي ت جـ. فخط جـ ل هو قاطع لخط كـ م، فليقطعه على نقطة ش. ونخرج من نقطة ش خطًا موازيًا لخط كـ جـ وليكن ش غ، فتكون زاوية

2 كـ و: كـ د – 3 ل كـ و: ل كـ ف – 4 كـ و: كـ د – 6 فيكون: فكون – 8 ص ط ه: ص ط ف – 15 في خط: مكررة – 16 وكذلك: ولذلك – 25 جـ: كـ – 26 كـ جـ: ا جـ.

ش غ جـ منفرجة لأن زاوية ش غ م مساوية لزاوية كـ جـ م الحادة، فخط جـ ش أعظم من خط ش غ، فنسبة جـ ش إلى ش م أعظم من نسبة غ ش إلى ش م؛ ونسبة جـ ش إلى ش م هي نسبة جـ ل إلى ل س ونسبة غ ش إلى ش م هي نسبة جـ كـ إلى كـ م، فنسبة جـ ل إلى ل س أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ م؛ ونسبة س ل إلى ل ع أعظم من ن ل إلى ل ص، أعني نسبة م كـ إلى كـ ط لأن كـ م مساوٍ لخط ل ن وكـ ط مساوٍ لخط ل ص، فتكون نسبة جـ ل إلى ل ع أعظم من نسبة جـ كـ إلى كـ ط. فتبين كما تبين من قبل أن نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط.



وإن كان الذي فوق دائرة ا ب جـ من دائرة د ل جـ هو نصف دائرة، فإن الصورة هي الصورة الثانية لأن خط جـ ز يكون قطراً لدائرة د ل جـ وخط ز د هو أيضًا قطر من أقطارها لأن نقطة ز هي مركز دائرة د ل جـ. ولأن نقطة ز مركز دائرة د ل جـ، تكون نقطة ز على محور الكرة، فتكون نقطة ز في سطوح جميع الدوائر التي تمر بالقطبين، / ٣٧٣-ظ فيكون قطب الكرة مرتفعًا عن سطح دائرة ا ب جـ لأن بعض المحور يكون فوق دائرة ا ب جـ لأن الكرة مائلة إلى جهة ب. ونقطة ز على المحور، فنقطة ز هي في سطحي دائرتي ح ل ع ق كـ ط، فخطا ق ط ح ع يتقاطعان على نقطة ز. ونقطة ز هي أيضًا على خط ا ب لأن الذي فوق دائرة ا ب جـ من دائرة د ل جـ هو نصف دائرة، فمركز دائرة د ل جـ في سطح دائرة ا ب جـ، وهو في سطح دائرة ا د ب لأنها دائرة نصف النهار، فنقطة ز هي على الفصل المشترك لدائرة ا ب جـ

1 ش غ م: ص ع م.

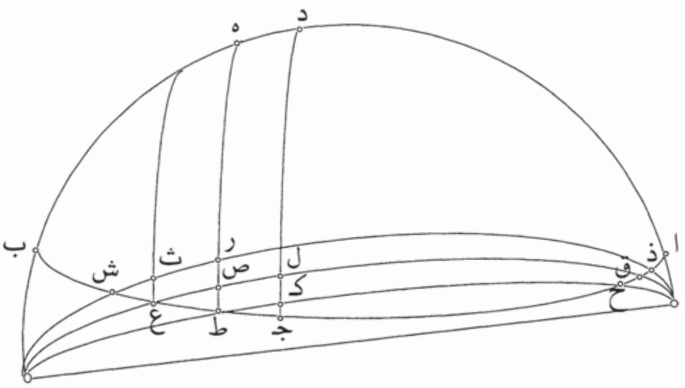
ولدائرة ا د ب الذي هو خط ا ب، فنقطة ز على خط ا ب، فيكون الفصل المشترك بين دائرة ق ك ط وبين دائرة د ل جـ هو قطر ك ز، والفصل المشترك بين دائرة ح ل ع وبين دائرة د ل جـ هو قطر ل ز، والفصل المشترك بين دائرة ح ل ع وبين دائرة ه ط هو خط ص ف، فزاوية ك جـ ز حادة، لأن خط ز جـ قطراً لدائرة د ل جـ وخط جـ ك وتر فيها.

وخط جـ ك إذا خرج على استقامة في جهة ك، فهو يلقى خط ز ل لأنه يلقى خط ز د، فخط ك م الموازي لخط ل ز يكون في داخل قوس جـ د، فنقطة م فيما بين نقطتي جـ ز. وخط ك م أصغر من خط ل ز كما تبين من قبل، لأن العمود الذي يخرج من نقطة ك على خط جـ ز أصغر من العمود الذي يخرج من نقطة ل على خط جـ ز، فخط م ن الموازي لخط ك ل يقطع خط ل ز ويكون خط جـ ل يقطع خط ك م، فليقطعه على نقطة ش. فتبين كما تبين في الصورة الأولى أن نسبة جـ ل إلى ل ز أعظم من نسبة جـ ك إلى ك م لأن زاوية ش غ جـ تكون منفرجة لأن زاوية ش غ م حادة. فإن كانت دائرة ه ط ليست بأعظم من دائرة د ل جـ، فإن خط ص ف ليس بأعظم من خط ن ز لأن مثلث ز ن م يكون شبيهًا بمثلث ف ط ص وخط م ن مساوٍ لخط ك ل. فتبين كما تبين في الصورة الأولى أن نسبة ز ل إلى ل ع أعظم من نسبة ن ل إلى ل ص.

وإن كانت دائرة ه ط أعظم من دائرة د ل جـ وكانت نسبة ص ف إلى ف ي ليست بأصغر من نسبة قطر دائرة ه ط إلى قطر دائرة د ل جـ، فإن نسبة ز ل أيضًا إلى ل ع أعظم من نسبة ن ل إلى ل ص كما تبين أيضًا في الصورة الأولى، فتكون نسبة ز ل إلى ل ع أعظم من نسبة م ك إلى ك ط، فتكون نسبة جـ ل إلى ل ز أعظم من نسبة جـ ك إلى ك م. / ونسبة ز ل إلى ٣٧٤-و
ل ع أعظم من نسبة م ك إلى ك ط، فتكون نسبة جـ ل إلى ل ع أعظم من نسبة جـ ك إلى ك ط. فتبين كما تبين من قبل أن نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع هي أعظم من نسبة قوس جـ ك إلى قوس ك ط. فعلى الوجهين قد تبين أن نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع أعظم من نسبة قوس جـ ك إلى قوس

3 ح ل ع: خ ل ع – 4 ح ل ع: خ ل ع – 7 ز د: ز ع – 12 ل ز: ل د – 13 ش غ جـ: ش ع جـ / ش غ م: ش ع م – 21 ز ل: ز ك – 22 ل ز: ك د.

كـ ط، وتكون نسبة الباقي إلى الباقي وهي نسبة قوس ط ص إلى قوس ص ع أعظم من نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع وأعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط. فنسبة قوس ط ص إلى قوس ص ع أعظم من نسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع ونسبة قوس جـ ل إلى قوس ل ع أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس كـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وأيضًا، فإنا نخرج من القطب دائرة تقطع قوس ط ه فيما بين نقطتي ص ه في الصورتين جميعًا، وتقطع قوس ع ب؛ ولتكن ش ر. ونجيز على نقطة ع قوسًا من دائرة موازية لدائرة ه ط؛ ولتكن قوس ع ث. وليكن ما فوق دائرة ا ب جـ من دائرة ل د جـ ليس بأعظم من نصف دائرة، ولتكن دائرة ل د جـ أعظم من دائرة ط ه. فيلزم من ذلك أن تكون دائرة ط ه أعظم من دائرة ع ث. فتبين كما تبين فيما مضى من برهان هذا الشكل أن نسبة قوس ع ث إلى قوس ث ش أعظم من نسبة قوس ط ر إلى قوس ش ر وأن نسبة قوس ط ر إلى ش ر أعظم من نسبة قوس ط ص إلى قوس ص ع. فتكون نسبة قوس ع ث إلى قوس ث ش أعظم من نسبة قوس ط ص إلى قوس ص ع. ونسبة قوس ط ص إلى قوس ص ع أعظم من نسبة قوس جـ كـ إلى قوس ط كـ.

وكذلك إن خرجت دوائر كم كانت، فقطعت قوس ا ب وأخرج من مواضع تقاطعها قسي موازية لقوس ط ه، كانت جميع القسي التي تخرج على النسب التي تبينت.

12 ط ر: ط س – 13 ط ر: ط س – 18 تقاطعها: تقاطعهما.

إذ قد قدمنا هذه المقدمات، فلنشرع الآن في تبيين ما ادعيناه مما يعرض للكواكب السبعة السيارة.

〈يو〉 ولنبدأ بالقمر.

ولنقرر هيئة حركات القمر مجتمعة، ثم نذكر ما يلزم عن ذلك. وقد بين بطلميوس في كتابه *في التعاليم* أن للقمر عدة حركات، وأنها مختلفات وعلى أقطار مختلفة ومراكز مختلفة. إلا أنه مع اختلاف الحركات، ليس يخرج مركز القمر عن سطح دائرة واحدة سمي الفلك المائل. وهذا الفلك هو دائرة من أعظم الدوائر التي تقع في الكرة التي مركزها مركز العالم، وهي قاطعة لكل واحدة من الدوائر العظام التي تقع في كرة العالم بنصفين؛ فهي تقطع دائرة البروج التي هي فلك الشمس على نقطتين متقابلتين، وهاتان النقطتان تسميان الجوزهرين، وهي تقطع دائرة معدل النهار أيضًا على نقطتين متقابلتين. والقمر يتحرك بجميع حركاته في سطح هذا الفلك المائل، أعني أن مركز القمر لا يخرج من سطح الفلك المائل. والحركة، التي تقال أنها حركة القمر، هي حركة مركز القمر. وكذلك حركات جميع الكواكب إنما هي حركات مراكزها. وحركة القمر التي ترى وهي التي تجتمع من جميع حركاته هي أبداً على توالي البروج وفي سطح الدائرة المائلة وهي، في الأزمنة المتساوية، مختلفة المقدار من أجل 〈أن〉 هذه الحركة التي ترى هي مجتمعة من حركات/ مختلفة حول مراكز مختلفة. وقد بيّن بطلميوس ذلك بالتفصيل ٣٧٤-ظ
وبالبراهين. إلا أن هذه الحركة التي ترى للقمر، مع اختلاف مقاديرها في الأزمنة المتغايرة، ليس تكون إلا على توالي البروج وفي سطح الفلك المائل. وإذا كان ذلك كذلك، فإن حركة القمر التي ترى هي أبداً من المغرب إلى المشرق وفي سطح الفلك المائل، وفي هذا الفلك المائل يتحرك بجملته حركة متساوية حول قطبي فلك البروج وعلى خلاف توالي البروج، فينتقل جميع سطح هذه الدوائر، أعني الفلك المائل حول قطبي فلك البروج وعلى خلاف توالي البروج. قد بين ذلك بطلميوس في كتابه *في التعاليم*، وهذه الحركة تسمى حركة الجوزهر. فإذا انتقل جميع سطح هذه الدائرة حول قطبي فلك البروج، فإن كل النقط التي تتوهم على محيط هذه الدائرة تتحرك على دوائر

7 مركز: مراكز – 8 التي: ذو – 11 النقطتان: النقطتا / الجوزهرين: الجوزهران – 19 وبالبراهين: والبراهين.

متوازية قطباها قطبا دائرة البروج. فالنقطتان اللتان هما الجوزهران تتحركان على دائرة البروج نفسها ولا تخرجان عنها، لأن الحركة هي على قطبي دائرة البروج؛ وكل نقطة من النقط الباقية، التي تتوهم على محيط الفلك المائل، تتحرك على دائرة موازية لدائرة البروج. وإذا كان ذلك كذلك، فإن ميل فلك القمر المائل عن دائرة البروج ليس يتغير مقداره بهذه الحركة، بل هو ثابت على حال واحدة.

وميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار يتغير مقداره بهذه الحركة، فيزيد وينقص، لأن الفلك المائل إذا تحرك حول قطبي دائرة البروج، فإن قطب الفلك المائل يتحرك حول قطبي دائرة البروج. وقطب دائرة البروج ليس يتغير بعده عن قطب دائرة معدل النهار، ولا يتغير وضع أحدهما عند الآخر، بل هما ثابتان على وضع واحد، والدائرة العظيمة التي تمرّ بهذين القطبين هي دائرة واحدة بعينها وتسمى دائرة الأقطاب. وإذا كان قطب الفلك المائل يتحرك حول قطب دائرة البروج، وكان قطب دائرة البروج وقطب دائرة معدل النهار ثابتين على وضع واحد، فإن قطب الفلك المائل تختلف أبعاده عن قطب معدل النهار، والبُعد الذي بين هذا القطب وبين قطب معدل النهار هو مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. وإذا كان قطب الفلك المائل يتحرك حول قطب دائرة البروج، فهو في الدورة الواحدة يصير على دائرة الأقطاب مرتين، والبُعد الذي بين قطب الفلك المائل وبين قطب دائرة البروج ليس يتغير مقداره، لأن حركته إنما هي حول قطب دائرة البروج، والبُعد الذي بين هذين القطبين هو مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج، وهذا الميل هو أقل بكثير من ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، على ما بينه بطلميوس. وقطب الفلك المائل يصير على دائرة الأقطاب في كل دورة مرتين، ففي إحدى المرتين يصير فيما بين قطب دائرة البروج وقطب دائرة معدل النهار، وفي المرة الأخرى يصير قطب دائرة البروج فيما <بين> قطب الفلك المائل وبين قطب معدل النهار. وإذا كان قطب الفلك المائل فيما بين قطب دائرة البروج وبين قطب معدل النهار، كان في هذه الحال أقرب ما يكون من قطب معدل النهار، وهذا البُعد هو مقدار ميل الفلك

10 بعده: بعد.

المائل عن دائرة معدل النهار، ففي هذه الحال أقل ما يكون ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. ثم إذا فارق قطب الفلك المائل دائرة الأقطاب، من بَعد هذه الحال، تزايد بُعدُه عن قطب معدل النهار وتزايد ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار، ثم لا يزال قطب الفلك المائل يتزايد بُعداً عن قطب معدل النهار إلى أن يصير مرة ثانية على دائرة الأقطاب. فإذا / صار في ٣٧٥-و
هذه الحال الثانية على دائرة الأقطاب، صار قطب دائرة البروج متوسطاً بينه وبين قطب معدل النهار، وكان في هذه الحال أبعد ما يكون عن قطب معدل النهار وكان الفلك المائل أعظم ما يكون ميلاً عن دائرة معدل النهار. ثم إذا فارق قطب الفلك المائل دائرة الأقطاب، من بَعد هذه الحال، تناقص بُعده عن قطب معدل النهار وتناقص ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار، ثم لا يزال بُعد قطب الفلك المائل عن <قطب> معدل النهار وميل الفلك المائل عن معدل النهار يتناقص إلى أن يعود قطب الفلك المائل إلى دائرة الأقطاب كذلك دائماً. فميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار يختلف وليس يثبت على حال واحدة. والنصف من هذا الفلك المائل أبداً شمالي عن دائرة معدل النهار والنصف منه جنوبي عنها، والنقطة التي هي وسط النصف الشمالي من الفلك المائل هي التي تحد نهاية ميل القمر إلى جهة الشمال، والنقطة التي هي وسط النصف الجنوبي هي التي تحد نهاية ميل القمر إلى جهة الجنوب؛ إلا أن هاتين النقطتين ليستا نقطتين ما بعينهما، بل تتبدلان، لأن كل نقطة من محيط الفلك المائل تتحرك على دائرة موازية لدائرة البروج، فليس في محيط الفلك المائل نقطة تتحرك على محيط دائرة معدل النهار. وإذا كان ذلك كذلك، كانت نقطتا التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار تتبدلان. وإذا تبدلت هاتان النقطتان، كانت نقطتا النهايتين الشمالية والجنوبية من الفلك المائل بالقياس إلى معدل النهار تتبدلان، ونهاية ميل القمر إلى جهة الشمال ونهاية ميله إلى جهة الجنوب ليستا ثابتتين على مقدار واحد، بل تختلفان من أجل اختلاف مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. إلا أن مركز القمر على تصاريف الأحوال يتحرك في سطح فلكه المائل من الشمال إلى الجنوب إلى أن ينتهي إلى منتصف النصف

4 يتزايد: تزايد – 14 هذا: هذه – 18 بعينهما: باعيانهما.

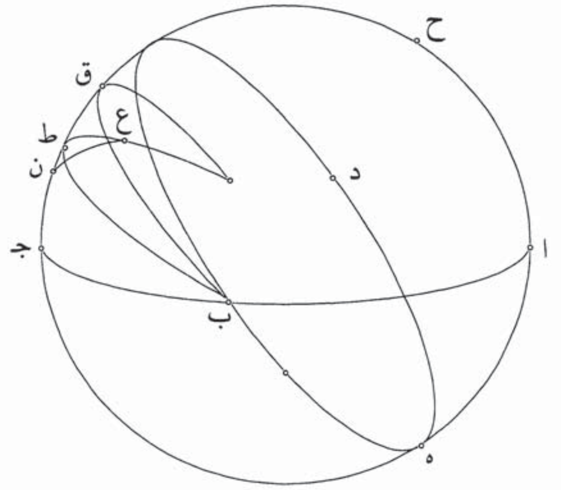
الجنوبي من فلك المائل، أعني النصف من فلكه المائل الذي يفصل دائرة معدل النهار – وأعني بمنتصف النصف الجنوبي النقطة التي تقسم النصف الجنوبي بنصفين في الآن الذي فيه يصير القمر في هذه النقطة – ثم تصير حركة القمر في الفلك المائل من الجنوب إلى الشمال إلى أن يصير إلى منتصف النصف الشمالي من فلكه، أعني النقطة التي تقسم النصف الشمالي من فلكه بنصفين في الآن الذي فيه يحصل القمر في هذه النقطة، ثم يصير متحركًا من الشمال إلى الجنوب كذلك دائمًا.

وإذا كان ذلك كذلك، فالقمر يتحرك في فلكه المائل من الشمال إلى الجنوب ومن الجنوب إلى الشمال. فحركة القمر في سطح فلكه المائل من الشمال إلى الجنوب ومن الجنوب إلى الشمال، إذا قيست حركته إلى قطبي معدل النهار. وهذه الحركة بعينها إذا قيست إلى دائرة البروج، كانت على توالي البروج؛ وإذا كانت على توالي البروج، كانت من المغرب إلى المشرق. وكل نقطة من الفلك المائل تتحرك على دائرة قطباها قطبا دائرة البروج وعلى خلاف توالي البروج. وإذا كانت على خلاف توالي البروج، فهي من المشرق إلى المغرب. فحركة القمر التي ترى هي من المغرب إلى المشرق على توالي البروج وهي تميل مع ذلك إلى الشمال والجنوب عن دائرة <معدل النهار> / وكل نقطة على محيط الفلك المائل هي تتحرك من المشرق إلى ٣٧٥-ظ المغرب على خلاف توالي البروج بمقدار حركة الجوزهر.

وإذ قد تبين ذلك، فليكن دائرة ا ب جـ أفقًا ودائرة ا ح جـ دائرة نصف النهار وقوس ا ب جـ النصف الشرقي من دائرة الأفق، وليكن فلك القمر المائل دائرة ب ه د، وليكن قوس ب ه د منها تحت الأفق، وليكن موضع القمر نقطة ب وليكن حركة القمر في فلكه المائل من نقطة ب إلى جهة نقطة ه، وليكن حركته في هذه الحال من الشمال إلى الجنوب، وليكن قطب معدل النهار نقطة ح. وندير على قطب ح قوسًا من الدائرة الزمانية التي تمرّ بنقطة ب، ولتكن قوس ب ط ع، ولتكن نقطة ط على دائرة نصف النهار. فإذا تحركت الكرة بالحركة السريعة، فإن نقطة ب تتحرك بالحركة السريعة. وإذا تحركت نقطة ب بالحركة السريعة زمانًا ما، فإن القمر يكون قد تحرك على

26 بالحركة: الحركة.

قوس ب ه بحركته التي تخصه وانتقل عن نقطة ب من فلكه؛ ومع ذلك فإن القمر ينتهي بالحركة السريعة إلى دائرة نصف النهار. فليكن موضع القمر من دائرة نصف النهار نقطة ن. وإذا انتهى القمر إلى دائرة نصف النهار، يكون قد قطع قوسًا من فلكه المائل وهو في هذه الحال يتحرك إلى جهة الجنوب، ومع ذلك من المغرب إلى المشرق على توالي البروج. فإذا صار مركز القمر على نقطة ن، كانت القوس التي قطعها القمر من فلكه المائل غربية عن دائرة نصف النهار، لأن حركة القمر في فلكه المائل من المغرب إلى المشرق. فقد صار ما قطعه من فلكه المائل غربيًا عن موضعه الذي هو فيه، فالقوس التي قطعها القمر من فلكه المائل في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة ن غربية عن دائرة نصف النهار. وهذه القوس تكون جنوبية عن الدائرة الزمانية لأن حركة القمر في هذه الحال من الشمال إلى الجنوب. فلتكن القوس من الفلك المائل التي تحرك عليها القمر في وقت كون القمر على دائرة نصف النهار قوس ع ن. وقد تقدم أن كل نقطة من الفلك المائل تتحرك أبداً على دائرة قطباها قطبا دائرة البروج، فنقطة ب من الفلك المائل ليس تثبت على دائرة ب ط الزمانية، بل تتحرك على دائرة قطباها قطبا دائرة البروج. ولنرسم على نقطة ب قوسًا من دائرة قطباها قطبا البروج، ولتكن قوس ب ق. فنقطة ب من الفلك المائل تتحرك على قوس ب ق



1 تخصه: تخفيه.

بالحركة التي تسمى حركة الجوزهر. وإذا كان ذلك كذلك، فالقوس التي قطعها القمر من فلكه المائل في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة ن ليس هي قوس ع ن في أكثر الأحوال، لأن نقطة ب من الفلك المائل ليس هي متحركة على قوس ب ع، بل على قوس ب ق؛ وقوس ب ق قطباها قطبا دائرة البروج.

وإذا كانت قوس ب ق قطباها قطبا دائرة البروج وليسا قطبا دائرة ب ط، فإن دائرة ب ق إما مماسة لدائرة ب ط وإما مقاطعة لها؛ وذلك أن الدائرة العظمى التي تخرج من قطب معدل النهار، الذي هو قطب دائرة ب ط، إلى نقطة ب إما أن تمر بقطب دائرة البروج، وإما ألا تمرّ / بها. فإن مرت بقطب ٣٧٦-و دائرة البروج، فإن الدائرة، التي تدار على نقطة ب التي قطبها قطب دائرة البروج، تكون مماسة لدائرة ب ط. وإن كان قطب دائرة البروج مع ذلك أقرب إلى نقطة ب من قطب معدل النهار، فإن الدائرة المرسومة على نقطة ب، التي قطبها قطب دائرة البروج، تكون جميعها شمالياً عن دائرة ب ط. وإن كان قطب دائرة البروج أبعد عن نقطة ب من قطب دائرة معدل النهار، فإن الدائرة التي قطبها قطب دائرة البروج، المرسومة على نقطة ب، تكون جميعها جنوبياً عن دائرة ب ط. وإن كانت الدائرة العظيمة التي تخرج من قطب معدل النهار إلى نقطة ب لا تمرّ بقطب دائرة البروج، فإن الدائرة التي قطبها قطب دائرة البروج، المرسومة على نقطة ب، تقطع دائرة ب ط؛ لأن كل دائرتين تلتقيان على نقطة واحدة منهما إما متماستين وإما متقاطعتين. فإذا لم تكن الدائرة العظمى تمرّ بقطبي هاتين الدائرتين، فليس هاتان الدائرتان متماستين؛ وإذا لم تكونا متماستين، فهما متقاطعتان. وإذا كانت الدائرة التي تخرج من قطب معدل النهار إلى نقطة ب لا تمرّ بقطب دائرة البروج، فإن قطب دائرة البروج إما أن يكون فوق هذه الدائرة أو تحتها. وأعني بفوق وتحت بالقياس إلى نقطة ط؛ فإن كان قطب دائرة البروج فوق الدائرة العظيمة التي تخرج من قطب معدل النهار إلى نقطة ب، فإن الدائرة العظيمة التي تخرج من قطب دائرة البروج إلى نقطة ب تحيط مع قوس ب ط

2 فلكه: فلك.

بزاوية حادة مما يلي نقطة ط، أعني أنها تكون مائلة على دائرة ب ط إلى جهة ط، لأن الدائرة التي تخرج من قطب معدل النهار إلى نقطة ب تحيط مع قوس ب ط بزاوية قائمة وتكون قائمة عليها. وإذا كانت الدائرة التي تخرج من قطب دائرة البروج إلى نقطة ب تحيط مع قوس ب ط بزاوية حادة، فإن الدائرة التي قطبها قطب دائرة البروج التي تمرّ بنقطة ب القاطعة لدائرة ب ط تكون قوسها العليا جنوبية عن دائرة ب ط وتكون قوسها السفلى شمالية عن دائرة ب ط. وإن كان قطب دائرة البروج تحت الدائرة العظيمة الخارجة من قطب معدل النهار إلى نقطة ب، فإن الدائرة العظيمة التي تخرج من قطب دائرة البروج إلى نقطة ب تحيط مع قوس ب ط مما يلي نقطة ط بزاوية منفرجة. وإذا كانت هذه الزاوية منفرجة، فإن الدائرة التي قطبها قطب دائرة البروج التي تمرّ بنقطة ب تكون قوسها العليا شمالية عن دائرة ب ط وتكون قوسها السفلى جنوبية عن دائرة ب ط.

فقد تبين مما بيناه أن القوس العليا من دائرة ب ق قد تكون شمالية عن قوس ب ط وقد تكون جنوبية عنها، وقد تكون مماسة لها، وقد تكون مقاطعة لها. وإذا كانت دائرة ب ق مقاطعة لدائرة ب ط، فإن التقاطع قد يكون على أجزاء مختلفة. كذلك يكون الدوائر ‹المتقدمة›، / إذا لم تكن ٣٧٦-ظ
الدائرتان جميعًا عظيمتين. فالقوس العليا من دائرة ب ق قد تكون نصف دائرة، وقد تكون أعظم من نصف دائرة، وقد تكون أصغر من نصف دائرة. وإذا كانت القوس العليا من دائرة ب ق قد يمكن أن تكون أقل من نصف دائرة وليست جزءاً محدوداً، فإن هذه القوس قد يمكن أن تكون في غاية الصغر، فالقوس العليا من دائرة ب ق التي طرفاها على دائرة ب ط قد يمكن أن تكون مقداراً ‹ما› تقطعه حركةُ الجوزهر في الزمان الذي يصير فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن. فإذا كانت القوس العليا من دائرة ب ق بهذا المقدار، فإن نقطة ب من الفلك المائل تنتقل عن دائرة ب ط وتتحرك على دائرة ب ق وتعود إلى دائرة ب ط في الوقت الذي يصير فيه القمر على نقطة ن. وإذا كان ذلك كذلك، فإن نقطة ع من الفلك المائل هي ‹في› هذا الحال

نقطة ب من الفلك المائل، وقوس ع ن هي القوس التي قطعها القمرُ في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة ن.

وإذا كانت القوس العليا من دائرة ب ق التي طرفاها على دائرة ب ط، أعظم من مقدار ما تقطعه حركةُ الجوزهر في الزمان الذي يصير فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن، فإن نقطة ب تنتقل عن دائرة ب ط وتتحرك على دائرة ب ق. وإذا صار القمر على نقطة ن، لم تكن نقطة ب من الفلك المائل قد عادت إلى دائرة ب ط، بل تكون على القوس العليا من دائرة ب ق خارجة عن دائرة ب ط. وإن كانت القوس العليا من دائرة ب ق أصغر من مقدار ما تقطعه حركةُ الجوزهر في الزمان الذي يصير فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن، فإن نقطة ب تنتقل عن دائرة ب ط وتتحرك على دائرة ب ق وتعود إلى دائرة ب ط قبل أن يصير القمر إلى نقطة ن، ثم تنتقل أيضًا عن دائرة ب ط وتتحرك على القطعة العظمى وهي القوس السفلى من دائرة ب ق. فإذا صار القمر على نقطة ن، تكون نقطة ب من الفلك المائل على دائرة ب ق وخارجة عن دائرة ب ط للجهة السفلى.

فإذا صار القمر من نقطة ب إلى نقطة ن، فإن نقطة ب من الفلك المائل قد تكون على دائرة ب ط في حال كون القمر على نقطة ن وقد تكون خارجة عنها؛ وكونها على دائرة ب ط هو في وضع واحد من الأوضاع؛ وذلك إذا كانت القوس العليا من دائرة ب ق مساوية لمقدار ما تقطعه حركة الجوزهر في الزمان الذي يصير فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن؛ وكونها خارجة عن دائرة ب ط هي في جميع الأوضاع الباقية.

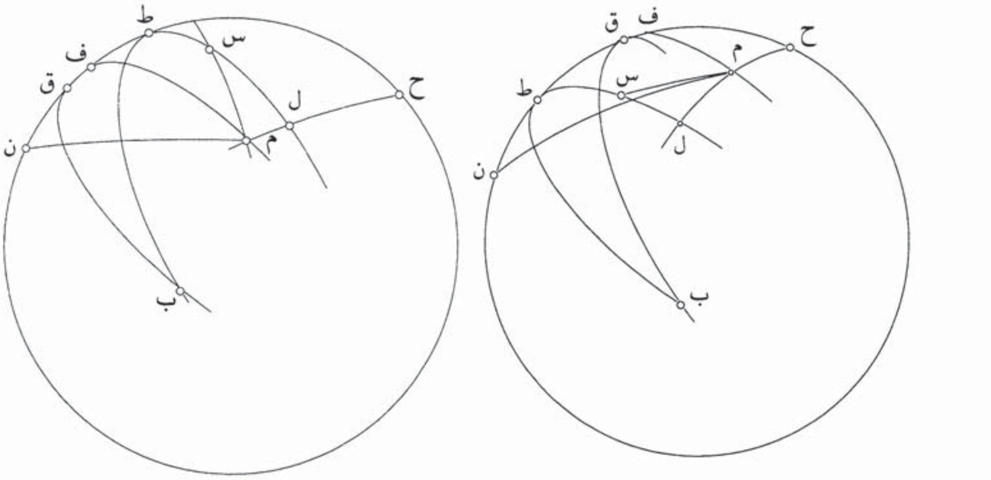
وإذا كانت نقطة ب على دائرة ب ط في حال كون القمر على نقطة ن، فإن نقطة ب من الفلك المائل هي نقطة ع. وإذا كانت نقطة ب خارجة عن دائرة ب ط، فهي على دائرة ب ق، وهي من الفلك المائل، فهي نقطة التقاطع بين دائرة ب ق وبين الفلك المائل.

فقد تبين مما بيناه أن قوس ع ن من الفلك المائل في أكثر الأحوال ليس تكون القوس التي يقطعها القمر في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى

نقطة ن وأن نقطة ع ليست هي نقطة ب في أكثر الأحوال. وإذا كانت نقطة ع ليست هي نقطة ب من الفلك المائل وكانت نقطة ب من الفلك المائل في حال كون القمر على نقطة ن خارجة عن دائرة ب ط / ٣٧٧-و وأن نقطة ب هي نقطة التقاطع بين دائرة ب ق وبين الفلك المائل، فلتكن نقطة ب في حال كون القمر على نقطة ن مثل نقطة م. فنقطة م قد تكون شمالية عن دائرة ب ط وقد تكون جنوبية عنها، لأن كل واحدة من القوس العليا من دائرة ب ق ومن القوس السفلى قد تكون شمالية عن دائرة ب ط وقد تكون جنوبية عنها، فنقطة م قد تكون شمالية عن دائرة ب ط وقد تكون جنوبية عنها.

ونقطة ب من دائرة ب ق تتحرك أبداً على دائرة ب ط، لأن دائرة ب ق ليس يتغير وضعها عن دائرة ب ط، لأن قطبيهما - وهما قطب معدل النهار وقطب دائرة البروج - ليس يتغير وضع أحدهما عند الآخر، فنقطة ب من دائرة ب ق تتحرك أبداً على دائرة ب ط. ولتكن قوس ب س هي الزمان الذي صار فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن. فتكون نقطة س هي نقطة ب من دائرة ب ق؛ وتكون نقطة ب من الفلك المائل هي نقطة م، فنقطتا س م هما على دائرة ب ق؛ فلتكن قوس س م قوساً من دائرة ب ق. فتكون قوس س م هي التي قطعتها نقطة ب من الفلك المائل بحركة الجوزهر في الزمان الذي صار فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن، لأن نقطة س هي نقطة ب التي كانت مشتركة للفلك المائل ولدائرة ب ق. ونقطة م من دائرة ب ق هي النقطة التي صارت إليها نقطة ب من الفلك المائل، فقوس س م هي التي قطعتها نقطة ب من دائرة ب ق بحركة الجوزهر. وقوس س م غربية عن نقطة س، لأنه قد تبين أن كل نقطة من الفلك المائل فهي تتحرك على دائرة قطباها قطبا دائرة البروج ومن المشرق إلى المغرب على خلاف توالي البروج. فقوس س م غربية عن نقطة س وتكون قوس م ن هي القوس التي قطعها القمر من فلكه المائل بحركته التي تخصه في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة ن، لأن نقطة م هي نقطة ب من الفلك المائل. ونقطة م قد تكون شمالية عن دائرة ب ط، وقد تكون جنوبية عنها.

2 نقطة (الثانية): نقط - 12 ب س: ب ص - 19 صارت: صار / ب: ن.

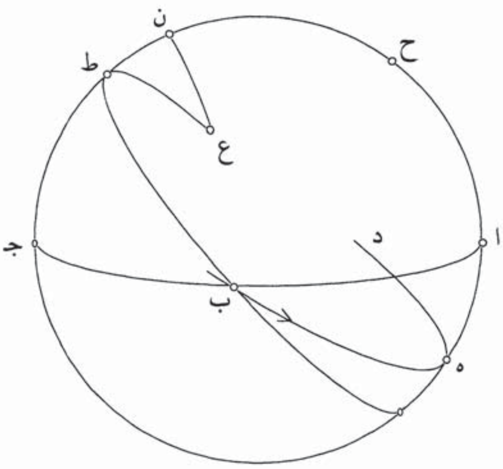


فنفرضها في الصورة على كلا الوضعين ونجيز على نقطة م في كلا الوضعين قوسًا من دائرة عظيمة تمر بنقطة ح؛ فهذه الدائرة تقطع قوس ب ط س، فلتقطعها على نقطة ل. ونجيز على نقطة م أيضًا في كلا الوضعين قوسًا من دائرة زمانية، ولتكن قوس م ف. فتكون قوس ن ف هي ميل قوس م ن التي تحركها القمرُ في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة ن. وتكون قوس ف ط هي ميل قوس س م التي تحركتها نقطة ب بحركة الجوزهر في الزمان المذكور، لأن قوس ف ط مساوية لقوس م ل ونقطة س هي غربية عن دائرة نصف النهار. لأن نقطة ب من الفلك - إذا تحركت قوس ب ط بالحركة السريعة - انتهت إلى نقطة ط، يكون القمر شرقيًا عن دائرة نصف النهار، لأنه يكون قد تحرك بحركته التي تخصه من المغرب إلى المشرق، فيكون شرقيًا عن نقطة ب التي قد صارت على نقطة ط، فيكون شرقيًا عن دائرة نصف النهار، فهو ينتهي إلى دائرة نصف النهار في زمان آخر زائداً على زمان ب ط، وفي هذا الزمان الزائد تكون نقطة ب قد تحركت من نقطة ط إلى جهة المغرب، فتصير غربية عن دائرة نصف النهار. ونقطة س هي نقطة ب، فنقطة س هي غربية عن دائرة نصف النهار، فتكون قوس ب س هي الزمان الذي تحرك فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ن / وتكون قوس ب ط هي ٣٧٧-ظ

6 تحركتها: تحركها – 9 انتهت: وانتهت.

الزمان الذي فصلته دائرة نصف النهار من زمان حركة القمر. وجميع ذلك على ما في الصورة الأولى، إذا كانت حركة القمر في فلكه المائل من الشمال إلى الجنوب.

فإن كانت حركة القمر من الجنوب إلى الشمال، فإن قوس ب ه د من الفلك المائل تكون شمالية عن دائرة ب ط وتكون أيضًا تحت الأفق، لأن حركة القمر هي من المغرب إلى المشرق وتكون حركة القمر من نقطة ب إلى نقطة ه. فإذا صار القمر على دائرة نصف النهار، صار الفلك المائل مثل قوس ع ن المائلة إلى الشمال عن دائرة ب ط على ما في الصورة الثانية. وكانت جميع القسي الباقية التي في الصورة الثانية نظائر لما في الصورة الأولى. فقد تبين أن هيئة حركة القمر وهيئة القسي التي يقطعها القمر بجميع حركاته وأوضاع القسي بعضها من بعض، هي على ما في الصورتين اللتين رسمناهما.



أما إذا كانت حركة القمر في فلكه المائل من الشمال إلى الجنوب، فعلى ما في الصورة الأولى. وأما إذا كانت حركته في فلكه المائل من الجنوب إلى الشمال، فعلى ما في الصورة الثانية. وإن كانت حركته من الشمال إلى الجنوب، ثم صارت من الجنوب إلى الشمال أو كانت من الجنوب إلى الشمال، ثم صارت من الشمال إلى الجنوب، فإنه في آخر حركته على تصاريف الأحوال، إما أن يكون جنوبيًا عن دائرة ب ط، وإما أن يكون

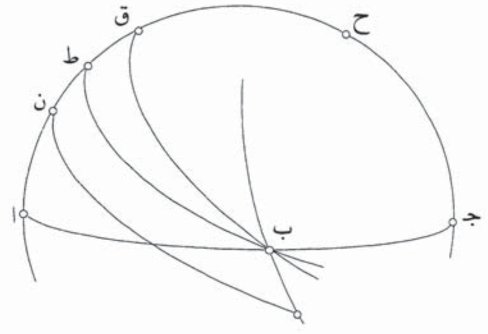
10 القسي: قسي – 17 جنوبيًا: جنوبي.

شماليًا عنها، وإما أن يكون في آخر حركته على دائرة ب ط نفسها، وهو أن يكون قد انتقل عنها وعاد إليها.

فإن كان في آخر حركته جنوبيًا عن دائرة ب ط، فالصورة هي الصورة الثالثة. وقد تكون نقطة م في الصورة الثالثة جنوبية عن دائرة ب ط وقد تكون شمالية عنها. وإن كان القمر في آخر حركته شماليًا عن دائرة ب ط، فالصورة هي الصورة الثالثة أيضًا، إلا أن نقطة ن تكون شمالية عن نقطة ط وتكون نقطة م إما شمالية عن دائرة ب ط وإما جنوبية عنها. وإن كان القمر في آخر حركته على دائرة ب ط، فإن نقطة ن تكون هي نقطة ط ولا يكون للقمر ميل عن دائرة ب ط؛ وتكون الصورة هي الصورة الرابعة، وتكون نقطة م إما جنوبية عن دائرة ب ط وإما شمالية عنها. وقد تكون نقطة م على نفس دائرة ب ط في بعض الأوقات، وذلك إذا فارقت دائرة ب ط وعادت إليها في الزمان الذي تحرك فيه القمر من نقطة ب إلى نقطة ط.

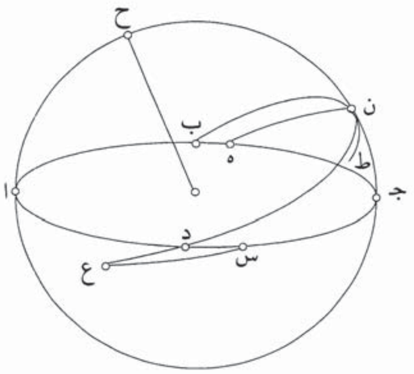
ويلزم [من] جميع ما ذكرنا، إن كانت نقطة ب مرتفعة من الأفق وإن كانت تحت الأفق، لأنا لم نستعمل الأفق في شيء مما ذكرناه.

فلنسم قوس ب ط على جميع الأوضاع الزمان المحصل، ونسمي قوس ن ط ميل حركة القمر، ونسمي قوس ق ط ميل حركة الجوزهر. والذي نحتاج إلى استعماله فيما نشرع في تبيينه من خواصّ حركة القمر هو الزمان المحصل وميل حركة القمر وميل حركة الجوزهر فقط؛ / ونستغني عن ٣٧٨-و
القسي الباقية ‹و›عن أوضاعها وعن اختلاف أوضاعها. ونحن نبين من بَعد كيف نستخرج مقادير هذه القسي في الأوقات المعلومة.



4 جنوبية: جنوبيا – 9 ميل: ميلا – 17 ق ط: ب ط.

وأيضًا، فليكن دائرة ا ب جـ أفقًا ودائرة ا ح جـ دائرة نصف النهار، وليكن قطب معدل النهار نقطة ح. وليكن قوس ا د جـ نصف النهار الغربي من الأفق، وليكن القمر على نقطة ن من دائرة نصف النهار. ونجيز على نقطة ن دائرة زمانية، ولتكن ب ن د؛ ولتكن قوس ن ه من فلك القمر المائل، ولنفرضها شمالية عن دائرة ب ن د وجنوبية عنها، أعني على الوضعين جميعًا. وليكن قوس ن ط من الدائرة التي قطباها قطبا دائرة البروج، ولنفرضها أيضًا على الوضعين جميعًا، أعني شمالية وجنوبية عن دائرة ب ن د. فالقمر يتحرك بحركته التي تخصه على قوس ن ه؛ ونقطة ن من فلكه المائل تتحرك بحركة الجوزهر على قوس ن ط؛ ونقطة ن من دائرة ن ط تتحرك بالحركة السريعة على دائرة ن د.

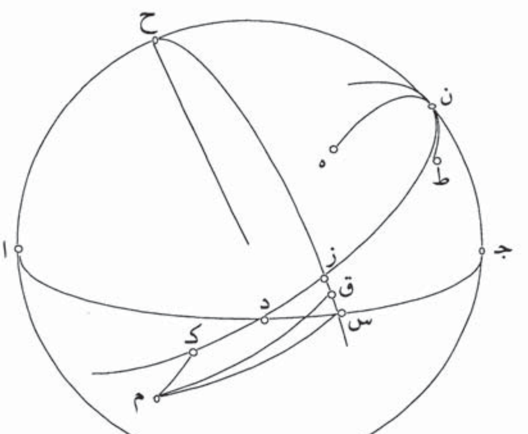


فإذا صار القمر إلى الأفق الغربي، صارت القوس التي قطعها القمر من فلكه المائل تحت الأفق، لأنها تكون غربية عن موضعه. فإن كانت حركة القمر من الشمال إلى الجنوب، صارت القوس من فلكه المائل مثل قوس ع س الجنوبية. وإن كانت حركته من الجنوب إلى الشمال، كانت مثل قوس ع س الشمالية. وكذلك إن كانت حركته من الشمال إلى الجنوب، ثم من الجنوب إلى الشمال، أو من الجنوب إلى الشمال ثم من الشمال إلى الجنوب، وكان في آخر حركته خارجًا عن دائرة ن د، فإن وضع القوس من الفلك المائل هو أحد الوضعين المفروضين، أعني بقوس ع س الجنوبية أو

2 نصف: النصف.

الشمالية. وإن كان في آخر حركته على دائرة ن د، فإنه يكون على نقطة د ولا ميل له عن دائرة ن د. وإذا كان القمر شمالياً عن دائرة ن د أو جنوبياً عنها على مثل نقطة س، فإن نقطة ن من فلكه المائل تصير مثل نقطة م في أكثر الأوقات وفي بعض الأوقات تصير مثل نقطة ع، وتصير قوس ن ط مثل قوس كـ م، فتكون قوس ن كـ هي الزمان الذي صار فيه القمر من نقطة ن إلى نقطة س، وتكون قوس م س في أكثر الأوقات هي القوس التي قطعها القمر من فلكه المائل، وتكون قوس كـ م هي التي قطعتها نقطة ن التي كانت موضع القمر من الفلك المائل من قوس ن ط؛ ‹و›في بعض الأوقات تكون قوس ع س هي القوس التي قطعها القمر في فلكه في الزمان الذي صار فيه القمر من نقطة ن / إلى نقطة س. ونجيز على نقطتي ح س قوساً من دائرة عظيمة؛ ولتقطع الدائرةَ الزمانية على نقطة ز. ونجيز على نقطة م قوساً من دائرة زمانية؛ ولتقطع قوسَ ح س على نقطة ق. فتكون قوس ن د هي الزمان المحصل، وتكون قوس س ز هي ميل حركة القمر، وتكون قوس ق ز هي مثل ميل حركة الجوزهر. ٣٧٨-ظ

وجميع هذه المعاني تلزم إن كانت نقطة س فوق الأفق.



وإن كانت تحت الأفق، أعني أنه إذا تحرك القمر من موضع إلى موضع بالحركة السريعة، صار له بتلك الحركة زمان محصل على تصاريف الأحوال،

5 هي: هو – 10 نقطتي: نقطة – 13 ق ز: ق ن.

وصار له في أكثر الأوقات ميل عن الدائرة الزمانية التي كان عليها ، وصار لموضعه ميل عن الدائرة الزمانية ، أعني الميل الذي سميناه ميل حركة الجوزهر .

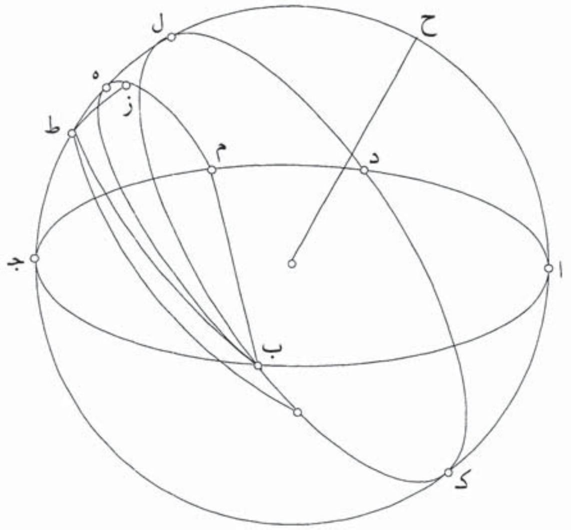
فعلى هذه الهيئة وعلى هذا التفصيل تكون حركة القمر في طلوعه وغروبه وحركته فوق الأفق وحركته تحت الأفق .

〈يز〉 فأما الشمس، فإن حركتها الذاتية التي تخصها هي حركة واحدة وهي على توالي البروج من المغرب إلى المشرق، لأن توالي البروج هي من المغرب إلى المشرق ومركز الشمس أبداً في سطح دائرة البروج وغير خارج هذا السطح ؛ إلا أن دائرة البروج تقطع دائرة معدل النهار على نقطتين متقابلتين هما نقطتا الاعتدالين، فالنصف من دائرة البروج أبداً شمالي عن دائرة معدل النهار والنصف منها جنوبي عنها ، وهذان النصفان مائلان على دائرة معدل النهار ، وهذا الميل ثابت على مقدار واحد لا يتغير . والنصفان اللذان عن جنبتي معدل النهار هما نصفان بعينهما لا يتغيران ، لأن نقطتي التقاطع اللتين هما نقطتا الاعتدالين لا تتغيران ولا تتبدلان ، وهما نقطتان بعينهما . وكذلك النقطتان اللتين تفصلان كل واحد من نصفي دائرة البروج اللذين عن جنبتي معدل النهار بنصفين هما نقطتان بعينهما لا تتيغران . وهاتان النقطتان تسميان الانقلابين، الشمالية منهما تسمى الانقلاب الصيفي والجنوبية منهما تسمى الانقلاب الشتوي. فنقطة الانقلاب الصيفي هي عند نهاية ميل دائرة البروج إلى جهة الشمال عن دائرة معدل النهار ونقطة الانقلاب الشتوي هي نهاية ميل دائرة البروج إلى الجنوب عن دائرة معدل النهار . وإذا كانت الشمس تتحرك حول دائرة البروج مقاطعة لدائرة معدل النهار ، وكان نصفها شماليًا عن دائرة معدل النهار ونصفها جنوبيًا عنها ، فإن الشمس بحركتها التي تخصها في دائرة البروج تميل عن معدل النهار إلى الشمال وإلى الجنوب. وتكون نقطة الانقلاب الصيفي هي التي تحدّ نهاية ميل الشمس إلى الجهة الشمالية ، وتكون نقطة الانقلاب الشتوي هي تحد نهاية ميل الشمس إلى الجهة الجنوبية . فالشمس إذا كانت تتحرك

13 بعينهما : بأعيانهما – 15 بعينهما : بأعيانهما – 16 بعينهما: بأعيانهما .

بحركتها التي تخصها من الانقلاب الصيفي إلى الانقلاب الشتوي، فهي متحركة من الشمال إلى الجنوب، إذا قيست حركتها إلى قطبي معدل النهار. وإذا كانت تتحرك من الانقلاب الشتوي إلى الانقلاب الصيفي، فهي متحركة من الجنوب إلى الشمال بالقياس إلى قطبي معدل النهار. وهذه الحركة بعينها، أعني حركة الشمس في دائرة البروج إذا قيست إلى دائرة البروج نفسها، فهي متحركة من المغرب / إلى المشرق لأن هذه الحركة هي على ٣٧٩-و
توالي البروج، وتوالي البروج هو من المغرب إلى المشرق. فالشمس تتحرك حركة واحدة في سطح دائرة البروج وهذه الحركة هي من المغرب إلى المشرق، ومع ذلك فهي مائلة إلى الشمال وإلى الجنوب.

وإذ قد تقرر ذلك، فليكن دائرة ا ب جـ د أفقًا، وليكن دائرة ا ح دائرة نصف النهار، وليكن قطب معدل النهار نقطة ح. وليكن دائرة البروج دائرة ب ك د ل، ولتكن قوس ب ك د تحت الأفق وقوس د ل ب فوق الأفق، وليكن توالي البروج من نقطة ب إلى نقطة ك وما يليها. وليكن موضع الشمس من دائرة البروج نقطة ‹ب›. ونجيز على نقطة ب قوسًا من دائرة زمانية، ولتكن ب ه م؛ ولتقطع هذه القوس دائرة نصف النهار على نقطة ه.



12 ب ك د: ب ك.

فإذا تحركت الكرة بالحركة السريعة، فإن نقطة ب من دائرة البروج تتحرك عى دائرة ب ه م ولا تخرج عنها، لأن دائرة البروج ليس يتغير وضعها عند معدل النهار ولا عند واحدة من الدوائر الموازية لمعدل النهار؛ وذلك لأن بُعد ما بين قطب دائرة البروج وقطب دائرة معدل النهار لا يتغير ووضع أحدهما عند الآخر لا يتغير، فنقطة ب من دائرة البروج تتحرك أبداً على دائرة ب ه م. والشمس تصير على كل حال بالحركة السريعة من نقطة ب إلى دائرة نصف النهار. والشمس تتحرك دائماً بحركتها التي تخصها في سطح دائرة البروج وحول دائرة البروج. والشمس تصير من نقطة ب إلى دائرة نصف النهار في زمان ما، والشمس في ذلك القدر من الزمان تقطع من دائرة البروج بحركتها التي تخصها قوساً ما. وإذا كانت الشمس تتحرك حول دائرة البروج على توالي البروج، فهي تتحرك على قوس ب ك من نقطة ب إلى جهة نقطة ك، وقوس ب ك هي مقاطعة لقوس ب ه، فالشمس بحركتها التي تخصها تنتقل عن دائرة ب ه وتميل إلى الجنوب عنها، إذا كانت قوس ب ك جنوبية عن دائرة ب ه. فإذا صارت الشمس إلى دائرة نصف النهار، تكون جنوبية عن دائرة ب ه. فليكن موضع الشمس من دائرة نصف النهار نقطة ط، فتكون القوس التي قطعتها الشمس من دائرة البروج غربية عن نقطة ط، لأن حركة الشمس على دائرة البروج من المغرب إلى المشرق. ونقطة ب من دائرة البروج ليس تفارق دائرة ب ه م، فالقوس من دائرة البروج التي قطعتها الشمس في الزمان الذي صارت فيه الشمس من نقطة ب إلى نقطة ط، يكون وضعها مثل وضع قوس ز ط، فيكون نقطة ز هي نقطة ب، وذلك لأن نقطة ب إذا صارت إلى نقطة ه، كانت قوس ب ك شرقية عن دائرة نصف النهار. ومركز الشمس على دائرة ب ك وخارج عن دائرة ب ه، فموضع مركز الشمس يكون في تلك الحال شرقياً عن دائرة نصف النهار. ثم من بعد هذا الوقت يصير مركز الشمس إلى دائرة نصف النهار، فمركز الشمس يصير إلى دائرة نصف النهار من بعد أن تصير نقطة ب إلى نقطة ه بزمان ما. فلذلك إذا صار مركز الشمس إلى دائرة نصف النهار، تكون نقطة ب قد تحركت على قوس ب م، فصارت غربية عن دائرة نصف النهار،

1 تحركت: تحرك / بالحركة: الحركة.

فهي تكون مثل نقطة ز. فإذا كانت الشمس عند نقطة ب وكانت حركتها / من الشمال إلى الجنوب، فإنها إذا صارت على دائرة نصف النهار، تكون جنوبية عن الدائرة الزمانية التي تمرّ بنقطة ب؛ وكذلك إن كانت نقطة ب فوق الأفق وإن كانت تحت الأفق. ولأن قوس ح ط خارجة من قطب معدل النهار، تكون قوس ط ه ميل قوس ز ط من دائرة البروج من دائرة ب ه م الزمانية، وتكون قوس ب ز هي الزمان الذي صارت فيه الشمس من نقطة ب إلى نقطة ط. فلنسم قوس ب ه الزمان المحصل، ونسمي قوس ط ه ميل حركة الشمس. ٣٧٩-ظ

وأيضًا، فإنا نفرض قوس ب ل د الشمالية من دائرة البروج تحت الأفق وقوس ب ك د فوق الأفق ونفرض موضع الشمس نقطة ب. فتكون حركة الشمس التي تخصها على قوس ب ل من نقطة ب إلى جهة ل، فإذا صارت الشمس إلى دائرة نصف النهار، كانت القوس التي قطعتها الشمس من دائرة البروج غربية عن دائرة نصف النهار وشمالية عن دائرة ب ه م، فهي تكون ميل قوس ز س، فتكون قوس ب ه هي الزمان المحصل وتكون قوس س ه هي ⟨ميل⟩ حركة الشمس. وكذلك يلزم إذا تحركت الشمس من دائرة نصف النهار إلى أفق المغرب، أعني أنه يكون لها زمان محصل وميل عن الدائرة الزمانية، التي تمرّ بنقطة ط أو نقطة س، لأن ذلك يتبين كما تبين في هيئة حركة القمر. وكذلك أيضًا يلزم إن كانت حركة الشمس من دائرة نصف النهار إلى نقطة فوق الأفق الغربي إلى نقطة تحت الأفق الغربي.

فعلى هذه الصفة تكون هيئة حركة الشمس في طلوعها وغروبها وفي حركتها فوق الأفق وفي حركتها تحت الأفق، وإن كانت حركة الشمس في الزمان الذي تصير فيه من نقطة ب إلى دائرة نصف النهار من الشمال إلى الجنوب ثم من الجنوب إلى الشمال أو من الجنوب إلى الشمال ثم من الشمال إلى الجنوب لأنها في آخر حركتها إما إن تكون خارجة عن دائرة ب ه ز وإما أن تكون على نفس دائرة ب ه ز. فإن كانت خارجة عن دائرة ب ه ز، فهي إما جنوبية عنها وإما شمالية عنها؛ وإذا كانت كذلك، فإن موضعها يكون نقطة ط أو نقطة س، ⟨و⟩تكون قوس ب ه هي الزمان

17 يتبين: تبين – 20 الصفة: قد تقرأ الصيغة – 25 ب ه ز: ب ه د، وكذلك فيما يلي.

المحصل وتكون قوس ط ه أو قوس س ه هي ميلها في الحال عن دائرة ب ه ز؛ وإن كانت في آخر حركتها على دائرة ب ه ز، فإن موضعها هو نقطة ه والزمان المحصل هو قوس ب ه، ولا ميل لها عن دائرة ب ه ز.

<**يح**> فأما الكواكب الخمسة السيارة، فإن لكل واحد منها فلك مائل نظير لفلك القمر المائل، وكل واحد من هذه الأفلاك مقاطع لدائرة معدل النهار؛ إلا أن من هذه الأفلاك ما ليس يتغير ميله بالقياس إلى دائرة البروج تغيراً محسوساً، وهي أفلاك الكواكب العلوية، أعني زحل والمشتري والمريخ؛ ومنها ما يتغير ميله بالقياس إلى دائرة البروج وهو فلكا الزهرة وعطارد. وذلك أن كل واحد من فلكي هذين الكوكبين يتحرك بجملته ويميل نحو دائرة البروج إلى إن ينطبق عليها ثم يميل إلى الجهة الأخرى وينتهي إلى حد من الميل ثم يعود متحركًا إلى دائرة البروج إلى أن ينطبق عليها ثم يميل إلى الجهة الأولى، كذلك دائمًا على ما ذكره بطلميوس في كتابه *في التعاليم*؛ إلا أن هذه الحال ليس يخرج كل واحد من هذين الفلكين عن أن يكون مقاطعًا لدائرة معدل النهار ومائلاً عنها، وحركة كل واحد من هذين الفلكين إلى
٣٨٠-و دائرة البروج / وانطباقه عليها وميله إلى الجهة الأخرى عنها ورجوعه إليها، ليس يصير بها منطبقًا على دائرة معدل النهار، إنما يختلف بهذه الحركة ميله عن معدل النهار فقط، لأن ميل كل واحد من هذين الفلكين عن دائرة البروج ميل يسير، وميل دائرة البروج ميل كثير، فميل كل واحد من هذين الفلكين عن دائرة معدل النهار أضعاف كثيرة لميله عن دائرة البروج. فليس يصير من أجل انطباقه على دائرة البروج وميله إلى الجهتين منطبقًا على دائرة معدل النهار، بل إنما يتغير مقدار ميله عن دائرة معدل النهار فقط. و<ميل> صورة جميع أفلاك الكواكب الخمسة السيارة بالقياس إلى دائرة معدل النهار كميل صورة فلك القمر المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار؛ وكل واحد من هذه الأفلاك مقاطع لدائرة البروج على نقطتين متقابلتين، وهاتان النقطتان من كل واحد من أفلاك الكواكب الخمسة المائلة تسميان الجوزهرين. إلا أن الفرق بين هذه الجوزهرات وبين جوزهري القمر أن جوزهري القمر تتحرك

5 نظير: نظيرا – 25 الجوزهرين: الجوزهران.

حركة سريعة تظهر للحسّ في اليوم الواحد، وجوزهرات الكواكب تتحرك حركة بطيئة ليس تظهر للحس في اليوم الواحد ولا في الأيام اليسيرة. وذلك أن كل واحد من أفلاك الكواكب الخمسة المائلة يتحرك بجملته حول قطبي دائرة البروج كمثل صورة حركة فلك القمر المائل؛ إلا أن حركة أفلاك الكواكب حول قطبي دائرة البروج بطيئة جداً على ما بيّن ذلك بطلميوس وغيره، وأنها مساوية لحركة الكواكب الثابتة؛ فهذه الحركة في اليوم الواحد والأيام اليسيرة ليست تظهر للحسّ. وكل واحد من الكواكب الخمسة يتحرك حول فلكه المائل، وإذا قيست حركته حول فلكه المائل إلى دائرة البروج، كانت حركته على توالي البروج إذا كان مستقيماً. وإذا كان كل واحد من هذه الكواكب يتحرك على توالي البروج بالقياس إلى دائرة البروج، فهو يتحرك من المغرب إلى المشرق. وإذا كان الفلك المائل لكل واحد من هذه الكواكب الخمسة مقاطعًا لدائرة معدل النهار وكان الكوكب يتحرك حول فلكه المائل، فكل واحد من هذه الكواكب إذن يتحرك من الشمال إلى الجنوب ومن الجنوب إلى الشمال بالقياس إلى قطبي معدل النهار، بمثل ما يعرض للشمس والقمر. فهيئة حركات كل واحد من الكواكب الخمسة في حركتها من المغرب إلى المشرق وفي حركتها من الشمال إلى الجنوب ومن الجنوب إلى الشمال، كهيئة حركات القمر في حركته من المغرب إلى المشرق وفي حركته من الشمال إلى الجنوب ومن الجنوب إلى الشمال؛ إلا أن هيئة حركات هذه الكواكب الخمسة تخالف هيئة حركات القمر ‹في› معنى واحد، وهو أن فلك التدوير لكل واحد من هذه الكواكب الخمسة يميل عن سطح الفلك المائل إلى الشمال وإلى الجنوب، فالكوكب يخرج بهذا الميل عن سطح الفلك المائل، لأن مركز الكوكب هو أبداً على محيط فلك التدوير، وليس كذلك حال القمر "لأن فلك تدوير القمر ليس يخرج من سطح الفلك، فمركز القمر ليس يخرج عن سطح الفلك المائل". فميل هذه الكواكب عن دائرة معدل النهار يزيد على ميل القمر عن دائرة معدل النهار بميل أفلاك تداويرها فقط.

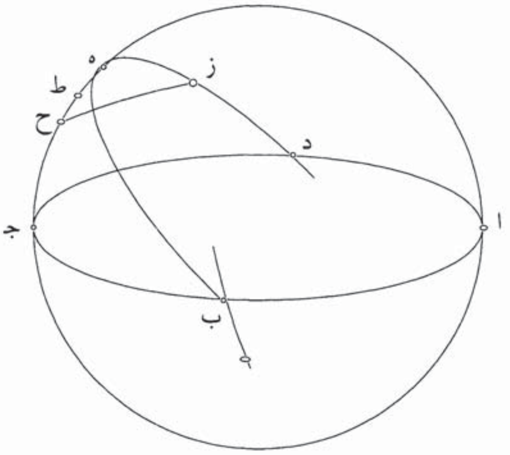
فأما إذا كانت هذه الكواكب راجعة، فإن هيئة حركاتها في حال رجوعها ليس تخالف هيئة حركاتها، في حال استقامتها، إلا بأن حركتها التي كانت

من المغرب إلى المشرق بالقياس / إلى دائرة البروج تصير من المشرق إلى المغرب بالقياس إلى دائرة البروج، وهذا الاختلاف ليس يغير صورة ميلها عن دائرة معدل النهار ولا عن الدوائر الزمانية التي تمرّ بمراكزها. ٣٨٠-ظ

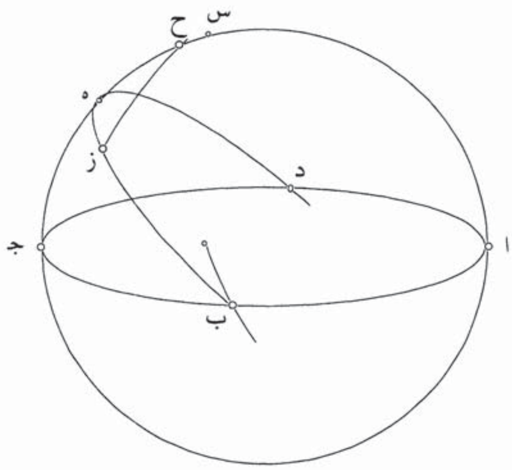
وكذلك إذا كانت هذه الكواكب واقفة بين الرجوع والاستقامة، فإنه قد يعرض لهذه الكواكب، وخاصة الكوكبين العلويين، أن يكون لها بين الرجوع والاستقامة وقوف زماناً ما محسوساً، أعني أنه يوجد بالرؤية وبالرصد زمان له قدر لا يظهر لها حركة لا من المغرب إلى المشرق ولا من المشرق إلى المغرب؛ إلا أنه في هذا القدر من الزمان قد يزيد ميلها وينقص بالقياس إلى معدل النهار. فالزمان الذي يكون فيه الكوكب واقفاً ولا يظهر له حركة في الطول، قد يظهر له حركة من الشمال إلى الجنوب أو من الجنوب إلى الشمال من أجل ميل فلك تدويره؛ ويكون مع ذلك متحركًا بالحركة السريعة، وموضعه من فلكه المائل واحد بعينه، فيما يظهر للحسّ.

وإذ قد تقررت هذه المعاني، فليكن دائرة ا ب جـ أفقًا، وليكن كوكب من الكواكب الخمسة السيارة على نقطة ب، وليكن مستقيماً. ونجيز على نقطة ب دائرة من الدوائر الزمانية، ولتكن ب ه د. فإذا تحركت الكرة فإن الكوكب يصير على تصاريف الأحوال إلى دائرة نصف النهار؛ والكوكب متحرك بحركته التي تخصه حول فلكه المائل، فهو يفارق دائرة ب ه د ويميل عنها إما إلى الشمال وإما إلى الجنوب. فإذا صار الكوكب على دائرة نصف النهار، يكون القوس التي قطعها من فلكه غربية عن موضعه من فلكه المائل. فإذا كان فلك تدويره مائلاً عن فلكه المائل وكان الكوكب قد مال بميله، فإن الكوكب يكون شماليًا عن فلكه المائل أو جنوبيًا عنه. وإذا كان ذلك كذلك، فإن وضع فلكه المائل يكون كوضع قوس ز ح المرسومة في الصورة الأولى إما شمالية عن دائرة ب ه د وإما جنوبية عنها، ويكون وضع فلك التدوير كوضع قوس ح ط إما شماليًا عن قوس ز ح وإما جنوبيًا عنها. فأما ميل حركة الجوزهر لهذه الكواكب فليس يظهر في هذا القدر من الزمان، فتكون نقطة ز هي نقطة ب. وتكون قوس ب ز هي الزمان الذي صار فيه الكوكب من نقطة ب إلى نقطة ط، وتكون قوس ب ه هي الزمان المحصل، وتكون قوس ط ه هي ميل حركة الكوكب؛ وجميع ذلك على ما في الصورة الأولى.

3 الدوائر: الدائرة – 6 أنه: انها / زمان: رمانا – 23 كوضع: لوضع – 24 ز ح: د ح – 26 الكوكب: القمر – 27 هي: هو.



فأما إن كان الكوكب راجعًا، فإن القوس التي قطعها الكوكب من فلكه تكون شرقية من موضعه من فلكه وتكون شمالية عن دائرة ب ه أو جنوبية عنها. ويكون فلك التدوير شماليًا عن الفلك المائل وجنوبيًا عنه. فتكون الهيئة على ما في الصورة الثانية. وإن كانت حركة الكوكب من الشمال إلى الجنوب، ثم من الجنوب / إلى الشمال، أو من الجنوب إلى الشمال، ثم من ٣٨١-و الشمال إلى الجنوب، فإن موضعه يكون مثل نقطة ط أو نقطة س والزمان المحصل يكون قوس ب ه على تصاريف الأحوال كمثل الحال في الشمس والقمر.



6 سَ: هَ.

فأما إن كان الكوكب واقفًا بين الرجوع والاستقامة، ولم يظهر له حركة في فلكه المائل، فموضعه من فلكه المائل <يكون> متحركًا على دائرة ب ه د ويميل الكوكب عن دائرة ب ه د بمقدار <ميل> فلك التدوير عن الفلك المائل فقط، ويكون ميله إما إلى الشمال وإما إلى الجنوب. فإن كانت هذه الحركة أيضًا بطيئة جداً، أعني ميل فلك التدوير عن الفلك المائل، ولم يظهر مقدار هذا الميل للحسّ لصغر قدره – وذلك قد يعرض لكوكبي زحل والمشتري – فالكوكب ليس يخرج عن دائرة ب ه د. فإذا صار على دائرة نصف النهار، فإنه يكون على نقطة ه، فتكون قوس ب ه هو الزمان المحصل، وهو الزمان الذي صار فيه الكوكب من نقطة ب إلى نقطة ه. ولا ميل في هذه الحال لحركة الكوكب.

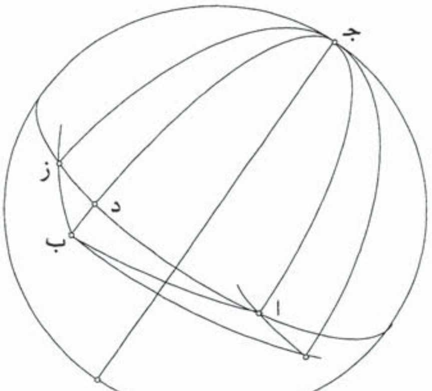
فقد تبيّن من جميع ما بيناه من هئية حركات الكواكب السبعة السيارة أن كل واحد من الكواكب السبعة السيارة إذا تحرك بالحركة السريعة مقداراً ما في الزمان، فقد صار له في ذلك القدر من الزمان زمان محصل، وهو القوس التي تفصلها الدائرة الخارجة من قطب معدل النهار إلى موضع الكوكب في آخر زمان حركته من الدائرة الزمانية التي كان عليها الكوكب في أول زمان حركته، فيما بين الدائرة الخارجة من قطب معدل النهار وبين موضع الكوكب في أول زمان حركته، وأنه قد صار للكوكب في ذلك القدر من الزمان في أكثر الأحوال ميل عن الدائرة الزمانية التي كان عليها في أول زمان حركته، وهي القوس من الدائرة الخارجة من قطب معدل النهار إلى موضع الكوكب في آخر زمان حركته، التي بين موضع الكوكب في آخر زمان حركته وبين الدائرة الزمانية التي كان عليها الكوكب في أول زمان حركته.

وإذ قد تبين، فإنا نقول: إن كل واحد من الكواكب السبعة السيارة إذا تحرك في وقت معلوم مقداراً معلومًا من الزمان، فإن القوس التي هي زمانه المحصل تكون معلومة وإن القوس التي هي ميل حركته تكون معلومة.

<**يط**> فليكن موضع كوكب من الكواكب السبعة السيارة في وقت معلوم نقطة ا، وليتحرك هذا الكوكب زمانًا معلومًا وليكن موضعه في آخر الزمان المعلوم نقطة ب، وليكن قطب معدل النهار الشمالي نقطة جـ. ونجيز على نقطتي جـ ا قوسًا من دائرة عظيمة، ولتكن قوس جـ ا. ونجيز على نقطتي جـ

بَ قوسًا من دائرة عظيمة، ولتكن قوس جـ بَ. ونجيز على نقطة آ قوسًا من دائرة زمانية، ولتكن قوس آ د، فتكون قوس آ د هي الزمان المحصل وقوس د بَ هي ميل حركة الكوكب.

فأقول: إن قوس آ د معلومة وإن قوس د بَ معلومة.

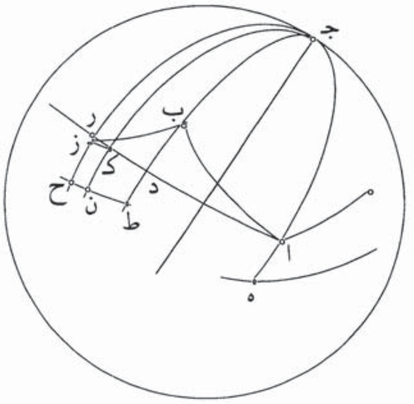


برهان ذلك: أن نقطة آ هي موضع كوكب معلوم في وقت معلوم. فإن كان هذا الكوكب هو الشمس، / فإن نقطة آ هي على دائرة البروج وهي معلومة، لأنها موضع الشمس في وقت معلوم. وكذلك نقطة بَ هي نقطة معلومة من دائرة البروج، لأن وقت حصول الشمس على نقطة بَ هو وقت معلوم لأن الزمان الذي بين وقت كون الشمس على نقطة آ، الذي هو وقت معلوم، وبين وقت حصولها على نقطة بَ، هو زمان معلوم بالفرض. ولأن نقطة آ هي نقطة معلومة من دائرة البروج، تكون قوس جـ آ معلومة لأن ميل نقطة آ عن دائرة معدل النهار معلوم، وكذلك قوس جـ بَ تكون معلومة. ولأن الزمان الذي بين الوقتين معلوم، تكون القوس التي قطعتها الشمس من دائرة البروج معلومة، وتكون غربية عن نقطة بَ. ونقطة آ من دائرة البروج تتحرك على دائرة آ د ولا تخرج عنها، فتكون القوس من دائرة البروج التي قطعتها الشمس في الزمان الذي صارت فيه من نقطة آ إلى نقطة بَ فيما بين نقطة بَ وبين دائرة آ د، فهي ميل قوس بَ د التي في الصورة الأولى. وقوس ز آ معلومة لأنها الزمان الذي تحركت فيه الشمس من نقطة آ إلى نقطة بَ، ٣٨١-ظ

12 وكذلك: ولذلك – 18 ز آ: بَ د.

لأن نقطة ز من دائرة البروج قد كانت على نقطة آ وصارت من نقطة آ إلى الوضع الذي عليه في الزمان الذي صارت فيه الشمس من نقطة آ إلى نقطة ب، فقوس آ ز هي الزمان المعلوم الذي تحركت فيه الشمس من نقطة آ إلى نقطة ب وقوس آ د هي مطالع قوس آ ب في الفلك المستقيم، فقوس ز د معلومة، فتبقى قوس آ د معلومة وهي الزمان المحصل. ولأن قوس جـ آ معلومة وقوس جـ ب معلومة، يكون التفاضل الذي بينهما معلومًا، وهو قوس ب د التي هي ميل حركة الشمس؛ فقوس ب د معلومة. فإذا تحركت الشمس في وقت معلوم مقداراً معلومًا من الزمان، فإن زمانها المحصل يكون معلوماً وميل حركتها في ذلك الزمان المعلوم يكون معلوماً.

<كـ> وإن كان الكوكب الذي على نقطة آ هو القمر أو أحد الكواكب الخمسة، فإن موضعه من دائرة البروج يكون معلومًا، لأن الوقت بالفرض معلوم، ويكون بُعده عن معدل النهار معلومًا وتكون نقطة ممرّه من دائرة البروج معلومة – ونقطة الممر هي النقطة من دائرة البروج التي تتقاطع عليها دائرة البروج والدائرة التي تمرّ بقطب معدل النهار وبموضع مركز الكوكب التي هي في هذه الحال دائرة جـ آ – فنقطة الممر هي على دائرة جـ آ.



فليكن نقطة الممر نقطة ه. وإذا كان بعد كوكب <على موضع> آ من دائرة معدل النهار معلومًا، فإن بعده من قطب معدل النهار معلوم، فقوس

4 آ ب: ب ز.

جـ آ معلومة ونقطة ه من دائرة البروج معلومة. ولأن الكوكب كان على نقطة آ في وقت معلوم وتحرك من بَعد ذلك زماناً معلوماً إلى أن صار على نقطة ب، يكون الوقت الذي صار فيه الكوكب على نقطة ب وقتاً معلوماً؛ فموضع الكوكب من دائرة البروج في وقت حصول الكوكب على نقطة ب معلوم، وبُعده عن دائرة معدل النهار في هذا الوقت أيضاً معلوم، ونقطة ممره أيضاً معلومة؛ ونقطة / ممرّه في هذه الحال هي على دائرة جـ ب؛ فلتكن نقطة ممره نقطة ط. وإذا كان بعد الكوكب عن دائرة معدل النهار معلوماً، فإن بُعده من قطب معدل النهار يكون معلوماً وقوس جـ ب معلومة، ونقطة ط من دائرة البروج معلومة. ولأن الكوكب تحرك من نقطة آ إلى نقطة ب في زمان ما، فإنه في ذلك القدر من الزمان قد قطع من فلكه الذي يخصه الذي هو الفلك المائل قوساً ما؛ وتلك القوس تكون غربية عن نقطة ب؛ أما في القمر ففي سائر الأوقات، وأما في الكواكب الخمسة: فإذا كانت مستقيمة السير، فالنقطة التي كان فيها الكوكب من فلكه الذي يخصه هي غربية عن نقطة ب. فإن كان الكوكب هو القمر، فإن النقطة من فلكه المائل التي كانت على نقطة آ قد انتقلت عن دائرة آ د الزمانية في أكثر الأحوال ومالت عنها إما إلى الشمال وإما إلى الجنوب بمقدار ميل حركة الجوزهر في الزمان المعلوم الذي صار فيه القمر من نقطة آ إلى نقطة ب؛ فيكون وضع القوس من الفلك المائل التي قطعها القمر في الزمان الذي صار فيه من نقطة آ إلى نقطة ب مثل قوس ب ز التي في الصورة الثانية؛ فتكون نقطة ز إما جنوبية عن دائرة آ د وإما شمالية وتكون نهاية الزمان المعلوم الذي صار فيه القمر من نقطة آ إلى نقطة ب شرقية عن نقطة ز، كما تبين في هيئة حركات القمر. فليكن الزمان المعلوم قوس آ ك. ونجيز على نقطتي جـ ز قوساً من دائرة عظيمة، ولتكن قوس جـ ز. فلأن نقطة ر من قوس آ ر هي التي كانت على نقطة آ وانتقلت بالحركة ‹على دائرة آ د› الزمانية، يكون قوس جـ ر هي قوس جـ آ، وتكون نقطة الممر التي هي ه قد انتقلت بانتقالها وهي على قوس جـ ز، فلتكن نقطة الممرّ من قوس جـ ز نقطة ح. فنقطة ح من دائرة البروج معلومة ونقطة ط من دائرة البروج معلومة، ونقطة ح صارت على قوس جـ ز في الوقت الذي

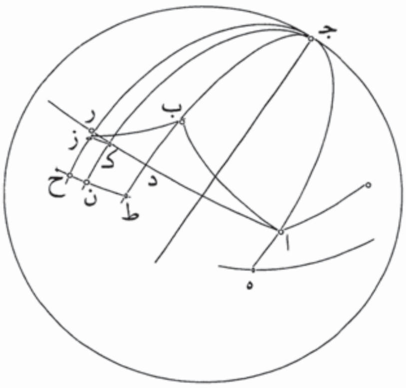
٣٨٢-و

صارت فيه نقطة ط من دائرة البروج على قوس جـ ب، فنقطتا ح ط هما طرفا قوس معلومة من دائرة البروج. فنجيز على نقطتي ح ط القوس من دائرة البروج التي هما طرفاها، ولتكن قوس ح ط. ونجيز على نقطتي جـ ك قوساً من دائرة عظيمة، ولتكن جـ ك؛ ولتقطع هذه الدائرة قوس ح ط على نقطة ن. وقوس ز ك موازية لدائرة البروج، ونقطة ز تمرّ بها دائرة تخرج من قطب دائرة البروج وتمرّ بموضع الكوكب عند كونه على نقطة ا وهو نقطة معلومة من دائرة البروج. فالدائرة التي تخرج من قطب دائرة البروج وتمرّ بنقطة ك تمرّ بنقطة معلومة من دائرة البروج، لأن قوس ز ك معلومة؛ وذلك أنها بمقدار حركة الجوزهر في الزمان المعلوم الذي هو زمان ا ك، وعرض نقطة ك عن دائرة البروج معلوم لأنه مساوٍ لعرض نقطة ز المعلومة، فنقطة ك نقطة معلومة الوضع بالقياس إلى دائرة البروج، فنقطة الممرّ لنقطة ك معلومة. وقوس جـ ك معلومة لأنها مساوية لقوس ا جـ ونقطة الممر لنقطة ك هي نقطة ن، فنقطة ن من دائرة البروج معلومة فقوس ن ط من دائرة البروج معلومة. وقوس ك د هي مطالع قوس ن ط في الفلك المستقيم، فقوس ك د معلومة وقوس ا ك معلومة، فقوس ا د معلومة وهي الزمان المحصل. وقوس جـ د مساوية لقوس جـ ا المعلومة وقوس جـ ب معلومة، فقوس ب د معلومة وهي ميل حركة القمر في الزمان المعلوم.

ويلزم جميع ما ذكرناه وبيناه، إن كانت نقطة ز جنوبية عن دائرة ا د ك وإن كانت شمالية عنها. وإن كانت نقطة ب التي هي موضع القمر في الوقت الثاني على دائرة ا د ك، أعني أن يكون موضع القمر من الدائرة الزمانية نقطة د، فإن الطريق الذي به تبين مقدار الزمان المحصل هو الطريق الذي ذكرناه بعينه لا يختلف في شيء من المعاني التي ذكرناها، إلا أنه لا يكون لحركة القمر في ذلك / ظ-٣٨٢ الزمان المعلوم ميل عن الدائرة الزمانية التي كان عليها وهي دائرة ا د ك. فإذا تحرك القمر مقداراً معلوماً من الزمان مبتدئاً من وقت معلوم، فإن زمانه المحصل يكون معلوماً وميل حركته يكون معلوماً.

13 فنقطة: فنقط – 14 وقوس: فقوس – 20 الدائرة الزمانية: دائرة نصف النهار.

<كا> وإن كان الكوكب الذي على نقطة آ المعلومة هو عطارد أو الزهرة، فإن الصورة في استخراج زمانهما المحصل شبيهة بالصورة في استخراج زمان القمر المحصل. وذلك أن الفلك المائل لهذين الكوكبين يتحرك إلى دائرة البروج حتى ينطبق عليها، ثم يفارقها ويميل إلى الجهة الأخرى، ثم يعود إليها، ثم يفارقها ويميل إلى الجهة الأولى، كذلك دائماً. فميل الفلك المائل من أجل هذه الحال، عن دائرة معدل النهار يتغير. وإذا تغير ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار، تغير بعد النقطة التي كان عليها الكوكب من فلكه المائل عن قطب معدل النهار، فتصير النقطة هي نقطة زَ من فلكي عطارد أو الزهرة خارجة عن دائرة آ دَ إما إلى الشمال وإما إلى الجنوب في أكثر الأحوال؛ وقطب هذه الحركة هو نقطة الجوزهر. فكل نقطة من الفلك المائل تتحرك في الزمان المعلوم قوساً من دائرة مقاطعة للدوائر الزمانية لأن نقطة الجوزهر لكل واحد من هذين الكوكبين ليس هي قطب معدل النهار. فنقطة زَ تتحرك في الزمان المعلوم قوساً من دائرة مقاطعة لدائرة آ دَ. وهذه الحركة تكون تارة على توالي البروج وتارة على خلاف توالي البروج. ونحن نبيّن من بَعد في أي الأوقات تكون حركة نقطة زَ ونظائرها على توالي البروج ومتى تكون على خلاف توالي البروج. ونبين مقدار هذه الحركة في الزمان المعلوم.



فالقوس التي تتحرك عليها نقطة آ من فلكي عطارد والزهرة في الزمان المعلوم تكون معلومة وتكون جهتها معلومة. وإذا كان ذلك كذلك، عادت الحال إلى مثل الصورة التي لحركة القمر، فتكون القوس من الدائرة المقاطعة

1 أو الزهرة: والزهرة – 5 فميل: فمثل – 8 أو الزهرة: والزهرة – 10 هو: هي – 14 توالي (الثانية): توالا – 17 آ: زَ.

للدائرة الزمانية التي بين نقطة زَ وبين النقطة التي كانت عليها نقطة آ من دائرة آ دَ، التي هي قوس زَ كَ النظيرة لقوس زَ كَ من حركة القمر، معلومة. وتمام البرهان في تبيين مقدار الزمان المحصل لهذين الكوكبين هو مثل البرهان على الزمان المحصل للقمر. فالزمان المحصل لكوكبي عطارد والزهرة معلوم والصورة لهذين الكوكبين هي الصورة الثالثة.

فأما ميل حركة كل واحد من هذين الكوكبين، فهو فضل ما بين قوسي جـ آ جـ بَ، وهو قوس بَ دَ. وهذا الميل يكون ممتزجًا من ميل الفلك المائل عن دائرة البروج ومن ميل فلك التدوير عن الفلك المائل؛ إلا أن هذين الميلين يصير منهما للكوكب عرض معلوم عن دائرة البروج في كل وقت معلوم. وإذا كان عرض الكوكب معلومًا وموضعه من دائرة البروج معلومًا، فإن بعد الكوكب عن معدل النهار وعن قطب معدل النهار يكون معلومًا. فقوسا جـ آ جـ بَ اللتان هما بعدا الكوكب في الوقتين المعلومين عن قطب معدل النهار تكونان معلومتين. ففضل ما بينهما يكون معلومًا؛ وهذا الفضل هو قوس بَ دَ التي هي ميل حركة الكوكب عن دائرة آ دَ. وإذا كانت القوس الثانية التي هي جـ بَ أعظم من القوس الأولى التي هي جـ آ، فالميل إلى الجنوب عن دائرة آ دَ؛ وإن كانت القوس الأولى التي هي جـ آ أعظم من الثانية التي هي جـ بَ، فالميل إلى الشمال. فإذا تحرك كل واحد من كوكبي عطارد والزهرة زمانًا معلومًا مبتدئًا من وقت معلوم، فإن زمانه المحصل يكون معلومًا. والزمان المحصل لكل واحد من الكواكب السبعة أبدًا شرقيًا عن ميل ‹حركة› الكوكب، لأن الزمان الذي يتحرك فيه الكوكب هو أبدًا أعظم من مطالع ما يقطعه الكوكب من فلكه المائل.

وإن كان الكوكب الذي على نقطة آ هو زحل أو المشتري أو المريخ وكان الزمان الذي تحرك فيه الكوكب / من نقطة آ إلى نقطة بَ هو دورة واحدة ٣٨٣-و
زمانية أو بعض دورة، فإن نقطة زَ تكون على دائرة آ دَ، لأن جوزهرات هذه الكواكب ليس تتحرك في الزمان الذي هو دورة واحدة أو بعض دورة مقدارًا محسوسًا من الدوائر الموازية لدائرة البروج، التي تمرّ بنقطة زَ، النظيرة لقوس كَ زَ من الصورة الثانية. فليس تخرج نقطة زَ التي كانت على نقطة آ

1 آ: رَ – 12 اللتان: اللتين.

في الزمــان الذي هو دورة واحــدة أو بعض دورة عن دائرة آ د بشيء محسوس، فنقطة ز تكون، في الوقت الذي يصير فيه الكوكب عند نقطة ب، على دائرة آ د الزمانية وتكون نقطة ز غربية عن نقطة ب إذا كان الكوكب مستقيماً، فيكون قوس آ ز هي الزمان المعلوم الذي تحرك فيه الكوكب من نقطة آ إلى نقطة ب وتكون نقطتا الممر اللتان هما نقطتا ح ط معلومتين، كما تبين من قبل. فتكون قوس ح ط من دائرة البروج معلومة؛ وتكون قوس د ز هي مطالع قوس ح ط المعلومة، فتكون قوس ز د معلومة وقوس آ ز معلومة، فتبقى قوس آ د معلومة، وهي الزمان المحصل. فالزمان المحصل لكل واحد من زحل والمشتري والمريخ معلوم.

فأما ميل حركة كل واحد من هذه الكواكب الثلاثة، فإن حاله كحال ميل عطارد والزهرة. وذلك أن ميل هذه الكواكب أيضًا ممتزج من ميل فلكها المائل ومن ميل فلك تدويرها؛ إلا أن عروضها عن دائرة البروج في كل وقت معلوم تكون معلومة ونقطة ممرها تكون معلومة، فقوسا جـ آ جـ ب تكونان معلومتين وفضل ما بينهما يكون معلوماً؛ وفضل ما بين هاتين القوسين هو ميل حركة هذه الكواكب، وجهة ميلها كجهة ميل فلكي الزهرة وعطارد. فميل حركة كل واحد من هذه الكواكب الثلاثة معلومة وجهة ميلها معلوم. وإذا تحرك كل واحد من زحل والمشتري والمريخ زماناً معلوماً مبتدئاً من وقت معلوم، فإن زمانه المحصل يكون معلوماً وميل حركته عن الدائرة الزمانية التي كان عليها في الوقت الأول يكون معلوماً.

وإن كان الكوكب الذي على نقطة آ هو أحد الكواكب الخمسة وكان راجعًا، فإن نقطة ز تكون شرقية عن نقطة ب، فتكون قوس آ ز التي هي الزمان المعلوم أصغر من قوس آ د، ويكون جميع البرهان على مثل ما تقدم.

وإن كان الكوكب واقفاً بين الرجوع والاستقامة ولم يظهر له حركة في الطول، فموضعه الثاني من دائرة البروج هو موضعه الأول وزمانه المحصل هو الزمان المعلوم الذي تحرك فيه من الموضع الأول إلى الموضع الثاني.

فقد تبين مما بيناه أن كل واحد من الكواكب السبعة إذا تحرك زماناً معلوماً مبتدئاً من وقت معلوم، فإن زمانه المحصل يكون معلوماً وميل حركته

4 آ ز: آ د – 5 اللتان: اللتين – 14 معلومتين: معلومين – 15 كجهة ميل: كميل جهة.

عن الدائرة الزمانية التي كان عليها في الوقت الأول يكون معلومًا ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والصورة الأولى للشمس والثانية للقمر والثالثة للزهرة وعطارد والرابعة لزحل والمشتري والمريخ.

<كب> وأقول أيضًا : إن نهاية ميل الفلك المائل لكل واحد من الكواكب السبعة / عن دائرة معدل النهار في كل وقت معلوم يكون معلومًا وموضع ٣٨٣-ظ نهاية هذا الميل من دائرة البروج يكون معلومًا.

أما الشمس ففلكها المائل هو دائرة البروج ونهاية ميل دائرة البروج من دائرة معدل النهار معلومة، وهو المقدار الذي بيّنه بطلميوس. ومقدار هذا الميل ثابت على حال واحدة لا يتغير، وموضع هذه النهاية أما الشمالية فالانقلاب الصيفي الذي هو رأس السرطان ؛ وأما الجنوبية فالانقلاب الشتوي الذي هو رأس الجدي.

فأما القمر، فإن فلكه المائل مقاطع لدائرة البروج ومقاطع لدائرة معدل النهار، لأن كل دائرة عظيمة في كرة، فهي تقطع كل دائرة عظيمة في الكرة وتقطعها بنصفين. وإذا كان الفلك المائل يقطع دائرة البروج ويقطع دائرة معدل النهار، فهو مائل عن دائرة البروج وعن دائرة معدل النهار. أما الفلك المائل عن دائرة البروج، فقد بيّن بطلميوس مقداره وأن مقداره لا يتغير بل هو ثابت على حال واحدة، إلا أن موضع نهاية ميل هذا الفلك، أعني فلك القمر، من دائرة البروج يتغير ؛ وذلك أن جميع سطح هذا الفلك المائل يتحرك حول قطبي دائرة البروج، وكل نقطة من محيط هذا الفلك المائل يتغير موضعها من دائرة البروج، فالنقطة التي هي النهاية الشمالية بالقياس إلى دائرة البروج ينتقل ويتغير موضعها من دائرة البروج، وكذلك النقطة التي هي النهاية الجنوبية، وكذلك نقطتا الجوزهرين، وهذه النقلة تكون على خلاف توالي البروج على ما بيّنه بطلميوس وتسمى حركة الجوزهر. ومقدار ميل هذا الفلك عن دائرة البروج ليس يتغير بهذه الحركة لأن هذه الحركة هي حول قطبي دائرة البروج، فمقدار الذي بين قطب هذه الدائرة وبين قطب دائرة البروج ليس يتغير، وهذا البعد هو مقدار غاية ميل فلك القمر عن

9 معلومة : معلوم – 11 الشتوي : الشتوية – 14 دائرة (الأولى) : كتب واحدة، ثم صححها عليها – 22 وكذلك : ولذلك – 24 حركة : مركز – 27 القمر : للقمر.

دائرة البروج. وإذا كان سطح هذا الفلك يتحرك حول قطبي دائرة البروج، فإن ميل هذا الفلك عن دائرة معدل النهار يتغير. وذلك أنه إذا كان جميع هذه الدائرة تتحرك وينتقل وضعها بالقياس إلى دائرة البروج، فإن قطبي هذه الدائرة يتحركان ويدوران حول قطبي دائرة البروج، فمرة ينطبقان على محيط الدائرة التي تمر بقطبي دائرة البروج وقطبي دائرة معدل النهار، التي تسمى دائرة الأقطاب، ومرة يفارقانها، وانطباق قطبي الفلك المائل على دائرة الأقطاب يكون في كل دورة مرتين. وقد ذكرنا هذا المعنى فيما تقدم وإنما أعدناه لنبين مقدار الميل. ومقدار ميل هذا الفلك عن دائرة البروج أقل من مقدار ⟨ميل⟩ دائرة البروج عن دائرة معدل النهار. ومقدار الميل بين كل دائرتين عظيمتين متقاطعتين في كرة هو مساوٍ لمقدار القوس التي بين قطبيهما من الدائرة العظيمة التي تمرّ بأقطابهما الأربعة. فمقدار القوس التي بين قطبي دائرة البروج وبين قطب فلك القمر المائل هو أقل من مقدار القوس التي بين قطب دائرة البروج وبين قطب دائرة معدل النهار. وإذا تحرك قطب الفلك المائل حول قطبي دائرة البروج، وانطبق على دائرة الأقطاب مرتين، فهو في إحدى المرتين يكون أبعد عن قطب معدل النهار، ومرة يكون أقرب إلى قطب معدل النهار. / وذلك أن قطب الفلك المائل إذا انطبق على دائرة ٣٨٤-و الأقطاب، فمرة يكون فيما بين قطب دائرة البروج ⟨و⟩بين قطب دائرة معدل النهار، ومرة يكون قطب دائرة البروج فيما بين قطب دائرة معدل النهار وبين قطب الفلك المائل. وإذا انطبق قطب الفلك المائل على دائرة الأقطاب، وصارت الأقطاب الثلاثة على دائرة واحدة، فإن نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة البروج هو قوس من هذه الدائرة، وكانت النقطة التي عندها تكون نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة البروج هي النقطة التي عندها تكون نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. وقد تقدم أن مقدار نهاية الميل بين الدائرتين هو القوس التي بين القطبين. فإذا انطبق قطب الفلك المائل على دائرة الأقطاب وكان فيما بين قطب دائرة البروج وقطب دائرة معدل النهار، فإن مقدار نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، منقوصاً من مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج. وإذا انطبق قطب الفلك المائل على دائرة الأقطاب وكان قطب دائرة

3 وضعها: وضعه – 10 دائرتين: دائرة – 11 قطبيهما: قطبهما – 24 هو: هي – 27 منقوصاً: منقوص.

البروج فيما بين قطب دائرة معدل النهار وبين قطب الفلك المائل، فإن مقدار نهاية ⟨ميل⟩ الفلك المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، مزيداً عليه مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج. وإذا انطبق قطب الفلك المائل على دائرة الأقطاب، كان موضع نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار من دائرة البروج هو نقطة الانقلاب، لأن الدائرة التي تمرّ بنهاية ميل الفلك المائل في هذه الحال، هي مارة بقطب دائرة البروج، فهي التي تحدّ موضع نهاية الميل من دائرة البروج. والموضع الذي تمر به دائرة الأقطاب من دائرة البروج في وقت انطباق قطب الفلك المائل على دائرة الأقطاب، هما نقطتا الانقلابين. ولأن موضعي الجوزهرين اللذين هما الرأس والذنب لفلك القمر من دائرة البروج معلومان، يكون موضع النهاية الشمالية للفلك المائل من دائرة البروج معلوماً، وموضع النهاية الجنوبية لهذا الفلك من دائرة البروج معلومًا. وأريد بالنهاية الشمالية والنهاية الجنوبية في هذا الموضع النقطة التي هي أبعد نقطة من الفلك المائل عن دائرة البروج. وإذا كان موضع النهاية الشمالية والجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة البروج هما نقطتا الانقلابين، كان مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار معلوماً؛ وذلك أن النهاية الشمالية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة البروج إذا كانت في رأس السرطان، كان قطب الفلك المائل أبعد عن قطب معدل النهار من قطب دائرة البروج، والأقطاب الثلاثة في هذه الحال هي على دائرة واحدة، وهي دائرة الأقطاب. فيكون قطب دائرة البروج متوسطاً بين دائرة معدل النهار وبين قطب الفلك المائل. فيكون مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ميل دائرة البروج عن معدل النهار، مزيداً عليه ميل الفلك المائل عن دائرة البروج. وإذا كانت النهاية الجنوبية بالقياس إلى دائرة البروج في رأس السرطان، كان قطب دائرة البروج / أبعد عن قطب معدل النهار من قطب الفلك المائل، فيكون ٢٨٤-ظ
قطب الفلك المائل متوسطًا بين قطب دائرة معدل النهار وبين قطب دائرة البروج. فيكون مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ⟨ميل⟩ دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، منقوصًا منه ميل الفلك المائل عن دائرة البروج.

3 مزيداً: مزيد – 8 الذي: التي – 27 منقوصاً: منقوص.

وإذا كانت النهاية الشمالية من الفلك المائل بالقياس إلى دائرة البروج في رأس السرطان، كانت نقطة الرأس في رأس الحمل، لأن رأس الحمل هو قطب دائرة الأقطاب. فإذا كانت نقطة ميل الفلك المائل عن دائرة البروج التي هي النهاية الشمالية على دائرة الأقطاب، فإن نقطة الجوزهر التي هي الرأس تكون في رأس الحمل. وإذا كانت النهاية الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة البروج في رأس السرطان، كانت نقطة الذنب في رأس الحمل. فتبين من ذلك أنه إذا كانت نقطة الرأس في رأس الحمل، كان مقدار ميل فلك القمر المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ميل دائرة البروج من دائرة معدل النهار، مزيداً عليه ميل الفلك المائل عن دائرة البروج، وأنه إذا كانت نقطة الذنب في رأس الحمل، كان ميل فلك القمر المائل عن دائرة معدل النهار هو مقدار ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، منقوصاً منه ميل الفلك المائل عن دائرة البروج. وإذا كانت نقطة الذنب في رأس الحمل، كانت نقطة الرأس في رأس الميزان.

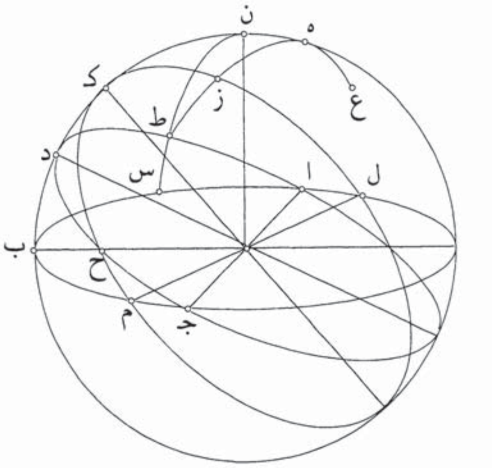
وقد تبين مما بيناه أن مقدار ميل فلك القمر المائل عن دائرة معدل النهار في الوقتين اللذين يكون فيهما نقطة الرأس على نقطتي الاعتدالين يكون معلوماً، وأن موضعي النهاية الشمالية والنهاية الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار في هذين الوقتين يكونان معلومين.

فقد بقي أن نبين أن مقدار هذا الميل يكون معلوماً وموضع نهاية هذا الميل يكون معلوماً إذا كانت نقطة الرأس على غير نقطتي الاعتدالين.

فليكن دائرة البروج $\overline{\text{ا ب جـ}}$، والفلك المائل $\overline{\text{ا د جـ}}$، فليكن كل واحدة من قوسي $\overline{\text{جـ ب}}$ $\overline{\text{جـ د}}$ ربع دائرة. ونجيز على نقطتي $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{د}}$ دائرة عظيمة، ولتكن دائرة $\overline{\text{ك ب د ه}}$. فتكون قوس $\overline{\text{ب د}}$ هي غاية ميل الفلك المائل عن دائرة البروج لأن مقدار هذا الميل لا يتغير، ويكون قطب دائرة البروج وقطب الفلك المائل على دائرة $\overline{\text{ك ب ه}}$. فليكن قطب دائرة البروج نقطة $\overline{\text{ك}}$، وقطب الفلك المائل نقطة $\overline{\text{ه}}$، فتكون نقطة $\overline{\text{د}}$ هي موضع النهاية الشمالية أو الجنوبية بالقياس إلى دائرة البروج من دائرة البروج وتكون نقطتا $\overline{\text{ا}}$ $\overline{\text{جـ}}$ هما الجوزهران، فتكون نقطة $\overline{\text{ب}}$ من دائرة البروج معلومة لأن بعدها من نقطة

11 منقوصاً: منقوص – 18 نهاية: كتبها النهاية، ثم صححها عليها – 27 بعدها: بعدهما.

الجوزهر ربع دائرة، وموضع الجوزهر معلوم. وإذا كان موضعا الجوزهرين ليسا نقطتي الاعتدالين، فإن نقطتي ا جـ ليستا نقطتي الاعتدالين وهما مع ذلك معلومتان، / فلتكن نقطتا الاعتدالين نقطتي ل م. ٣٨٥-و



ولتكن نقطة م على قوس جـ ب. ونجيز على ل م دائرة معدل النهار، ولتكن دائرة ل ك م ح، ولتكن نقطة ك منها على دائرة د ب ونقطة ح منها على محيط الفلك المائل. فتكون نقطة ح غير نقطتي جـ ا، لأن كل واحدة من قوسي جـ م م ا أقلّ من نصف دائرة. <و>لأن نقطة ب من دائرة البروج ليست نقطة الانقلاب ونقطة ن هي قطب دائرة البروج، تكون دائرة ك ب ن ه ليست دائرة الأقطاب، فيكون قطب دائرة معدل النهار خارجة عن دائرة ك ب ن ه. فليكن قطب معدل النهار نقطة ع. ونجيز على نقطتي ه ع دائرة عظيمة؛ ولتقطع الفلك المائل على نقطة ط ولتقطع دائرة معدل النهار على نقطة ز، فتكون قوس ط ز هي غاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار، لأن دائرة ه ز تمرّ بقطب الفلك المائل وبقطب دائرة معدل النهار، وتكون قوس ز ط مساوية لقوس ه ع وتكون قوس ه ط ربع دائرة لأن نقطة ه هي قطب الفلك المائل. فيكون كل واحدة من قوسي ح ز ح ط ربع دائرة. وأيضاً، لأن نقطة ب من دائرة البروج معلومة، لأنها موضع النهاية الشمالية

2 نقطتي : نقطتا.

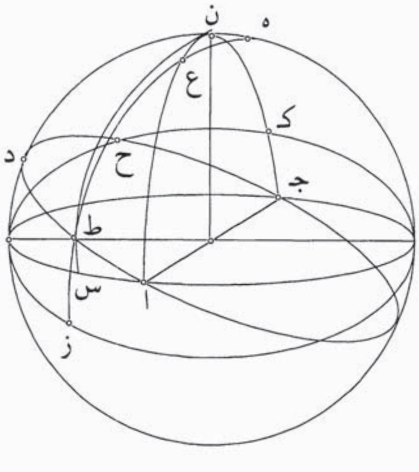
أو الجنوبية للفلك المائل، فنقطة م نقطة الاعتدال، تكون قوس م ب من دائرة البروج معلومة. وتكون قوس م جـ معلومة لأن قوس جـ ب ربع دائرة. ولأن دائرة كـ ب ه تمرّ بقطب دائرة البروج، تكون قائمة على دائرة البروج على زوايا قائمة؛ ولأن دائرة ه ب كـ هي ⟨قائمة على⟩ دائرة ا ب جـ وقوس م ب معلومة، يكون متى أدخلت قوس م ب إلى جدول المطالع في الفلك المستقيم وأخذ ما يخصها من دائرة البروج، كان ذلك مساوياً لقوس م كـ، فقوس م كـ معلومة؛ وإذا أدخلت قوس م كـ المعلومة إلى جدول الميل وأخذ ما يخصها من الميل، كان ذلك مساوياً لقوس كـ ب، فقوس كـ ب معلومة، وكل واحدة من قوسي م كـ كـ ب معلومة وقوس ب د معلومة، لأنها نهاية ميل الفلك المائل عن دائرة البروج، فقوس كـ د معلومة. ولأنه قد تقاطع فيما بين قوسي كـ د جـ د قوسا ح كـ جـ ب على نقطة م، تكون نسبة جيب قوس كـ د إلى جيب قوس د ب المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس كـ ح إلى جيب قوس ح م المعلومة ⟨ومن نسبة جيب قوس جـ م إلى جيب قوس جـ ب⟩. وقوس كـ م معلومة، فقوس ح م معلومة وجميع قوس كـ ح معلومة وقوس ح ز ربع دائرة، فتبقى قوس كـ ز معلومة. وأيضاً، فإن قوس كـ د قد تبين أنها معلومة وقوس د ه ربع دائرة. فلأنه قد تقاطع فيما بين قوسي ه ز ح ز قوسا ه كـ ح ط على نقطة د، تكون نسبة جيب قوس ه ط إلى جيب قوس ط ز مؤلفة من نسبة جيب قوس ه د إلى جيب قوس د كـ المعلومة ومن نسبة جيب قوس كـ ح إلى جيب قوس ح ز المعلومة، فنسبة جيب قوس/ ه ط إلى جيب قوس ط ز معلومة. وقوس ه ط ربع دائرة، فقوس ط ز معلومة ٣٨٥-ظ وهي غاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. وتكون نقطة ط هي النهاية الشمالية أو الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى معدل النهار: إن كانت نقطة ع هي القطب الشمالي، فنقطة ط هي النهاية الشمالية، وإن كانت نقطة ع هي القطب الجنوبي، فإن نقطة ط هي النهاية الجنوبية.

4 دائرة ه ب كـ: كرر بعدها « قائمة على دائرة البروج يكون قائمة دائرة البروج على زوايا »، ثم استدرك وضرب عليها بالقلم وكتب كلمة « زائد » على كلمة « يكون » وكلمة « إلى » على « زوايا » – 5 الفلك: فلك – 7 قوس: مكررة – 11 قوس: مكررة – 13 المعلومة: معلومة – 19 ح ز: ح د.

وأيضا، فإنا نجيز على نقطة نَ وهي قطب دائرة البروج وعلى نقطة طَ وهي النهاية الشمالية أو الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار دائرة عظيمة؛ ولتكن دائرة ن ط س، ولتقطع هذه الدائرة دائرة البروج على نقطة سَ. فلأن نسبة جيب قوس كـ ب إلى جيب قوس ب د المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس كـ م إلى جيب قوس م ح المعلومة ومن جيب قوس ح جـ إلى جيب قوس جـ د، فنسبة جيب قوس ح جـ إلى جيب قوس جـ د معلومة. وقوس جـ د ربع دائرة، فقوس ح جـ معلومة. ولأن قوس جـ د ربع دائرة وقوس ح ط ربع دائرة، تكون قوس د ط مساوية لقوس جـ ح، فقوس د ط معلومة. ولأن قوس د ط مساوية لقوس ح جـ، تكون قوس د ط أقلّ من ربع دائرة، فنقطة طَ هي فيما بين نقطتي ا د، فتكون قوس ا ط أقلّ من ربع دائرة. ولأن دائرة ن ط دائرة عظيمة وهي تقطع دائرة ا ط جـ على نقطة طَ، فهي تقطعها على نقطة أخرى فيما بين نقطتي ا جـ، مقابلة لنقطة طَ. وإذا كانت دائرة ن ط تقطع دائرة ا ط جـ على نقطة مقابلة لنقطة طَ، فهي تقطع قوس ا ب على نقطة فيما بين نقطتي ا ب، فنقطة سَ فيما بين نقطتي ا ب، فقوس جـ س أقل من نصف دائرة. فلأنه قد تقاطع فيما بين قوسي ن س جـ س قوسا ن ب جـ ط، تكون نسبة ‹جيب› قوس جـ س إلى جيب قوس س ب مؤلفة من نسبة جيب قوس جـ ط إلى جيب قوس ط د المعلومة ومن نسبة جيب قوس د ن إلى جيب قوس ن ب المعلومة، فنسبة جيب قوس جـ س إلى جيب قوس س ب معلومة. وقوس جـ ب ربع دائرة، فقوس س ب معلومة ونقطة بَ من دائرة البروج معلومة، فنقطة سَ من دائرة البروج معلومة وهي موضع نقطة طَ التي هي النهاية الشمالية أو النهاية الجنوبية من الفلك المائل. وجميع هذا البرهان هو على ما في الصورة الأولى.

فإن كانت نقطة مَ التي هي نقطة الاعتدال على قوس ا ب، فالبرهان هو البرهان الذي ذكرناه بعينه، إلا أن قوسي ه ز ن ط تكونان مما يلي نقطة جـَ.

14 سَ: بَ – 23 فالبرهان: والبرهان – 24 ه ز ن ط: ه ح ز ن ط ب.



وإن كانت نقطة الاعتدال هي نقطة ب، فإنا نجيز على نقطة ب دائرة معدل النهار على ما في الصورة الثانية، ولتكن ب ح. ونجيز على ه ع دائرة عظيمة، ولتكن ه ع ط ز، ولتكن نقطة ط على الفلك المائل ونقطة ز على دائرة معدل النهار على مثل ما في الصورة الأولى، فتكون قوس ط ز هي غاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار، وتكون نقطة ط هي النهاية الشمالية أو الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار. ونجيز على نقطتي ن ط دائرة عظيمة؛ ولتقطع دائرة البروج على نقطة / س، كمثل ما [٣٨٦-و] في الصورة الأولى. فتكون نقطة س هي موضع النهاية الشمالية أو الجنوبية من دائرة البروج. وإذا كانت نقطة ب نقطة الاعتدال، فإن نقطة جـ هي نقطة الانقلاب. ونجيز على نقطتي ن ع دائرة عظيمة، فتكون هذه الدائرة هي دائرة الأقطاب، فهي تمرّ بنقطة جـ، ولتقطع دائرة معدل النهار على نقطة ك. فتكون قوس جـ ك هي ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار، فهي معلومة. وقوس ن جـ ربع دائرة، فتبقى قوس ك ن معلومة، وتكون نسبة جيب قوس ب د إلى جيب قوس د ن المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ح إلى جيب قوس ح ك ومن نسبة جيب قوس ك جـ إلى جيب قوس جـ ن المعلومة، فنسبة ‹جيب› قوس ب ح إلى جيب قوس ح ك معلومة. وقوس ب ك ربع دائرة، فقوس ح ك معلومة. وقوس ح ب معلومة وقوس

4 مثل: ميل.

ح ز ربع دائرة، لأن نقطة ح قطب دائرة ز ع ه، فقوس ب ز مساوية لقوس ح ك المعلومة. وأيضاً، فإن نسبة جيب قوس ه ط إلى جيب قوس ط ز مؤلفة من نسبة جيب قوس ه د إلى جيب قوس د ب المعلومة ومن نسبة جيب قوس ب ح إلى جيب قوس ح ز المعلومة، فنسبة جيب قوس ه ط إلى جيب قوس ط ز معلومة، وقوس ه ط معلومة، فقوس ط ز معلومة وهي غاية ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار. وأيضاً، من أجل أن قوسي ب ن ن د معلومتان وقوسي ب ك ك ح معلومتان، تكون قوسا جـ ح ح د معلومتين بالنسبة المؤلفة. فتكون قوس د ط معلومة، لأنها مساوية لقوس ح جـ. وأيضاً، لأن قوسي جـ ط ط د معلومتان، وقوسي د ن ن ب معلومتان، تكون نسبة جيب قوس جـ س إلى جيب قوس س ب معلومة. وقوس جـ ب ربع دائرة، فقوس ب س معلومة ونقطة ب معلومة لأنها نقطة الاعتدال، فنقطة س من دائرة البروج معلومة وهي موضع نقطة ط التي هي النهاية الشمالية أو الجنوبية من دائرة البروج.

فقد تبين من جميع ما ذكرناه في هذا الفصل أن موضع النهاية الشمالية والجنوبية لفلك القمر المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار من دائرة البروج في كل وقت معلوم يكون معلوماً، وأن مقدار ميل هذا الفلك عن معدل النهار في الوقت المعلوم يكون معلوماً.

بمثل هذا البيان بعينه يتبين موضع النهاية الشمالية والجنوبية من الفلك المائل لكل واحد من الكواكب الثلاثة العلوية بالقياس إلى دائرة معدل النهار من دائرة البروج، ومقدار ميل كل واحد من هذه الأفلاك عن دائرة معدل النهار؛ وذلك ما أردنا أن نبين في هذا الفصل.

<**كج**> فأما ميل فلكي الزهرة وعطارد عن دائرة معدل النهار، فإنه يتغير من أجل <أن ميل> هذين الفلكين عن دائرة البروج؛ إلا أن مقدار ميل كل واحد من هذين الفلكين عن دائرة معدل النهار في الوقت المعلوم يكون معلوماً وموضعي النهاية الشمالية والجنوبية بالقياس إلى دائرة معدل النهار من دائرة البروج يكونان معلومين. وذلك أن ميل الفلك المائل لكل واحد من هذين الكوكبين عن دائرة البروج وإن كان يتغير، فإن تغيره معلوم، فمقداره

7 معلومتان (الأولى والثانية): معلومتين – 9 معلومتان: معلومتين / وقوسي: فقوسي / معلومتان: معلومتين – 11 فقوس: وقوس – 26 يكونان معلومين: يكون معلوما.

في كل وقت معلوم يكون معلومًا وموضع النهاية من دائرة البروج يكون معلومًا. أما / ٣٨٦-ظ موضع النهاية من دائرة البروج، فإن بعده أبداً من موضع الجوزهر ربع دائرة البروج. وموضع الجوزهر من دائرة البروج في كل وقت معلوم يكون معلومًا، فموضعا النهاية الشمالية والجنوبية من دائرة البروج لكل واحد من كوكبي الزهرة وعطارد في كل وقت معلوم يكونان معلومين. فأما مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج، فإنه إذا كان مركز فلك تدوير كل واحد من هذين الكوكبين في البعد الأبعد وفي البعد الأقرب من الفلك الخارج المركز، فإنه يكون الفلك المائل على غاية ميله عن دائرة البروج. وغاية ميله عن دائرة البروج معلوم المقدار، لأن ذلك قد بيّنه بطلميوس وبين مقداره.

فأما إذا كان مركز فلك التدوير على إحدى نقطتي التقاطع، أي النقطتين كانتا، فلا ميل للفلك المائل عن دائرة البروج في هذه الحال لأن الفلك المائل في هذه الحال يكون قد انطبق على دائرة البروج على ما ذكره بطلميوس. وأما إذا كان مركز التدوير فيما بين البعد الأبعد وبين نقطة التقاطع، فإن ميل الفلك المائل عن دائرة البروج يكون أقل من الميل الأعظم، ويكون نسبته إلى الميل الأعظم كنسبة القوس من الفلك المائل التي بين مركز فلك التدوير وبين نقطة التقاطع إلى ربع دائرة؛ وذلك لأن الفلك المائل يتحرك من غاية ميله إلى أن ينطبق على دائرة البروج في الزمان الذي يقطع فيه مركز فلك التدوير من حركة الطول ربع دائرة. وموضع الكوكب في الطول الذي هو الموضع الوسط في كل وقت معلوم يكون معلومًا، وبعده من موضع البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز يكون معلومًا وهذا البعد يكون بالقياس إلى مركز العالم. فيكون بعد مركز فلك التدوير وهو موضع الكوكب الوسط من نقطة التقاطع التي هي نقطة الجوزهر – وأريد بهذا الجوزهرِ الجوزهرَ الذي فيه يكون حركة الطول – في ‹هذه› الحال في كل وقت معلوم معلوم المقدار. فتكون نسبة هذا البعد إلى ربع دائرة نسبة معلومة؛ وهذه النسبة هي نسبة مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج في ذلك الوقت المعلوم إلى غاية ميله عن دائرة البروج، الذي هو مقدار معلوم. فمقدار ميل الفلك المائل لكوكبي الزهرة وعطارد في كل وقت معلوم عن دائرة البروج يكون معلومًا.

11 إحدى نقطتي: نقطة – 12 كانتا: كانت – 14 نقطة: النقط.

وإذا كان مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج معلوماً وكان موضع نهاية الميل عن دائرة البروج من دائرة البروج معلوماً ، فإن مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار يكون معلوماً ، وموضع النهاية الشمالية والنهاية الجنوبية بالقياس إلى دائرة معدل النهار من دائرة البروج يكون معلوماً بالطريق الذي تقدم بيانه في فلك القمر.

أما إن كان الجوزهران على نقطتي الاعتدالين، فإن موضعي النهاية الشمالية والنهاية الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار هما نقطتا الانقلابين / كما تبين ذلك في فلك القمر. ٣٨٧-و

وأما مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة معدل النهار ، فإنه إن كان موضع النهاية الشمالية هو رأس السرطان ، فإن مقدار الميل هو مقدار ميل دائرة البروج عن معدل النهار ، مزيداً عليه ميل الفلك المائل عن دائرة البروج في الوقت المعلوم ؛ وإن كان موضع النهاية الجنوبية هو رأس السرطان ، فمقدار الميل هو مقدار ميل دائرة البروج عن دائرة معدل النهار ، منقوصاً منه مقدار ميل الفلك المائل عن دائرة البروج في ذلك الوقت المعلوم.

وإن كان موضعا الجوزهرين هما غير نقطتي الاعتدالين، فإن مقدار الميل وموضعي النهاية الشمالية والجنوبية تستخرج بالطريق الذي ذكرناه في فلك القمر بعينه.

فأما نقطتا التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار ، فإنهما تتحركان حول نقطتي الجوزهرين ، فتتغير لذلك نقطتا التقاطع. وكذلك كل نقطة في محيط الفلك المائل ، فإنها تتحرك حول نقطتي الجوزهرين. وذلك أنه إذا كان الفلك المائل يتحرك حتى ينطبق على دائرة البروج ويفارق دائرة البروج ويعود إليها ، وكانت نقطتا التقاطع ليس تتحركان بهذه الحركة، فإن هذه الحركة هي حول نقطتي التقاطع اللتين هما الجوزهران ، وهاتان النقطتان هما قطبا هذه الحركة. وإذا كانت هذه الحركة حول هذين القطبين، فإن كل نقطة من الفلك المائل تتحرك بهذه الحركة على دائرة قطباها نقطتا الجوزهرين. فإذا تحرك كوكب الزهرة أو كوكب عطارد بالحركة الزمانية زماناً معلوماً ، فإن كل نقطة من محيط فلكه المائل تتحرك على دائرة قطباها نقطتا الجوزهرين. أما كل نقطة من ربع الفلك المائل الذي بين نقطة الرأس

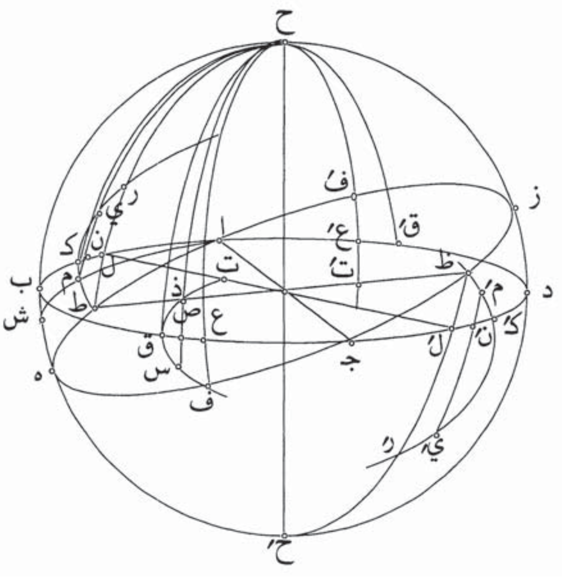
11 الفلك: فوق السطر – 19 وكذلك: ولذلك – 22 تتحركان: تتحرك.

وبين البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز – وأعني بنقطة الرأس النقطة التي يتحرك مركز فلك التدوير منها صاعداً إلى البعد الأبعد – وكل نقطة من الربع المقابل لهذا الربع سوى نقط النهايات – التي هي نقطتا الجوزهرين ونقطتا النهايتين الشمالية والجنوبية – فإنها تتحرك على توالي البروج، إذا كانت حركة البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز في كوكب الزهرة من الشمال إلى دائرة البروج، وفي كوكب عطارد من الجنوب إلى دائرة البروج. ثم إذا تحرك الفلك المائل يفارق دائرة البروج متوجهاً إلى الجهة الأخرى، أما في فلك الزهرة فإن البعد الأبعد يكون متحركًا من دائرة البروج إلى الجنوب، وأما في فلك عطارد فإنه يكون متحركًا من دائرة البروج إلى الشمال، وفي هذه الحال يكون كل نقطة من الربعين المتقدم ذكرهما متحركة على خلاف توالي البروج. وأما الربعان الباقيان فإن كل نقطة منهما تكون حركتها بالضد من حركة الربعين الأولين. أما إذا كانت حركة البعد الأبعد في فلك الزهرة متحركًا من الشمال إلى دائرة البروج وفي فلك عطارد متحركًا من الجنوب إلى دائرة البروج، فإن كل نقطة في هذين الربعين الآخرين تكون حركتها على خلاف توالي البروج. ثم إذا فارق الفلك المائل سطح دائرة البروج متحركًا إلى الجهة الأخرى، كانت كل نقطة من هذين الربعين متحركة على توالي البروج. ثم إذا تحرك الفلك المائل راجعاً إلى دائرة البروج ومن دائرة البروج إلى النهاية الأولى، كانت حركات النقط بالعكس، ما كان منها متحركًا على توالي البروج، فهو في هذه الحال يتحرك على خلاف توالي البروج، وما كان منها متحركًا على خلاف توالي البروج فهو في هذه الحال يتحرك على توالي البروج.

فلنبين جميع ذلك بالبرهان. وليكن دائرة البروج دائرة آ ب جـ د والفلك المائل آ ه جـ ز، ولتكن نقطة ه النهاية الشمالية لكوكب الزهرة والنهاية الجنوبية لكوكب عطارد. / ولتكن نقطة ز النهاية الجنوبية لكوكب الزهرة ٣٨٧-ظ والنهاية الشمالية لكوكب عطارد. وليكن توالي البروج من نقطة آ إلى نقطة ب وما يليها، فتكون نقطة آ هي نقطة الرأس ونقطة جـ هي نقطة الذنب، لأن البعد الأبعد لكوكب الزهرة هو أبداً في النهاية الشمالية ولكوكب عطارد هو أبداً في النهاية الجنوبية. ونجيز على نقطتي ه ز وعلى قطب دائرة البروج

23 آ ه جـ ز: آ ه جـ د.

دائرة عظيمة، وليكن قطب دائرة البروج نقطة ح. ونفرض على قوس ا ه نقطة كيفما اتفق، ولتكن نقطة ط. وكذلك نفرض على قوس جـ ز نقطة كيفما اتفق ولتكن نقطة ظ. ونجيز على نقطتي ط ح دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ح ل ط، ولتقطع هذه الدائرة <دائرة> البروج على نقطة ل، فهذه الدائرة تكون قائمة على دائرة البروج على زوايا قائمة، فتكون زاوية ا ل ط قائمة وزاوية جـ ل' ظ أيضًا قائمة، فتكون قوس ا ط أعظم من قوس ا ل وقوس جـ ظ أيضًا في الجهة المقابلة أعظم من قوس جـ ل'. فنجعل نقطة ا قطبًا ونديرِ ببعد ا ط دائرة، فهي تقطع قوس ا ب على نقطة فيما بين نقطتي ل ب، فلتقطعها على نقطة كـ، وهي تقطع أيضًا قوس ح ل على نقطة فيما بين نقطتي ح ل، لأن قوس ا ل قائمة على قوس ح ط. وقوس ا ل أقل من ربع دائرة، فلتقطع دائرة ط كـ قوس ح ل على نقطة ر. وكذلك إذا جعلنا نقطة جـ قطبًا وأدرنا ببعد جـ ظ دائرة، فهي تقطع قوس جـ د على نقطة فيما بين نقطتي جـ د، فلتقطعها على نقطة كـ'، وهي تقطع قوس ح ل' على نقطة متجاوزة لنقطة ل'؛ فلتقطعها على نقطة ر'. ونجيز على نقطتي ح كـ دائرة عظيمة، ولتكن ح كـ.



11 وكذلك: ولذلك – 15 ح كـ: ه كـ.

فلأن نقطة ح قطب دائرة البروج، تكون كل واحدة من قوسي ح ب ح ك ربع دائرة، ولأن نقطة ح قطب دائرة ب ك ونقطة ح على كل واحدة من دائرتي ح ب ح ك يكون قطبا دائرتي ح ب ح ك على دائرة ب ك. ونقطة آ التي هي قطب دائرة ح ب هي قطب دائرة ط ك ر، فدائرة ب ك تمرّ بقطب دائرة ط ك. ولأن دائرتي ح ك ط ك ر متلاقيتان على نقطة ك، وقد مرّ بنقطة ك دائرة عظيمة وهي دائرة ب ك آ، وأقطاب دائرتي ح ك ط ك ر على دائرة ب ك، تكون دائرة ح ك مماسة لدائرة ط ك ر على نقطة ك. وإذا كانت دائرة ح ك تماس دائرة ط ك ر على نقطة ك، فإن كل دائرة تخرج من نقطة ح إلى نقطة من قوس ط ك فيما بين نقطتي ط ك أو إلى نقطة من قوس ك ر فيما بين نقطتي ك ر، فإنها تقطع قوس ك ل. ولنتعلم على قوس ط ك نقطة كيفما اتفق، ولتكن نقطة م. ونجيز عليها وعلى نقطة ح دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ح م، فهذه الدائرة تقطع قوس ك ل وتقطع قوس ك ر، فلتقطع قوس ك ل على نقطة ن ولتقطع قوس ك ر على نقطة ي. فتكون نقطة ن من دائرة البروج هي موضع نقطة م [وموضع نقطة ن] ونقطة ل هي موضع نقطة ط. فإذا كان الفلك المائل على غاية ميله، كان وضع نقطة ط هو الوضع الذي هي عليه وكان موضع نقطة ط من دائرة البروج هو نقطة ل. ثم إذا تحرك الفلك المائل متوجهاً إلى دائرة البروج، تحركت نقطة ط على دائرة ط ك ر لأن / هذه الحركة هي على قطب آ. فإذا صارت نقطة ط إلى نقطة م، صار ٣٨٨-و موضع نقطة ط من دائرة البروج هو نقطة ن. ونقطة ن أبعد عن نقطة آ من نقطة ل، وتوالي البروج هو من نقطة آ إلى نقطة ب وما يليها. فحركة نقطة ط في هذه الحال على توالي البروج. وكذلك إذا صارت نقطة ط من نقطة م إلى نقطة ك، صار موضعها نقطة ك من بعد أن كان موضعها نقطة ن. فحركة موضع نقطة ط إلى أن تصير إلى نقطة ك هي على توالي البروج. ثم إذا تحرك الفلك المائل متوجهاً إلى الجهة الأخرى من دائرة البروج، تحركت نقطة ط من نقطة ك إلى ناحية نقطة ر، فتصير نقطة ط إلى نقطة ي. فإذا صارت إلى نقطة ي يكون موضعها نقطة ن. ولما كانت على نقطة ك، كان موضعها نقطة ك، فتكون قد عادت من نقطة ك إلى نقطة ن، فتكون حركتها على خلاف توالي

10 ك ر: كد – 21 ط (الثانية): ك – 25 ط: ك.

البروج. وكذلك إذا صارت إلى نقطة ر، يصير موضعها نقطة ل. وإذا صارت إلى نقطة ر، تكون قد انتهت إلى غاية ميلها لأن قوس ر ل مساوية لقوس ل ط. وذلك أن القوس التي تخرج من نقطة ا إلى نقطة ر من الدائرة العظيمة هي مساوية لقوس ا ط، لأن نقطة ا قطب دائرة ط ك ر، وقوس ا ط قائمة على قوس ر ط على زوايا قائمة، فقوس ر ل مساوية لقوس ل ط. ثم إذا تحرك الفلك المائل، عائداً إلى دائرة البروج، تحركت نقطة ط من نقطة ر إلى نقطة ك، فيتحرك موضعها من نقطة ل إلى نقطة ن، ثم إلى نقطة ك. فيكون موضعها متحركًا على توالي البروج. ثم إذا تحرك الفلك المائل عائداً إلى جهة نقطة ه، فتحركت نقطة ط من نقطة ك إلى نقطة ط، فتحرك موضعها من نقطة ك إلى نقطة ل. فيكون حركة موضعها على خلاف توالي البروج.

وكذلك يتبين في قوس ظ ك' ر' التي قطعتها نقطة ي' أن دائرة ح' ظ ر' مماسة لدائرة ظ ك' ر'. فيكون إذا تحركت نقطة ظ على قوس ظ ك' من نقطة ظ إلى نقطة ك' تحرك موضعها من نقطة ل' إلى نقطة ك'، فتكون حركته على توالي البروج، وإذا تحركت نقطة ظ على قوس ك' ر' تحرك موضعها من نقطة ك' إلى نقطة ل'، فتكون حركته على خلاف توالي البروج. وإذا عاد الفلك المائل متحركًا إلى دائرة البروج، تحركت نقطة ظ من نقطة ر' إلى نقطة ك'، فتكون حركة موضعها على توالي البروج. وإذا تحركت نقطة ظ من نقطة ك' إلى نقطة ظ، كانت حركة وضعها من نقطة ك' إلى نقطة ل'، فتكون حركته على خلاف توالي البروج.

وأيضًا، فإنا نفرض على كل واحدة من قوسي ه جـ ز ا كيفما اتفق ⟨نقطة⟩، ولتكن نقطة ف. ونجيز عليها وعلى نقطة ح دائرة عظيمة، ولتكن ح ف؛ ولتقطع هذه الدائرة دائرة البروج على نقطة ع. فتكون هذه الدائرة قائمة على دائرة البروج على زوايا قائمة، فتكون زاوية جـ ع ف قائمة وتكون قوس جـ ف أعظم من جـ ع. وكذلك تكون زاوية ا غ ف' في الجهة المقابلة قائمة وتكون قوس ا ف' أعظم من قوس ا غ. ونجعل نقطة جـ قطبًا وندير ببعد جـ ف دائرة. فهذه الدائرة تقطع قوس جـ ب على نقطة فيما بين

6 عائداً: عادا – 16 تحركت: تحرك – 17 ظ: ك – 24 وكذلك: ولذلك.

نقطتي ع ب؛ فلتقطعها على نقطة ق. وهذه الدائرة تقطع دائرة ح ع على نقطة فيما بين نقطتي ح ع، فلتقطعها / على نقطة ت. وكذلك نجعل نقطة ا ٣٨٨-ظ قطبًا وندير ببعد ا ف' دائرة، فهذه الدائرة تقطع قوس غ د على نقطة فيما بين نقطتي غ د وتقطع دائرة ح غ، فلتقطع قوس غ د على نقطة ق' وقوس ح غ على نقط ت'. ونجيز على نقطتي ح ق دائرة عظيمة ولتكن ح ق. فيتبين ⟨كما تبين⟩ من قبل أن دائرة ح ق مماسة لدائرة ف ق ت. فيكون كل دائرة تخرج من نقطة ح إلى نقطة من قوس ف ق أو إلى نقطة من قوس ق ت تقطع قوس ق ع من دائرة البروج. ونفرض على قوس ف ق نقطة كيفما اتفق ولتكن نقطة س. ونجيز عليها وعلى نقطة ح دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ح س، فهذه الدائرة تقطع قوس ق ع وتقطع قوس ⟨ق ف وقوس⟩ ق ت، فلتقطع قوس ق ع ⟨على نقطة ص وتقطع قوس ق ف⟩ على نقطة س ولتقطع قوس ق ت على نقطة ذ. فإذا تحرك الفلك المائل إلى ناحية دائرة البروج تحركت نقطة ف على قوس ف ق من نقطة ف إلى نقطة ق، فإذا صارت نقطة ف إلى نقطة س، صار موضع نقطة ف من دائرة البروج نقطة ص. وقد كان موضع نقطة ف عند كونها في موضعها وهو عند غاية ميلها هو نقطة ع من دائرة البروج. فموضع نقطة ف كان نقطة ع، ثم صارت نقطة ص. ونقطة ص أقرب إلى نقطة ا من نقطة ع، فحركة موضع نقطة ف في هذه الحال هي على خلاف توالي البروج؛ وكذلك تكون حالها إلى أن تصير إلى نقطة ق، فيصير موضعها من دائرة البروج هو نقطة ق. ثم إذا تحرك الفلك المائل وفارق دائرة البروج متوجهًا إلى الجهة الأخرى، تحركت نقطة ف على قوس ق ت، فتصير من نقطة ق إلى نقطة ذ، فيصير موضعها نقطة ص من بعد أن كان موضعها نقطة ق؛ فتكون حركة موضعها في هذه الحال على توالي البروج، وكذلك إلى أن تصير إلى نقطة ت، فيصير موضعها نقطة ع. ثم إذا تحرك الفلك المائل متوجهًا إلى دائرة البروج، تتحرك نقطة ف على قوس ت ق من نقطة ت إلى نقطة ق. فإذا صارت إلى نقطة ذ يصير موضعها نقطة ص، فيكون موضعها قد تحرك من نقطة ع إلى نقطة ص، فتكون حركته على خلاف توالي البروج، كذلك إلى أن تصير إلى نقطة ق. وإذا صارت إلى نقطة ق، يكون الفلك

3 ا ف': ا ب – 13 صارت: صار – 16 صارت: صار – 17 هي: هو.

المائل قد انطبق على دائرة البروج. ثم إذا فارق الفلك المائل دائرة البروج متوجهًا إلى جهة نقطة ه، تتحرك نقطة ف من نقطة ق إلى نقطة ف. فإذا انتهت إلى نقطة س، يصير موضعها نقطة ص. وقد كان موضعها نقطة ق، فيكون حركة موضعها في هذه الحال على توالي البروج، وكذلك إلى أن تعود إلى نقطة ف. وعلى مثل ذلك يكون حركة ‹نقطة› ف' التي في الجهة المقابلة، أعني التي على قوس ا ز.

وأقول أيضًا: إن حركة كل نقطة من محيط الفلك المائل حول نقطتي الجوزهرين تكون في الزمان المعلوم مقداراً معلومًا من الدوائر المتوازية التي قطباها نقطتا الجوزهرين، وتكون حركة موضعها في دائرة البروج في الزمان المعلوم معلومة.

وبرهان ذلك: أن حركة الفلك المائل من غاية ميله إلى أن يطابق دائرة البروج تكون في زمان معلوم، لأنه يكون في الزمان الذي يقطع فيه مركز فلك التدوير من الفلك المائل / ربع دائرة. وإذا تحرك مركز فلك التدوير من ٣٨٩-و البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز متوجهًا إلى نقطة الذنب، تحرك الفلك المائل متوجهًا إلى دائرة البروج. فإذا قطع فلك التدوير جزءاً من الفلك الخارج المركز، تكون نقطة ه قد قطعت جزءاً من قوس ه ب نسبته إلى قوس ه ب كنسبة الجزء الذي قطعه مركز فلك التدوير من الفلك الخارج المركز إلى القوس من الفلك الخارج المركز التي يوترها عند مركز العالم بزاوية قائمة؛ وهذه القوس معلومة. فيلزم من ذلك أنه إذا كان موضع مركز فلك التدوير من محيط الفلك المائل معلوماً، كان موضع كل نقطة من محيط الفلك المائل من دائرتها، التي تتحرك عليها، النظيرة لدائرة ط ك ر معلومًا. وإذا كان ذلك كذلك، فإن كل زمان معلوم يكون أوله معلومًا، تكون كل نقطة من محيط الفلك المائل قد قطعت فيه من دائرتها قوساً معلومة. فإذا قطعت نقطة ط قوس ط م في زمان معلوم، كانت قوس ط م معلومة. ثم إذا تحركت نقطة ط من بعد حصولها على نقطة م زماناً معلومًا، كان الذي تقطعه من دائرة ط ك ر قوساً معلومة.

وأقول أيضاً: إن موضع نقطة ط يقطع في الزمان المعلوم، الذي أوله معلوم، قوساً من دائرة البروج مقدارها معلوم.

10 معلومة: معلوما.

وبرهان ذلك: أنا نجيز على نقطتي ا م قوسًا من دائرة عظيمة، ولتكن ا م ش. فإذا كانت نقطة ط من قوس ا ه على نقطة ط من دائرة ط ك في وقت معلوم وهو أول الزمان المعلوم، كانت قوس ه ب التي هي ميل الفلك المائل عن دائرة البروج معلومة.

إن كان مركز فلك التدوير في ذلك الوقت المعلوم على البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز، فقوس ه ب هي غاية الميل، فهي معلومة. وإن لم يكن على نقطة البعد الأبعد، فهو على نقطة بعدها <من> البعد الأبعد معلوم، فيكون بعده من نقطة التقاطع قوسًا معلومة لأنها هي بقية القوس التي يوترها عند مركز العالم زاوية قائمة، فتكون نسبة هذه البقية إلى القوس من الفلك الخارج المركز التي يوترها عند مركز العالم زاوية قائمة نسبة معلومة؛ فتكون نسبة قوس ه ب إلى الميل الأعظم معلومة، فتكون قوس ه ب معلومة. ثم إذا تحركت نقطة ط زمانًا معلومًا قطعت قوس ط م، فتكون نقطة ه قد قطعت قوس ه ش، فتكون قوس ه ش معلومة. وتبقى قوس ش ب معلومة. وقوس ش ه شبيهة بقوس م ط لأن الدائرتين متوازيتان وعلى قطب واحد وهو ا، فتكون قوس ط م معلومة وتكون قوس م ك معلومة؛ وتكون قوس ا م مساوية لقوس ا ط فتكون قوس ا م معلومة لأن قوس ا ط معلومة. إذا كانت نقطة ط من الفلك المائل معلومة وكانت قوس ه ب معلومة، كانت نقطة ل من دائرة البروج معلومة. وذلك أن نسبة جيب قوس ح ب إلى جيب قوس ب ه مؤلفة من نسبة جيب قوس ح ل إلى جيب قوس ل ط ومن نسبة جيب قوس ط ا إلى جيب قوس ا ه المعلومة، فنسبة جيب قوس ح ل إلى جيب قوس ل ط / ٣٨٩-ظ معلومة. وقوس ح ل ربع دائرة، فقوس ل ط معلومة. وأيضًا، فإن نسبة جيب قوس ح ه إلى جيب قوس ه ب المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس ح ط إلى جيب قوس ط ل المعلومة ومن نسبة جيب قوس ل ا إلى جيب قوس ا ب، فنسبة جيب قوس ل ا إلى جيب قوس ا ب معلومة وقوس ا ب ربع دائرة، فقوس ا ل معلومة؛ ونقطة ا معلومة لأنها موضع الجوزهر الذي هو الرأس، فنقطة ل معلومة وهي موضع نقطة ط من دائرة

7 البعد (الثانية): بعد – 8 قوسًا: قوس – 12 تحركت: تحرك / فتكون: يكون – 14 متوازيتان: متوازيتين – 17 إذا ... معلومة و: مكررة – 26 الذي: اللتين.

البروج في الوقت المعلوم. ثم فلتتحرك نقطة ط زمانًا معلومًا ولتقطع قوس ط م، فتكون قوس ط م معلومة وتكون قوس ه ش معلومة، كما تبين فيما مضى، فتبقى قوس ش ب معلومة. وقوس ا م معلومة لأنها مساوية لقوس ا ط، فتكون نسبة جيب قوس ح ب إلى جيب قوس ب ش المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس ح ن إلى جيب قوس ن م ومن نسبة جيب قوس م ا إلى جيب قوس ا ش المعلومة، فتكون نسبة جيب قوس ح ن إلى جيب قوس ن م معلومة وقوس ح ن ربع دائرة، فقوس ن م معلومة. وأيضًا، فإن نسبة جيب قوس ح ش إلى جيب قوس ش ب المعلومة مؤلفة من نسبة جيب قوس ح م إلى جيب قوس م ن المعلومة ومن نسبة جيب قوس ن ا إلى جيب قوس ا ب، فنسبة جيب قوس ن ا إلى جيب قوس ا ب معلومة؛ وقوس ا ب ربع دائرة، فقوس ا ن معلومة؛ فنقطة ا من دائرة البروج معلومة، فنقطة ن معلومة وهي موضع نقطة م. فموضع نقطة ط إذا صارت إلى نقطة م في زمان معلوم يكون معلومًا، وقوس ل ن التي قطعها موضع نقطة ط في الزمان المعلوم تكون معلومة لأن كل واحدة من نقطتي ل ن من دائرة البروج معلومة.

فقد تبين مما بيناه أن كل نقطة من الفلك المائل تتحرك في الزمان المعلوم، الذي أوله وقت معلوم، قوسًا معلومة من الدائرة التي قطبها نقطة الجوزهر، وأن موضعها يقطع من دائرة البروج في الزمان المعلوم مقدارًا معلومًا.

وقد بينا أن حركات النقط التي على محيط الفلك المائل قد تكون على توالي البروج وقد تكون على خلاف توالي البروج؛ وبينا متى تكون حركتها على توالي البروج ومتى تكون حركتها على خلاف توالي البروج؛ وذلك ما أردنا أن نبين في هذا الفصل. وهذه المعاني هي التي كنا وعدنا في الشكل كج تبيينها.

<كد> وأيضًا، فإنا نقول: إنه إذا تحرك كل واحد من الكواكب السبعة زمانًا معلومًا، وكانت حركته من ناحية النهاية الشمالية بالقياس إلى دائرة / معدل النهار إلى ناحية النهاية الجنوبية، وكانت حركته الوسطى من ناحية ٣٩٠-و
البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز إلى ناحية البعد الأقرب، وكانت حركته

4 ب ش: د س – 25 الجنوبية: كتب بعدها «بالقياس إلى دائرة معدل النهار»، ثم ضرب عليها بالقلم.

المقومة زائدة، أعني تكون حركته في الوقت الثاني ⟨أسرع⟩ منها في الوقت الأول، فإنه يوجد له في هذه الحال نسبة معلومة تكون أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون له فيما بين طرفي الزمان الذي تحرك فيه إلى ما يخصّ ذلك الزمان المحصل من ميل حركته في جميع الزمان الذي تحرك فيه.

والوقت الذي يتحرك فيه كل واحد من الكواكب السبعة على الصفة التي حددناها هو وقت معلوم. أما الشمس، فإن ذلك يكون إذا كانت متحركة من رأس السرطان الذي هو نهاية ميلها في الشمال عن دائرة معدل النهار إلى البعد الأقرب من فلكها الخارج المركز؛ فإن الشمس إذا تحركت على هذه القوس، فهي تتحرك من الشمال إلى الجنوب وهي مع ذلك تتحرك من ناحية البعد الأبعد من فلكها الخارج المركز إلى البعد الأقرب منه، فهي تقطع من دائرة البروج في الأزمنة المتساوية قسيًا مختلفة، يكون الثاني منها أبداً أعظم من الأول. وهذا المعنى، أعني اختلاف هذه القسي، يتبين من الشكل حَ من هذه المقالة. فهيئة حركة الشمس من رأس السرطان إلى البعد الأقرب من فلكها الخارج المركز هي الهيئة التي حددناها.

وأما القمر فإنه يدور في فلكه المائل في كل شهر دورة على التقريب، فهو في كل شهر يتحرك من النهاية الشمالية من فلكه المائل إلى النهاية الجنوبية؛ أعني بالنهايتين: نهاية ميل فلكه المائل عن معدل النهار في الشمال وفي الجنوب. والبعد الأبعد من فلكه الخارج المركز يدور أيضًا في كل شهر دورة وحركته على خلاف توالي البروج. فهو أيضًا يتحرك في كل شهر من النهاية الجنوبية التي قدمنا ذكرها إلى النهاية الشمالية. وإذا كانت حركة القمر الوسطى من البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز إلى البعد الأقرب، فإن حركته في فلكه المائل تكون أبداً زائدة، أعني أنه يقطع من فلكه المائل في الأزمنة المتساوية قسيًا مختلفة، يكون الثاني منها أبداً أعظم من الأول. وهذه المعنى تبين في الشكل حَ.

فإذا كان تعديله الذي يوجبه فلك التدوير أيضًا زائداً كانت حركة القمر زائدة، وإن كان تعديله الذي يوجبه فلك التدوير ناقصًا وكان مع ذلك أقل من الزيادة التي يوجبها الفلك الخارج المركز، فإن حركة القمر تكون أيضًا

8 البعد: القرب – 10 البعد (الثانية): القرب – 26 ناقصًا: ناقص.

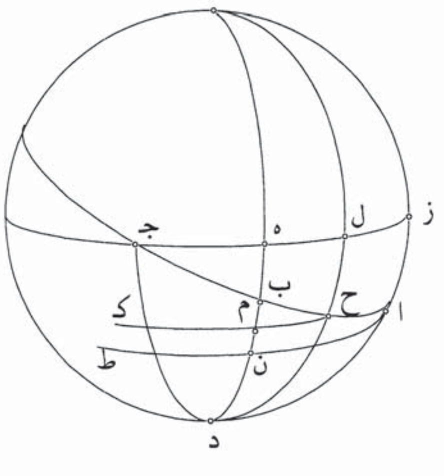
زائدة. فإذا كانت حركة القمر الوسطى من ناحية البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز إلى ناحية البعد الأقرب، وكانت حركة البعد الأبعد من ناحية النهاية الجنوبية إلى ناحية الشمالية بالقياس إلى دائرة معدل النهار، وكانت حركته زائدة، فإن هيئة حركته في هذه الحال هي الهيئة التي حددناها. وقد بينا أن موضعي النهاية الشمالية والنهاية الجنوبية لفلك القمر المائل بالقياس إلى معدل النهار يكونان في كل وقت معلوم معلومين، فالبعد الأبعد المتحرك هو في كل وقت معلوم معلوم الوضع أيضاً.

فأما الكواكب الخمسة، فإن النهايات الشمالية والجنوبية لأفلاكها المائلة قد بينا أنها تكون معلومة المواضع من دائرة البروج في الأوقات المعلومة، ومواضع أوجات هذه الكواكب، أعني البعد الأبعد من أفلاكها الخارجة المراكز هي، في كل وقت معلوم، معلومة المواضع. وقد بينا أن حركات هذه الأوجات بطيئة وهي في اليسير من الزمان غير محسوسة، وهذه الأوجات قد تكون للكواكب في طويل من الزمان منحدرة عنها، وموضع ذلك متوجه من الشمال إلى الجنوب. فإذا كان مركز فلك التدوير لكل واحد من الكواكب الخمسة متحركاً من ناحية البعد الأبعد / من الفلك الخارج المركز إلى ناحية ٣٩٠-ظ البعد الأقرب اللذين قد تبين أن موضعيهما معلومان، وكان مع ذلك متوجهاً من الشمال إلى الجنوب وكانت حركته زائدة على الوجه الذي بيناه في حركة القمر، فإن هيئة حركة الكوكب في هذه الحال تكون الهيئة التي حددناها.

والبرهان على ما ادعيناه: أن نجعل الفلك المائل لكل واحد من الكواكب السبعة دائرة ا ب ج ودائرة معدل النهار ز ه ج وقطب معدل النهار الشمالي نقطة د. ولتكن نقطة ج نقطة التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار. ولتكن نقطة النهاية الشمالية ا أو نقطة من القوس التي بين النهاية الشمالية وبين التقاطع. ولتكن حركة الكوكب من ناحية البعد الأبعد من فلكه الخارج المركز إلى ناحية البعد الأقرب، وليتحرك من نقطة ا إلى نقطة ب في زمان معلوم، وليكن زمان ط ا، وليكن قوس ط ا من الدائرة الزمانية التي قطبها نقطة د. وليكن حركته زائدة، أعني أن يكون ما يتحصل من تعديلاته زائدة على الحركة الوسطى من أول حركته في الزمان المعلوم إلى

6 فالبعد: والبعد – 13 منحدرة: منحدرا – 16 موضعيهما: موضعهما – 20 ز ه ج: د ه ج – 22 أو نقطة: ونقطة.

آخرها. وليقطع من فلكه المائل في زمان ط ا المعلوم قوس ا ب، وليكن قطعه لقوس ح ب التي هي بعض قوس ا ب في زمان كـ ح. ونجيز على نقطة د، التي هي قطب دائرة معدل النهار الشمالي، وعلى كل واحدة من نقط ا ح ب دائرة عظيمة، ولتكن دوائر د ا ز د ح ل د ب ه. ولتقطع دائرة د ب ه قوسي ط ا كـ ح على نقطتي ن م؛ فتكون قوس ن ه هي ميل قوس جـ ا عن دائرة معدل النهار لأنها مساوية لقوس ا ز، وتكون قوس م ه هي ميل قوس جـ ح عن دائرة معدل النهار لأنها مساوية لقوس ح ل، وتكون قوس ب ه هي ميل قوس جـ ب عن دائرة معدل النهار. فتكون قوس ن ب هي فضل ميل قوس ا ب، وتكون قوس م ب هي فضل ميل قوس ح ب، فتكون قوس ن ب هي التي سميناها ميل حركة الكوكب في زمان ط ا، وتكون قوس م ب هي ميل حركة الكوكب في زمان كـ ح، وتكون قوس كـ م هي الزمان المحصل لحركة الكوكب من نقطة ح إلى نقطة ب، فهو أحد الأزمنة المحصلة التي للكوكب التي تقع فيما بين طرفي زمان ط ا.



فأقول: إن نسبة زمان ط ا المعلوم إلى قوس ن ب التي هي ميل حركة الكوكب في الزمان المعلوم – التي قد تبين من قبل أنها معلومة – ⟨أعظم⟩ من نسبة قوس كـ م التي هي الزمان المحصل إلى قوس م ب التي تخصّ قوس كـ م من قوس ن ب.

7 ح ل: ح ز – 13 تقع: تقطع – 15 تبين: يتبين.

برهان ذلك: أن حركة الكوكب هي من ناحية البعد الأبعد من الفلك الخارج المركز إلى ناحية البعد الأقرب، فهو إذا قطع من الفلك الخارج المركز أجزاء متساوية في أزمنة متساوية، قطع من الفلك المائل أجزاء مختلفة، يكون أصغرها مما يلي نقطة آ وأعظمها مما يلي نقطة ب، كما تبين ذلك في الشكل ح. فيكون نسبة القوس التي قطعها الكوكب بالحركة الوسطى من فلكه الخارج المركز في زمان ط ا، وهي القوس من الفلك الخارج المركز التي يفصلها الخطان الخارجان من مركز الفلك المائل إلى نقطتي آ ب، إلى القوس التي قطعها الكوكب بالحركة الوسطى من فلكه الخارج المركز في زمان كـ ح، وهي القوس من الفلك الخارج المركز التي يفصلها الخطان الخارجان من مركز الفلك المائل إلى نقطتي ح ب، أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح، كما تبين في الشكل ط من هذه المقالة. ونسبة كل قوس تقطعها الحركة الوسطى من الفلك الخارج المركز في زمان ما إلى كل قوس تقطعها الحركة الوسطى من الفلك الخارج المركز في زمان آخر كنسبة الزمان إلى الزمان، / لأن الحركة الوسطى التي على الفلك الخارج المركز هي حركة متساوية ٣٩١-و
متشابهة على محيط دائرة متشابهة الأجزاء. وكل متحرك حركة متساوية متشابهة على مسافة متشابهة الأجزاء، فإن نسبة المسافة التي يقطعها في زمان ما إلى المسافة التي يقطعها في زمان آخر هي كنسبة الزمان إلى الزمان. فنسبة القوس من الفلك الخارج المركز التي تقطعها حركة الكوكب الوسطى، وهي حركة مركز فلك التدوير على محيط الفلك الخارج المركز في زمان ط ا إلى ما تقطعه الحركة الوسطى في زمان كـ ح، كنسبة زمان ط ا إلى زمان كـ ح، ونسبة القوس التي تقطعها الحركة الوسطى من الفلك الخارج المركز في زمان ط ا إلى القوس التي تقطعها الحركة الوسطى من الفلك الخارج المركز في زمان كـ ح، قد تبين أنها أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح، فنسبة زمان ط ا إلى زمان كـ ح أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح.

وأيضًا، فإنه قد تبين في الشكل ه أن فضول ميول الأجزاء المتساوية من كل دائرتين متقاطعتين تكون مختلفة، وأن أبعدهما عن نقطة التقاطع يكون

14 حركة: تحت السطر.

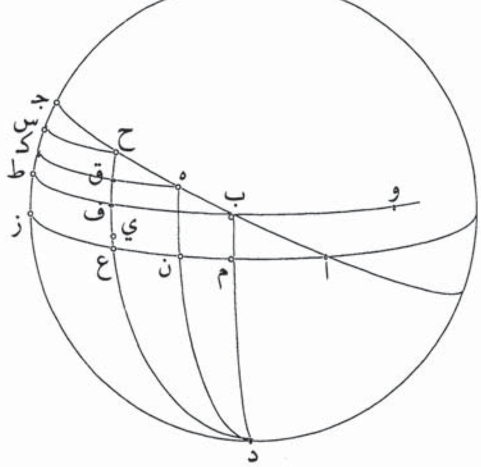
أصغر من أقربهما إلى نقطة التقاطع. ونبين في الشكل الذي بعده أن كل قوسين من الدائرة المائلة، فإن نسبة أبعدهما عن نقطة التقاطع إلى أقربهما من نقطة التقاطع تكون أعظم من نسبة فضلي ميليهما أحدهما إلى الآخر. فنسبة قوس ا ح إلى قوس ح ب أعظم من نسبة قوس ن م إلى قوس م ب. وبالتركيب تكون نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح أعظم من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب م. ونسبة زمان ط ا إلى زمان كـ ح أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح، ونسبة قوس ا ب إلى قوس ب ح أعظم من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب م، فنسبة زمان ط ا إلى زمان كـ ح أعظم بكثير من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب م. ونسبة القوس من الدائرة العظيمة الشبيهة بقوس ط ا إلى القوس من الدائرة العظيمة، أعني دائرة معدل النهار، الشبيهة بقوس كـ ح هي نسبة زمان ط ا إلى زمان كـ ح، فنسبة القوس من الدائرة العظيمة الشبيهة بقوس ط ا إلى القوس من الدائرة العظيمة الشبيهة بقوس كـ ح أعظم من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب م. وإذا بدلنا، كانت نسبة القوس من الدائرة العظيمة الشبيهة بقوس ط ا إلى قوس ن ب أعظم من نسبة القوس من الدائرة العظيمة الشبيهة بقوس كـ ح إلى ‹قوس› م ب. فنسبة زمان ط ا إلى قوس ن ب أعظم من نسبة زمان كـ ح إلى قوس م ب، ونسبة زمان كـ ح إلى قوس م ب أعظم من نسبة زمان كـ م إلى قوس م ب، فنسبة زمان ط ا إلى قوس ن ب أعظم بكثير من نسبة زمان كـ م إلى قوس م ب.

وكذلك تبين في كل زمان محصل يكون للكوكب فيما بين نقطتي ا ب أن نسبة ط ا إلى ن ب أعظم من نسبة ذلك الزمان المحصل إلى الميل الذي / يخص ذلك الزمان المحصل. ونسبة زمان ط ا إلى قوس ن ب معلومة لأن كل ٣٩١-ظ
واحد منهما معلوم.

‹كه› وأيضًا، فليكن الفلك المائل ا ب جـ، ودائرة معدل النهار ا م ز، وقطب معدل النهار الشمالي نقطة د. وليكن ا نقطة التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار. وليكن نقطة جـ النهاية الجنوبية من الفلك المائل

4 ا ح: ا حـ – 6 ونسبة: فنسبة.

بالقياس إلى دائرة معدل النهار. وليكن حركة الكوكب من ناحية البعد الأبعد إلى ناحية البعد الأقرب، وليتحرك من نقطة ب إلى نقطة ح في زمان معلوم، وليكن زمان ط ب، ولتكن قوس ط ب من الدائرة الزمانية التي قطبها نقطة د. ولتكن حركته زائدة، ولتقطع في زمان ط ب المعلوم قوس ب ح من الفلك المائل؛ وليكن قطعه لقوس ه ح التي هي بعض قوس ب ح في زمان ك ه. ونجيز على نقطة د التي هي قطب دائرة معدل النهار الشمالية وعلى كل واحدة من نقط ب ه ح جـ دائرة عظيمة، ولتكن دوائر د م ب د ن ه د ع ح د ز جـ. ولتقطع دائرة د ع ح قوسي ط ب ك ه على نقطتي ف ق.



فتكون قوس ف ع هي ميل قوس ا ب عن دائرة معدل النهار، لأنها مساوية لقوس ب م، وتكون قوس ق ع هي ميل قوس ا ه لأنها مساوية لقوس ه ن. وتكون قوس ح ع هي ميل قوس ا ح، فتكون قوس ح ف هي ميل حركة الكوكب في زمان ط ب، وتكون قوس ح ق هي ميل حركة الكوكب في زمان ك ه. وتكون قوس ك ق هي الزمان المحصل للكوكب في حركته من نقطة ه إلى نقطة ح، فهو أحد الأزمنة المحصلة التي للكوكب التي تقع فيما بين طرفي زمان ط ب. وتكون قوس ب ف هي مطالع قوس ب ح في الفلك المستقيم وتكون قوس ه ق هي مطالع قوس ه ح في الفلك المستقيم.

ونجيز على نقطة ح قوساً من دائرة زمانية؛ ولتقطع قوس د جـ على نقطة س، فتكون قوس ح س معلومة وقوس س جـ معلومة لأن قوس ح جـ معلومة. وذلك أن نقطة ب معلومة، لأنها موضع الكوكب في أول الزمان المعلوم الذي تحرك فيه الكوكب، ونقطة ح معلومة لأنها موضع الكوكب في آخر الزمان المعلوم. فقوس ح جـ معلومة، فمطالعها معلومة. وفضل ميلها معلوم لأن كل دائرة عظيمة تقطع دائرة معدل النهار وتكون غاية ميلها عنها معلومة، فإن مطالع أجزائها المعلومة في الفلك المستقيم تكون معلومة وفضول ميول أجزائها المعلومة تكون معلومة. وقد بينا في الشكل كب أن ميل الفلك المائل لكل واحد من الكواكب السبعة عن دائرة معدل النهار في كل وقت معلوم يكون معلومًا. فقوس ح س معلومة لأنها مطالع قوس ح جـ في الفلك المستقيم في الوقت المعلوم. وقوس س جـ معلومة لأنها فضل ميلها. وقوس ب ف معلومة لأنها مطالع قوس ب ح المعلومة؛ وقوس ف ح معلومة لأنها فضل ميل قوس ب ح المعلومة. ونجعل نسبة قوس ب ف المعلومة إلى قوس ف ي كنسبة ح س إلى س جـ المعلومة، فتكون قوس ف ي معلومة وتكون نسبة ح ف إلى ف ي معلومة. ونجعل نسبة قوس و ط / إلى قوس ط ب ٣٩٢-و كنسبة ح ف إلى ف ي المعلومة. وقوس ط ب معلومة، فتكون قوس و ط معلومة.

فأقول: إن نسبة قوس و ط المعلومة إلى قوس ف ح المعلومة أعظم من نسبة زمان كـ ق إلى قوس ق ح.

برهان ذلك: أن نسبة زمان ط ب إلى زمان كـ ه أعظم من نسبة قوس ب ح إلى قوس ح ه، كما تبين في الفصل الذي مضى، ونسبة قوس ب ح إلى قوس ح ه أعظم من نسبة قوس ب ف التي هي مطالع قوس ب ح إلى قوس ه ق التي هي مطالع قوس ه ح للذي تبين في الشكل ز. فنسبة قوس ط ب إلى قوس كـ ه أعظم بكثير من ‹نسبة› قوس ب ف إلى قوس ه ق. ونسبة قوس ح س إلى قوس س جـ أعظم من نسبة قوس ه ق إلى قوس ق ح كما تبين في الشكل و، لأن دائرة ح س أصغر من دائرة ط ب؛ ودائرة د ز جـ قائمة على دائرة ا ب جـ على زوايا قائمة لأنها تمر بقطبها. ونسبة

19 كـ ق: كـ ف – 26 و: ير.

ح س إلى س جـ هي كنسبة ب ف إلى ف ي، فنسبة ب ف إلى ف ي أعظم من نسبة ه ق إلى ق ح ؛ فنسبة ط ب إلى كـ ه أعظم من نسبة ب ف إلى ه ق. وإذا بدلنا، كانت نسبة ط ب إلى ب ف أعظم من نسبة كـ ه إلى ه ق. ونسبة ب ف إلى ف ي أعظم من نسبة ه ق إلى ق ح، فنسبة ب ط إلى ف ي أعظم بكثير من نسبة كـ ه إلى ق ح. ونسبة و ط إلى ط ب كنسبة ح ف إلى ف ي، فنسبة و ط إلى ف ح كنسبة ب ط إلى ف ي. ونسبة ب ط إلى ف ي أعظم من نسبة كـ ه إلى ق ح، فنسبة و ط إلى ف ح أعظم من نسبة كـ ه إلى ق ح ؛ ونسبة كـ ه إلى ق ح أعظم من نسبة كـ ق إلى ق ح، فنسبة و ط إلى ف ح أعظم بكثير من نسبة كـ ق إلى ق ح. ونسبة و ط إلى ف ح هي نسبة معلومة، لأن كل واحدة من قوسي و ط ف ح معلومة.

وكذلك يتبين في كل زمان محصل يقع بين نقطتي ح ب أن النسبة المعلومة تبينت أعظم من نسبة ذلك الزمان المحصل إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب.

فإذا كان الكوكب متحركًا على القوس من فلكه المائل التي من النهاية الشمالية إلى نقطة التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار، فإنه يتبين بالبرهان الذي بيناه في الوضع الأول أنه قد يوجد له نسبة معلومة تكون أعظم من نسبة كل زمان محصل يقع له بين طرفي زمان حركته إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركته. وإذا كانت حركته من نقطة التقاطع إلى ناحية النهاية الجنوبية ولم ينته إلى نفس النهاية الجنوبية، فإنه يتبين بالبرهان الذي بيناه في الوضع الثاني أنه قد يوجد له نسبة معلومة تكون أعظم من نسبة كل زمان محصل يقع له فيما بين طرفي زمان حركته إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركته.

فيكون هذا المعنى لازمًا للكوكب في حركته من <النهاية> الشمالية إلى النهاية الجنوبية ما لم ينته إلى النهاية الجنوبية.

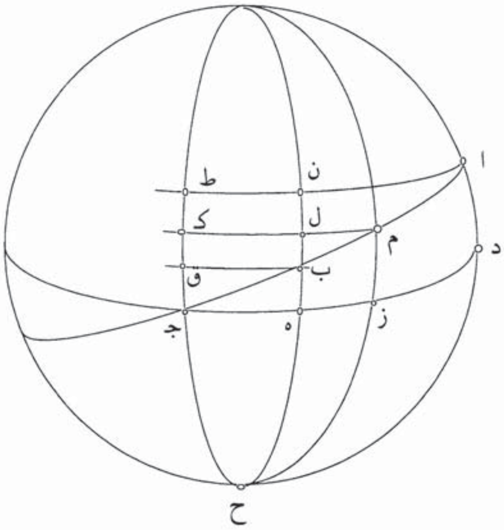
ويلزم هذا المعنى بعينه إذا كانت حركة الكوكب في فلكه المائل من النهاية الجنوبية إلى النهاية الشمالية ولم ينته إلى نفس النهاية الشمالية، بل

1 ح س: وح س – 4 ف ي (الثانية): ق ي – 6 و ط: ف ط – 7 كـ ه: كـ و / و ط: ف ط / ف ح: ب ح – 10 قوسي: مكررة – 11 ب: ق.

إلى أن يبقى بينه وبينها مقدار ما، وإن كان في غاية الصغر، إذا كانت حركته في فلكه الخارج المركز من ناحية البعد الأبعد إلى ناحية البعد الأقرب، وكانت حركته زائدة، أعني أنه في هذا النصف أيضًا يكون له في كل جزء / من الزمان الذي يتحرك فيه على هذا النصف من فلكه المائل ٣٩٢-ظ نسبة معلومة أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع له فيما بين طرفي ذلك الجزء من الزمان إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب، لأن البرهان الذي ذكرناه بعينه يلزم في النصف الآخر من الفلك المائل. فيجتمع من ذلك أن هذا المعنى يلزم الكوكب في حركته على فلكه المائل، إذا كانت حركته زائدة ما خلا جزأين يليان النهايتين، وإن كانا في غاية الصغر.

<**كو**> وأيضًا، فليكن الفلك المائل ا ب جـ، ودائرة معدل النهار د ه جـ، وقطب معدل النهار الشمالي نقطة ح. ولتكن نقطة ا النهاية الجنوبية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار، ولتكن نقطة جـ نقطة التقاطع بين الفلك المائل وبين دائرة معدل النهار، ولتكن حركة الكوكب من ناحية البعد الأقرب من الفلك الخارج المركز إلى ناحية البعد الأبعد، ولتكن حركته في فلك تدويره زائدة، أعني أن يكون تعديله الذي يوجبه فلك تدويره زائدًا على موضعه من فلكه المائل. وليتحرك من نقطة ا إلى نقطة ب في زمان معلوم، وليكن زمان ط ا. ولتكن قوس ق ب من الدائرة الزمانية، وليقطع في زمان ط ا قوس ا ب من الفلك المائل، وليكن قطعه لقوس م ب التي هي بعض قوس ا ب في زمان كـ م. ونجيز على نقطة ح التي هي قطب دائرة معدل النهار وعلى كل واحدة من نقط ا م ب دائرة عظيمة، ولتكن دوائر ح د ا ح ز م ح ه ب. ولتقطع دائرة ح ه ب قوسي ط ا كـ م على نقطتي ن ل. فتكون قوس ن ب هي ميل حركة الكوكب في الزمان المعلوم الذي تحرك فيه الكوكب من نقطة ا إلى نقطة ب. فتكون قوس ن ب معلومة. وتكون قوس ل ب هي ميل حركة الكوكب في الزمان الذي تحرك فيه من نقطة م إلى نقطة ب. وتكون قوس ل كـ هي الزمان المحصل لحركة الكوكب من نقطة م إلى نقطة ب.

18 ق ب: ط ا.



فأقول: إنه قد توجد نسبة معلومة أعظم من نسبة زمان كـ ل إلى قوس ل ب.

برهان ذلك: أنه قد تبين في الشكل ط أن نسبة القوس من الفلك الخارج المركز، التي تنفصل بين الخطين الخارجين من مركز الفلك المائل إلى نقطتي ب م، إلى القوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل بين الخطين الخارجين من مركز الفلك المائل إلى نقطتي م ا، أعظم من نسبة قوس ب م إلى قوس م ا. فبالعكس تكون نسبة قوس ا م إلى قوس م ب أعظم من نسبة القوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل مع قوس ا م إلى القوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل مع قوس م ب. فإذا أخذ من دائرة ا ب جـ قوسان شبيهتان بالقوسين المنفصلتين مع قوسي ا م م ب، كانت نسبة إحداهما <إلى> الأخرى كنسبة القوسين من الفلك الخارج <المركز> المنفصلتين مع قوسي ا م م ب.

فإن كانت كل واحدة من قوسي ا م م ب زائدة على القوس المنفصلة معها من الفلك الخارج المركز، بقيت نسبة تفاضل / ٣٩٣-و ما بين قوس ا م وبين القوس المنفصلة معها إلى تفاضل ما بين قوس م ب وبين القوس المنفصلة معها أعظم من نسبة القوسين المنفصلتين من الفلك الخارج المركز إحداهما إلى الأخرى.

3 ط: و – 7 ا م: ل م – 8 ا م: ل م – 9-10 قوسان شبيهتان: قوسين شبيهتين – 10 بالقوسين: القوس.

فإذا فصل من تفاضل قوس ا م قوس نسبتها إلى تفاضل قوس م ب كنسبة القوس من الفلك الخارج المركز المنفصلة مع قوس ا م إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب، بقيت من قوس ا م فضلة، وكانت نسبة ما يبقى من قوس ا م، بعد هذه الفضلة، إلى قوس م ب كنسبة القوس من الفلك الخارج المركز المنفصلة مع قوس ا م إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب. والتفاضل بين كل قوس تنفصل من الفلك الخارج <المركز> وبين القوس التي تنفصل معها من الفلك المائل هو التعديل. والتعديل في جميع أفلاك الكواكب السبعة الذي يوجبه الفلك الخارج المركز يكون أبداً أصغر من القوس من الفلك الخارج المركز التي أوجبت ذلك التعديل وأصغر من القوس المعدلة بذلك التعديل. فيكون من أجل ذلك نسبة القوس من الفلك الخارج المركز المنفصلة مع قوس ا م إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب أعظم من نسبة الفضلة التي تبقى من قوس ا م إلى قوس م ب، لأن هذه الفضلة هي أصغر من تعديل قوس ا م. فيلزم من ذلك أن تكون نسبة ضعف القوس من الفلك الخارج المركز، التي تنفصل مع قوس ا م، إلى القوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل مع قوس م ب أعظم من نسبة قوس ا م إلى قوس م ب. وتكون نسبة ضعف القوس التي تنفصل من الفلك الخارج المركز مع قوس ا م مع القوس التي تنفصل مع قوس م ب إلى القوس التي تنفصل مع قوس م ب أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب م، فتكون نسبة ضعف القوس المنفصلة مع قوس ا ب إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب أعظم بكثير من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب م. وقد تبين في الشكل الذي قبل هذا الشكل أن نسبة كل قوس من الفلك الخارج المركز إلى كل قوس من الفلك الخارج المركز كنسبة الزمان الذي يتحرك فيه الكوكب بالحركة الوسطى على إحدى القوسين إلى الزمان الذي يتحرك فيه الكوكب بالحركة الوسطى على القوس الأخرى. فنسبة ضعف زمان ط ا إلى زمان كـ م أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب م.

وإن كانت قوسا ا م م ب ناقصتين عن القوسين المنفصلتين معهما من الفلك الخارج المركز، كانت نسبة نقصان قوس ا م إلى نقصان قوس م ب

6 قوس: قوسين / تنفصل (الأولى): وهذا جائز – 25 المنفصلتين: المنفصلين.

أصغر من نسبة القوس من الفلك الخارج المركز المنفصلة مع قوس ا م إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب، فتكون نسبة نقصان قوس ا م إلى بعض نقصان قوس م ب هي كنسبة قوس ا م إلى قوس م ب، وتكون البقية أصغر من جميع نقصان قوس م ب عن القوس المنفصلة معها من الفلك الخارج المركز. وجميع نقصان م ب أصغر من م ب، فهذه الفضلة أصغر بكثير من بقية قوس م ب. فإذا زيد في القوس المنفصلة مع قوس ا م قوس نسبتها / إلى هذه الفضلة كنسبة قوس ا م إلى قوس م ب، كانت هذه القوس الأخيرة ٣٩٣-ظ أصغر من قوس ا م، فهذه القوس أصغر بكثير من القوس المنفصلة مع قوس ا م من الفلك الخارج المركز. فتكون نسبة ضعف القوس المنفصلة مع ⟨قوس ا م إلى القوس المنفصلة مع⟩ قوس م ب أعظم من نسبة ا م إلى م ب، فتكون نسبة ضعف القوس المنفصلة مع قوس ا ب إلى القوس المنفصلة مع قوس م ب أعظم بكثير من نسبة ا ب إلى م ب، فتكون نسبة ضعف زمان ط ا إلى زمان كـ م أعظم من نسبة ا ب إلى ب م.

فإن كانت فضلة ا م زائدة وفضلة م ب ناقصة – فإن ذلك ربما عرض عند البعد الأوسط –، جعلنا ي م شبيهة بالقوس المنفصلة مع قوس ا م، وجعلنا م ق شبيهة بالقوس المنفصلة مع قوس م ب، وجعلنا نسبة س م إلى م ب كنسبة ي م إلى م ق، فتبقى نسبة ي س إلى ب ق كنسبة ي م إلى م ق. وا ي أصغر من ي م، لأنها تعديل قوس م ي الذي يوجبه الفلك الخارج المركز، فجميع ا م أصغر من ضعف ي م. فنسبة ضعف ي م إلى م ب أعظم من نسبة ا م إلى م ب. وقوس ب ق أصغر من قوس ب م، لأن ب ق هي تعديل قوس م ق. وضعف ي م أعظم من ا م، فنسبة ضعف ي م إلى ب ق أعظم من نسبة ا م إلى م ب. فنسبة أربعة أمثال ي م إلى م ق أعظم من نسبة ا م إلى م ب. وبالتركيب يكون نسبة أربعة أمثال ي م مع م ق إلى م ق أعظم من نسبة ا ب إلى ب م، فنسبة أربعة أمثال ي ق إلى ق م أعظم بكثير من نسبة ا ب إلى ب م. وقوس ي ق شبيهة بالقوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل

6 بقية: قد تقرأ «نسبة» / قوس (الثالثة): قوسا.

مع قوس ا ب، وقوس م ق شبيهة بالقوس التي تنفصل مع قوس م ب. فنسبة أربعة أمثال القوس من الفلك الخارج المركز التي تنفصل مع قوس ا ب إلى القوس التي تنفصل مع قوس م ب أعظم من نسبة ا ب إلى ب م. فنسبة أربعة أمثال زمان ط ا المعلوم إلى زمان كـ م أعظم من نسبة ا ب إلى ب م.

فعلى اختلاف أوضاع التعديل، قد يوجد زمان معلوم نسبته إلى زمان كـ م أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب م. ونسبة قوس ا ب إلى قوس ب م أعظم من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب ل، اللتين هما فضلا الميلين، فنسبة الزمان المعلوم، الذي استقر مقداره، إلى زمان كـ م أعظم بكثير من نسبة قوس ن ب إلى قوس ب ل. وإذا بدلنا، كانت نسبة الزمان المعلوم إلى قوس ن ب المعلومة أعظم من نسبة زمان كـ م إلى قوس ل ب، فنسبة الزمان المعلوم إلى قوس ن ب، التي هي نسبة معلومة، أعظم من نسبة زمان / كـ م ٣٩٤-و إلى قوس ل ب.

فإن كانت دائرة ا ب جـ هي فلك الشمس، فقد تبين ما أردنا، وإن كانت دائرة ا ب جـ هي الفلك المائل للقمر أو لأحد الكواكب الخمسة، فقد تبين ما يلزم منها بحسب التعديل الذي يوجبه الفلك الخارج المركز. وقد بقي التعديل الذي يوجبه فلك التدوير. وقد شرطنا أن يكون التعديل الذي يوجبه فلك التدوير زائداً. وإذا كان تعديلا قوسي ا م م ب زائدين، فإما أن تكون نسبة تعديل قوس ا م إلى تعديل قوس م ب كنسبة القوسين المعدلتين، وإما أن تكون أعظم من نسبة القوسين المعدلتين، وإما أن تكون أصغر من نسبة القوسين المعدلتين.

فإن كانت نسبة تعديل قوس ا م إلى تعديل قوس م ب كنسبة القوسين المعدلتين، فلا تأثير لهذا التعديل في النسبة الأولة التي استقرت للقوسين المعدلتين، فليس يتغير النسبة الأولى التي استقرت بحسب تعديل الفلك الخارج المركز، إذا كانت نسبة التعديلين اللذين أوجبهما فلك التدوير، أحدهما إلى الآخر، كنسبة القوسين المعدلتين.

وإن كانت نسبة تعديل ا م إلى تعديل م ب، اللذين أوجبهما فلك التدوير، أصغر من نسبة القوسين المعدلتين، فإن هذه النسبة تزيد في

10 ل ب: ل م – 11 كـ م: كـ ل – 19 وإما (الأولى): فاما – 26 تعديل (الأولى): التعديل – 27 المعدلتين: المعلومتين / تزيد: زيد.

النسبة الأولى، أعني أنه يكون نسبة الزمان المعلوم إلى زمان كـ م أعظم من نسبة ا ب إلى ب م بكثير. إذ كانت نسبة التعديلين اللذين أوجبهما فلك التدوير أصغر من نسبة القوسين المعدلتين، لأن هذه النسبة تُصيِّر نسبة قوس ا م إلى قوس م ب أصغر من نسبة القوسين المعدلتين.

وإن كانت نسبة تعديل ا م إلى تعديل م ب أعظم من نسبة القوسين المعدلتين، فليكن تعديل قوس ا م قوس ا س وتعديل قوس م ب قوس ب ع، فتكون قوسا س م م ع معدلتين للقوسين من الفلك المائل المعدلتين بتعديل الفلك الخارج المركز، لأن القوسين المعدلتين من الفلك المائل يكون مبدأهما نقطة ا؛ وإنما أخذنا قوسي س م م ع المساويتين لهما، ليكون التعديلان متفرقين وفي جهتين مختلفتين، فيكون الكلام عليهما أبين وأسهل. ولأن قوسي س م م ع مساويتان للقوسين المعدلتين، يكون نسبة الزمان المعلوم الذي استقر مقداره إلى زمان كـ م أعظم من نسبة س ع إلى ع م. وتكون نسبة ا س إلى ع ب أعظم من نسبة س م إلى م ع. ونجعل ا ص مثل ع ب، فتكون قوس ص س معلومة لأنها تعديل جميع قوس س ع المعلومة، فتكون نسبة ص س إلى س ع معلومة. ونجعل نسبة زمان ما إلى الزمان المعلوم، الذي نسبته إلى زمان كـ م أعظم من نسبة س ع إلى ع م، كنسبة ص س إلى س ع المعلومة، فيكون ذلك الزمان معلومًا، وتكون نسبة مجموع الزمانين إلى الزمان الأول كنسبة ص ع إلى ع س. ونسبة الزمان الأول المعلوم إلى زمان كـ م أعظم من نسبة س ع إلى ع م، فتكون نسبة مجموع الزمانين المعلومين إلى زمان كـ م أعظم من نسبة ص ع إلى ع م. ونسبة ص ع إلى ع م أعظم من نسبة ا ع إلى ع م ونسبة ا ع إلى ع م أعظم من نسبة ا ب إلى ب م، فتكون نسبة الزمان المعلوم المركب من الزمانين المعلومين إلى زمان كـ م أعظم من نسبة ا ب إلى ب م بكثير. ونسبة ا ب إلى ب م أعظم من نسبة ن ب إلى ب ل. فنسبة الزمان المعلوم المركب من الزمانين ‹المعلومين› إلى زمان كـ م أعظم بكثير من نسبة ن ب إلى ب ل. وإذا بدلنا، كانت نسبة الزمان المعلوم المركب إلى قوس ن ب أعظم من نسبة زمان / كـ م إلى قوس ل ب، فنسبة الزمان المعلوم المركب إلى قوس ن ب أعظم بكثير من نسبة زمان كـ ل إلى قوس ل ب. ٣٩٤-ظ

2 إذ: اذا – 3 المعدلتين: المعلومتين – 7 معدلتين: معلومتين – 10 متفرقين: مفرقتين – 13 ع ب (الأولى): ع ف – 19 ع م: ح م.

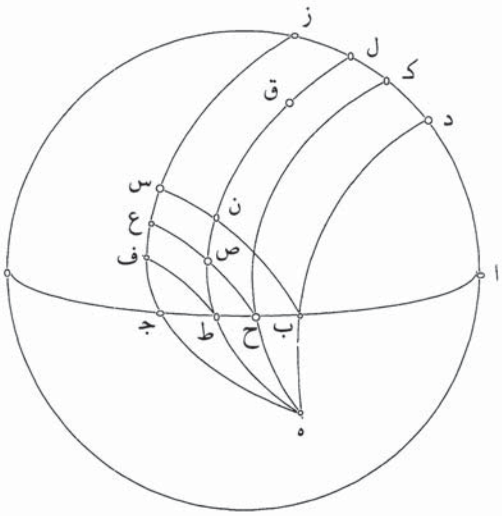
وكذلك يتبين في كل زمان محصل يكون للكوكب فيما بين نقطتي ‹آ ب الذي ميله› ن ب أن نسبة الزمان المعلوم الذي استقر مقداره أخيراً إلى قوس ن ب أعظم من نسبة ذلك الزمان المحصل إلى القوس التي تخصّ ذلك الزمان المحصل من قوس ن ب.

‹**كز**› وأيضًا، فليكن الفلك المائل ا ب جـ، ودائرة معدل النهار ا د ز، وليكن قطب دائرة معدل النهار الشمالي نقطة ه، ولتكن ‹آ› نقطة التقاطع بين الفلك المائل ودائرة معدل النهار، وليكن نقطة جـ النهاية الشمالية للفلك المائل بالقياس إلى دائرة معدل النهار. ولتكن حركة الكوكب في الفلك المائل من نقطة آ إلى نقطة جـ، ولتكن حركته في الفلك الخارج المركز من ناحية البعد الأقرب إلى ناحية البعد الأبعد، ولتكن حركته في فلك التدوير زائدة، وليتحرك من نقطة ب إلى نقطة ط في زمان معلوم، وليكن زمان س ب؛ وليقطع قوس ب ط في زمان س ب، وليقطع قوس ح ط التي هي بعض قوس ب ط في زمان ح ع. ولتكن قوسا س ب ع ح من الدوائر الزمانية الموازية لمعدل النهار. ونجيز على نقطة ه وعلى كل واحدة من نقط ب ح ط جـ دائرة عظيمة، ولتكن دوائر ه ب د ه ح كـ ه ط ل ه جـ ز. ولتقطع دائرة ه ط ل قوسي ب س ح ع على نقطتي ن ص. فتكون قوس ن ط هي ميل حركة الكوكب في الزمان المعلوم الذي تحرك فيه الكوكب من نقطة ب إلى نقطة ط، فتكون قوس ن ط معلومة. وتكون قوس ص ط هي ميل حركة الكوكب في الزمان الذي تحرك فيه من نقطة ح إلى نقطة ط، وتكون قوس ع ص هي الزمان المحصل لحركة الكوكب من نقطة ح إلى نقطة ط.

فأقول: إنه قد يوجد نسبة معلومة أعظم من نسبة زمان ع ص إلى قوس ص ط.

برهان ذلك: أنه يتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أنه قد يوجد زمان معلوم نسبته إلى زمان ع ح أعظم من نسبة قوس ب ط إلى قوس ط ح. وقوس ب ن هي مطالع قوس ب ط في الفلك المستقيم وقوس ح ص

14 ه: ح – 21 ع ص: ح ص.



هي مطالع قوس ح ط في الفلك المستقيم. فتكون نسبة قوس ب ط إلى قوس ط ح أعظم من نسبة قوس ب ن إلى قوس ح ص، كما تبين في الشكل ز. ونجيز على نقطة ط قوسًا من الدائرة الزمانية، فلتكن قوس ط ف، فتكون قوس ط ف معلومة وقوس ف جـ معلومة لأن قوس ط جـ معلومة وقوس ط ف هي مطالع قوس ط جـ المعلومة. وقوس ف جـ هي ميل قوس ط جـ، فتكون نسبة قوس ط ف إلى قوس ف جـ معلومة؛ ونسبة قوس ط ف إلى قوس ف جـ أعظم من نسبة قوس ح ص إلى قوس ص ط، كما تبين في الشكل يد. ونجعل نسبة قوس ب ن المعلومة إلى قوس ن ق كنسبة ط ف إلى ف جـ المعلومة، فتكون قوس ن ق معلومة، وتكون نسبة ب ن إلى ن ق أعظم من نسبة ح ص إلى ص ط. ونجعل نسبة زمان ما إلى الزمان المعلوم – الذي تبين مقداره في الشكل الذي قبل هذا الشكل <و>الذي نسبته إلى زمان ع ح أعظم من نسبة ب ط إلى ط ح – كنسبة قوس ط ن المعلومة إلى قوس ن ق المعلومة، فيكون ذلك الزمان معلومًا. فلأن نسبة الزمان الأول المعلوم – الذي تبين مقداره في الشكل الذي قبل هذا الشكل – إلى زمان ع ح أعظم من نسبة ب ط إلى ط ح، ونسبةَ / ب ط <إلى ط ح> أعظم من ٣٩٥-و

4 ط جـ: ط ح.

نسبة ب ن إلى ح ص، يكون نسبة الزمان الأول المعلوم إلى ع ح أعظم بكثير من نسبة ب ن إلى ح ص. وإذا بدلنا، يكون نسبة الزمان الأول المعلوم إلى قوس ب ن أعظم من نسبة زمان ع ح إلى قوس ح ص. ونسبة قوس ب ن إلى قوس ن ق أعظم من نسبة قوس ح ص إلى قوس ص ط، فنسبة الزمان الأول المعلوم إلى قوس ن ق أعظم من نسبة زمان ع ح إلى قوس ص ط. ونسبة الزمان الثاني المعلوم إلى الزمان الأول المعلوم كنسبة قوس ط ن إلى قوس ن ق. وإذا بدلنا، كانت نسبة الزمان الثاني المعلوم إلى قوس ن ط كنسبة الزمان الأول المعلوم إلى قوس ن ق، ونسبة الزمان الأول المعلوم إلى قوس ن ق أعظم من نسبة زمان ع ح إلى قوس ص ط، فنسبة الزمان الثاني المعلوم إلى قوس ن ط أعظم من نسبة زمان ع ح إلى قوس ص ط. والزمان الثاني معلوم وقوس ن ط معلومة، فنسبة أحدهما إلى الآخر معلومة؛ ونسبة ع ح إلى ص ط أعظم من نسبة ع ص إلى ص ط، فنسبة الزمان الثاني المعلوم إلى قوس ن ط، التي هي نسبة معلومة، أعظم من نسبة ع ص، الذي هو الزمان المحصل، إلى قوس ص ط التي هي الميل الذي يخص زمان ع ص.

وكذلك يتبين أن نسبة الزمان المعلوم، إلى قوس ن ط، المعلومة أعظم من نسبة كل زمان محصل يقع فيما بين نقطتي ب ط إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من قوس ن ط.

فقد تبين من هذا الشكل ومن الشكل الذي قبله أن الكوكب إذا كان متحركًا في فلكه المائل من النهاية الجنوبية إلى النهاية الشمالية، ولم ينته إلى نفس النهاية الشمالية، وكان حركته في فلكه الخارج المركز من ناحية البعد الأقرب إلى ناحية البعد الأبعد، وكانت حركته في فلك تدويره زائدة، فإن له في كل جزء من الزمان الذي يتحرك فيه الكوكب على هذا النصف من فلكه المائل نسبة معلومة هي أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع له فيما بين طرفي ذلك الجزء من الزمان إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب. ويلزم هذا المعنى بعينه إذا كانت حركة الكوكب في فلكه المائل من النهاية الشمالية إلى النهاية الجنوبية، إذا كانت حركته في فلكه الخارج المركز من البعد الأقرب إلى البعد الأبعد، وكانت حركته في

1 إلى (الثانية): ممحوة / أعظم: ممحوة.

فلك تدويره زائدة. فيصير هذا المعنى لازمًا للكوكب في حركته على جميع فلكه المائل فاصلاً جزأين يليان النهايتين وإن كانا في غاية الصغر.

فقد تبين من الأشكال الأربعة التي بيناها أن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا تحرك زمانًا معلومًا في أي موضع كانت حركته من فلكه المائل ما خلا جزءاً يلي النهاية الجنوبية وجزءاً يلي النهاية الشمالية، وإن كانت في غاية الصغر، وفي أي موضع كانت حركته في فلكه الخارج المركز – أما الشمس فمن غير شرط زائد، وأما القمر والكواكب الخمسة، فإذا كان تعديله الذي يوجبه فلك تدويره زائداً في حركته –، فإن له نسبة معلومة هي أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون له فيما بين طرفي ذلك الزمان المعلوم الذي تحرك فيه، إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل، كانت حركة الكوكب في فلكه الخارج المركز من ناحية البعد الأبعد إلى ناحية البعد الأقرب أو كانت حركته من ناحية البعد الأقرب إلى ناحية البعد الأبعد. وهذه النسبة هي نسبة مقدار أعظم إلى مقدار أصغر. ويلزم هذا المعنى أيضًا في القمر والكواكب، وإن كان تعديله الذي يوجبه فلك تدويره ناقصًا من حركته في أي موضع كانت حركته من فلكه المائل – إذا كان تعديله الذي يوجبه الفلك الخارج المركز زائداً وكان ما يحصل له من الزيادة <هي> التي يوجبها الفلك الخارج المركز،/ <...> ويلزم ذلك أيضًا إن كانت ٣٩٥-ظ
تعديلات كثيرة مرة زائدة ومرة ناقصة، إذا كان الناقص أقل من الزيادة التي يوجبها الفلك الخارج المركز.

وأيضًا، فإنا إذا سلكنا في كل ربع من أرباع الفلك المائل الطريق الذي سلكناه في الربع المتصل به، أعني إذا سلكنا في الربع الأول الذي هو من النهاية الشمالية إلى نقطة التقاطع طريق البرهان الذي سلكناه في الربع الأخير الذي هو من نقطة التقاطع إلى النهاية الشمالية، وسلكنا في الربع الأخير الطريق الذي سلكناه في الربع الأول، وسلكنا في الربع الثاني الذي من نقطة التقاطع إلى النهاية الجنوبية الطريق الذي سلكناه في الربع الثالث الذي هو من النهاية الجنوبية إلى نقطة التقاطع، وسلكنا في الربع الثالث الطريق الذي سلكناه في الربع الثاني، حصلت لنا في كل واحد من الأرباع

5 جزءاً (الأولى والثانية): جزء – 17 <...>: ربما كانت هناك أربع كلمات ممحوة في أول سطر صفحة ٣٩٥-ظ – 18 زائدة: زائد / ناقصة: ناقص – 23 سلكنا: سلكناه.

نسبة معلومة أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين طرفي الزمان الذي تحرك فيه إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب. وتكون الميول التي تخص هذه الأزمنة المحصلة هي مما يلي مبدأ الحركة والميول التي تخص الأزمنة المحصلة التي تقدمت هي مما يلي أجزاء الحركة.

وإذا كان جميع ذلك قد تبين، فإنه يلزم أن يكون كل واحد من الكواكب السبعة إذا تحرك على الصفة التي حددناها زمانًا ما، أي زمان كان، معلومًا كان ذلك الزمان ⟨معلومًا⟩ لنا أو لم يكن معلومًا لنا، فإن له نسبة هي أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب فيما بين طرفي ذلك الزمان الذي ⟨تحرك⟩ فيه إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل، كانت تلك النسبة معلومة لنا أو لم تكن معلومة لنا، استخرجنا تلك النسبة أو لم نستخرجها. وكل نسبة استخرجناها وبينا أنها أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل، قد توجد نسب بكثرة أعظم منها، لأن كل نسبة فقد يوجد نسب كثيرة كل واحدة منها أعظم من تلك النسبة.

وإذا كان ذلك كذلك، فإن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا تحرك على الصفة التي حددناها زمانًا ما، أي زمان كان، فإن له نسبًا كثيرة لا نهاية لعدتها، كل واحدة منها أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع لذلك الكوكب فيما بين طرفي ذلك الزمان الذي تحرك فيه، إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل.

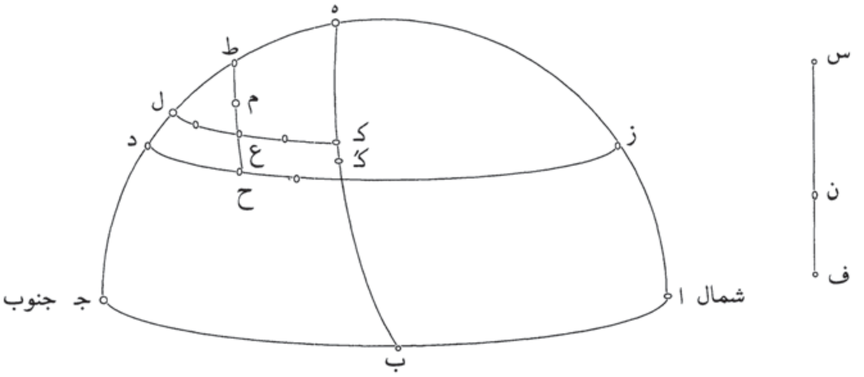
وهذا المعنى هو الذي قصدنا لتبيينه في الأشكال الأربعة التي بيناها.

⟨كح⟩ وإذ قد تبين هذا المعنى، فإنا نقول: إن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا تحرك من أفق المشرق إلى دائرة نصف النهار في كل أفق من الآفاق التي تكون الكرة فيه مائلة إلى الجنوب أو منتصبة، وكان موضعه من دائرة نصف النهار مائلاً إلى الجنوب عن قطب الأفق، وكانت حركته في فلكه المائل من ناحية النهاية الشمالية إلى ناحية النهاية الجنوبية بالقياس إلى دائرة معدل النهار، ولم ينته إلى نفس النهاية الجنوبية – أما الشمس فمن غير شرط زائد، وأما القمر فإذا كانت حركته المقومة زائدة، أعني أن تكون

17 نسبًا: نسب.

حركته في الأزمنة المتساوية مختلفة المقدار يكون مقدارها في الزمان الثاني أعظم منه في الزمان الأول أو كانت حركة فلك تدويره فقط زائدة، أعني أن يكون تعديله الذي يوجبه فلك التدوير زائداً في حركته؛ وأما في الكواكب الخمسة، فإذا كانت حركة الكوكب منها المقومة زائدة أو حركة فلك تدويره فقط زائدة وكانت مع ذلك حركة ميل فلك تدويره أو انحراف فلك تدويره التي توجب الزيادة في العرض مائلة إلى جهة الجنوب – فإن له ارتفاعات شرقية متساوية، كل اثنين منها متساويان، وله ارتفاعات شرقية مختلفة يكون الثاني منها أقل من الأول، ⟨و⟩له ارتفاع قبل انتصاف نهاره مساوٍ لارتفاع نصف نهاره، وإن ارتفاعاته المتساوية أعظم من ارتفاع نصف نهاره.

فلتكن دائرة ا ب جـ أفقًا من الآفاق المقدم ذكرها ./



⟨...⟩ وليكن قوس ا ب جـ النصف ⟨الغربي من الأفق⟩، وليشرق مركز ٣٩٦-و
الشمس أو مركز كوكب من الكواكب السبعة من نقطة ب ولينته إلى دائرة ا جـ د نصف النهار، وليصير مركزه على نقطة د من دائرة نصف النهار. ولتكن نقطة د مائلة إلى الجنوب عن قطب الأفق. ونجيز على نقطة ب قوسًا من الدائرة الزمانية التي تمر بنقطة ه، ولتكن قوس ب ه. وندير على نقطة د دائرة موازية للأفق، ولتكن دائرة د ح ز. فتكون دائرة د ح ز مقنطرة من مقنطرات الارتفاع، وتكون قوس ب ه هي الزمان المحصل للكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة د وتكون قوس ه د هي ميل حركة الكوكب. وقد تبين أن الكوكب إذا تحرك زمانًا ما، أي زمان كان، ⟨فإن⟩ له نسبًا هي

11 ⟨...⟩: متآكلة – 15 ة: ب – 19 نسبًا: نسب.

أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع له فيما بين طرفي ذلك الزمان الذي تحرك فيه، إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب. فليكن إحدى النسب التي هي أعظم من كل نسبة، لكل زمان محصل إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل؛ نسبة س ن إلى ن ف. فلأن دائرة ا د جـ تمرّ بقطب دائرة د ح ز، فهي تقطعها بنصفين وعلى زوايا قائمة، فقوس ه د قائمة على قطر دائرة د ح ز. فلنخرج قوس ح ط موازية لقوس ب ه حتى تكون نسبة وتر قوس ح ط إلى وتر قوس ط د أعظم من نسبة س ن إلى ن ف، كما بينا ذلك في الشكل ي. فإن كانت نقطة ط فيما بين نقطتي ه د – وإلا أخرجنا فيما بين نقطتي ه د قوسًا موازية لقوس ح ط كيفما اتفقت، فتكون نسبة وتر هذه القوس الثانية إلى وتر ما يفصله من قوس ه د أعظم من نسبة وتر القوس الأولى إلى وتر ما يفصله من قوس ه د، كما تبين في الشكل يا ويب – فتكون نسبة هذين الوترين، أحدهما إلى الآخر، أعظم من نسبة س ن إلى ن ف، وتكون نسبة القوسين اللتين على الوترين أعظم من نسبة الوترين. وتكون نسبة القوسين، إحداهما إلى الأخرى، أعظم من نسبة س ن إلى ن ف. فلتكن نسبة ح ط إلى ط د أعظم من نسبة س ن إلى ن ف التي هي أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع فيما بين نقطتي ه د إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من قوس ه د. فنسبة ح ط إلى ط د أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين نقطتي ب د إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من قوس ه د. فالزمان المحصل الذي ميله قوس ط د هو أصغر من قوس ح ط، والزمان المحصل يكون أبداً شرقيًا عن ميل حركة الكوكب. فليكن ذلك الزمان المحصل قوس م ط. فلأن الكوكب تحرك من نقطة ب إلى نقطة د، يكون قد قطع كل دائرة زمانية تقع فيما بين نقطتي ه د؛ فالكوكب إذن قد قطع دائرة ح ط. والكوكب إذا صار على دائرة ح ط، صارت القوس من دائرة ح ط التي بين موضع الكوكب وبين قوس ه د هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ط د، كما أن قوس ب ه هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ه د. والزمان المحصل الذي

1 لكل: فكل – 6 ه د: ز ه د – 10 اتفقت: اتفق – 12 ه د: ا ه د – 19 ب: ه – 24 ح ط (الأولى): ح ط جـ.

ميله قوس ط د هو قوس م ط، فالكوكب إذن إذا صار على دائرة ح ط، فهو يصير على نقطة م. فالكوكب كان على نقطة ب، ثم صار على نقطة م؛ ونقطة ب هي تحت مقنطرة د ح ز ونقطة م فوق مقنطرة د ح ز. فالكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة م قد قطع مقنطرة د ح ز على نقطة فيما بين دائرتي ب ه ح ط لأن حركة الكوكب هي من جهة الشمال إلى جهة الجنوب. ثم إن هذا الكوكب قد صار على نقطة د من دائرة نصف النهار؛ ونقطة د هي على مقنطرة د ح ز، فالكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة د قد صار على مقنطرة د ح ز مرتين؛ فارتفاعاه في هذين الوقتين متساويان، وهذان الارتفاعان مساويان / ‹لقوس جـ د› من دائرة نصف النهار، إلا أنه لقيها ٣٩٦-ظ في حركته من أفق المشرق جنوبي الفلك ‹المائل من الناحية الشمالية إلى الناحية الجنوبية، و›ارتفاعه في هذه الحال يكون شرقيًا. فالكوكب إذا تحرك من أفق المشرق إلى دائرة نصف النهار، فيكون له ارتفاع شرقي مساوٍ لارتفاع نصف نهاره. وأيضًا، فإنا نتعلم على قوس م ح نقطة كيفما اتفقت، ولتكن نقطة ع. ونذير على نقطة ع مقنطرة موازية لمقنطرة د ح ز، ولتكن مقنطرة ل ع كـ. فلأن نقطة م أرفع من مقنطرة ل ع كـ ونقطة ب أخفض من مقنطرة ل ع كـ والكوكب قد تحرك من نقطة ب إلى نقطة م، يكون الكوكب قد قطع مقنطرة ل ع كـ قبل أن يصل إلى نقطة م، ويكون قطعه لها فيما بين قوسي ب ه ح ط. ولأن نقطة م أرفع من مقنطرة ل ع كـ، ونقطة د أخفض من مقنطرة ل ع كـ والكوكب قد تحرك من نقطة م إلى نقطة د، فالكوكب قد قطع مقنطرة ل ع كـ قبل أن يصل إلى نقطة د. وليس يقطع مقنطرة ل ع كـ في حركته من نقطة م إلى نقطة د على النقطة التي قطعها عليها في حركته من نقطة ب إلى نقطة م، لأن الدائرة الزمانية التي يصير عليها الوقت الثاني تكون أقرب إلى نقطة د من دائرة ح ط، لأن الكوكب متحرك من الشمال إلى الجنوب والدوائر الزمانية متوازية. فالنقطة من دائرة ل ع كـ التي صار عليها الكوكب في حركته من نقطة م إلى نقطة د هي غير النقطة من دائرة ل ع كـ التي صار عليها في حركته من نقطة ب إلى نقطة م، وليس يصح أن

9 ‹لقوس جـ د›: متآكلة – 10 الفلك: يعقبها مكان لكلمتين متآكلتين – 13 اتفقت: اتفق – 24 ل ع كـ: ل ع ط.

تكون النقطة من دائرة ل ع ك التي صار عليها الكوكب في حركته من نقطة م إلى نقطة د غربية عن دائرة نصف النهار، لأنها لو كانت غربية عن دائرة نصف النهار، كان الكوكب قد قطع دائرة نصف النهار قبل أن يصير إلى تلك النقطة ثم يصير إلى دائرة نصف النهار عند حصوله على نقطة د، فيكون قد قطع دائرة نصف النهار فوق الأرض مرتين في أقل من زمان نهاره؛ وهذا محال، لأن كل قوس يقطعها كل واحد من الكواكب السبعة من فلكه المائل في زمان ما، فإن مطالعها في الفلك المستقيم أصغر بكثير من ذلك الزمان الذي قطع فيه الكوكب تلك القوس من فلكه. فإذا مرّ الكوكب بدائرة نصف النهار من فوق الأرض، فليس يعود إليها من فوق الأرض إلا في الدورة الثانية. فالنقطتان من دائرة ل ع ك التي صار عليها الكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة د شرقيتان عن دائرة نصف النهار. فقد صار للكوكب إذن ارتفاعان متساويان ومساويان لارتفاع مقنطرة ل ع ك الذي هو قوس ل جـ، وهذان الارتفاعان أعظم من ارتفاع نصف نهاره الذي هو قوس د جـ.

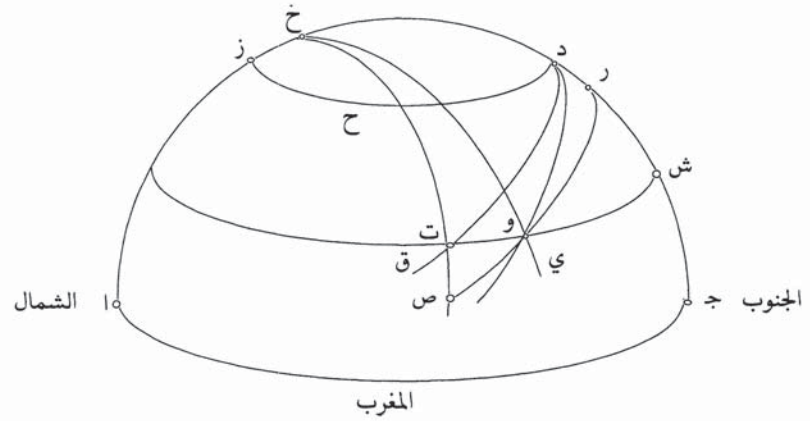
وكذلك كل مقنطرة تقطع قوس م ح، فيما بين نقطتي م ح قد صار عليها الكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة د دفعتين، فقد صار له ارتفاعان متساويان ومساويان لارتفاع تلك المقنطرة. وإذا صار الكوكب على مقنطرة فيما بين نقطتي م ع، فارتفاعه يكون أعظم من ارتفاعه إذا كان على مقنطرة ل ع ك؛ وإذا صار الكوكب على مقنطرة فيما بين نقطتي م ع، فهو يصير عليها قبل حصوله الثاني على مقنطرة ل ع ك. فالكوكب إذا كان على مقنطرة فيما <بين> نقطتي م ع ثم صار على مقنطرة ع ل ك، يكون ارتفاعه الثاني أقلّ من ارتفاعه الأول والارتفاعان جميعاً / ٤٠٩-و شرقيان وجميع ارتفاعاته التي تكون فوق مقنطرة نصف نهاره هي أعظم من ارتفاع نصف نهاره.

فقد تبين مما بيناه أن كل واحد من الكواكب السبعة إذا تحرك من أفق المشرق إلى دائرة نصف النهار وكانت حركته في فلكه المائل من ناحية النهاية الشمالية إلى ناحية النهاية الجنوبية، وكانت حركته على الصفة التي حددناها، فإن له ارتفاعات شرقية متساويات، كل اثنين منها متساويان، وله ارتفاع شرقي مساوٍ لارتفاع نصف نهاره، وله ارتفاعات شرقية مختلفة

10 ل ع ك: ل ع ط – 20 ع ل ك: ع ل – 21 الثاني: الباقي.

يكون الثاني منها أقل من الأول وجميع ارتفاعاته الشرقية المتساوية أعظم من ارتفاع نصف نهاره؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ونقول: إن الكوكب إذا كانت حركته على الصفة التي ذكرناها، وكانت ارتفاعاته الشرقية على الصفة التي بيناها، فإنه إذا تحرك من دائرة نصف النهار إلى أفق المغرب، فإنه لا يعرض له شيء مما ذكرناه، بل يكون ارتفاعاته مختلفة، الثاني منها أبداً أقلّ من الأول.



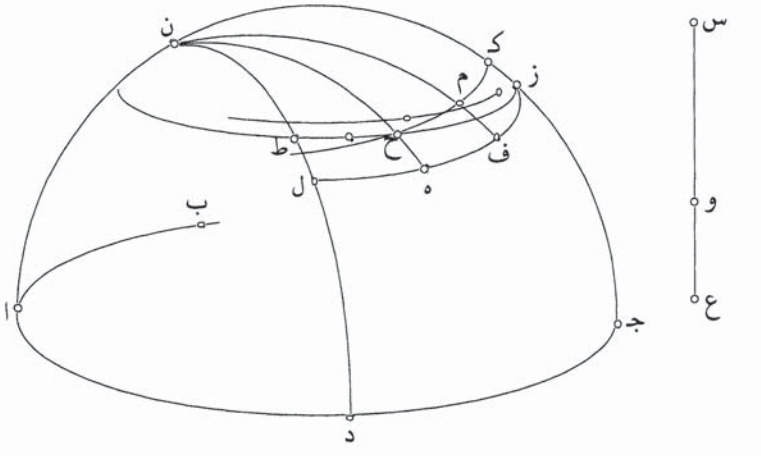
برهان ذلك: أنا نجيز على نقطة د قوسًا من الدائرة الزمانية التي تمر بنقطة ق، ولتكن قوس د ق. فتكون دائرة د ق مماسة لدائرة د ح ز، لأن قطبيهما على دائرة نصف النهار التي هي دائرة ا د ج. فإذا تحركت الكرة بالحركة السريعة الزمانية، فإن نقطة د التي هي موضع الكوكب من الفلك الأعلى تتحرك على دائرة د ق. وإذا تحركت نقطة د على دائرة د ق، فإن الكوكب يتحرك بالحركة التي تخصه، فيفارق نقطة د مائلاً بحركته إلى جهة الجنوب. وإذا تحرك الكوكب بحركته مائلاً إلى جهة الجنوب، فإنه يفارق دائرة د ق ويصير على دائرة أميل إلى الجنوب من دائرة د ق. وكل دائرة زمانية أميل إلى الجنوب من دائرة د ق من الدوائر التي بين نقطة د وبين أفق المغرب، فهي تقطع قوس د ج على نقطة فيما بين نقطتي د ج. فيكون أعظم ارتفاعات النقط التي على تلك الدائرة الزمانية هو القوس التي تفصلها هذه

8 ق: د – 10 بالحركة: الحركة.

الدائرة من قوس د جـ، وكل نقطة منها سوى النقطة التي على قوس د جـ يكون ارتفاعها أقل من ارتفاع النقطة التي على قوس د جـ ليصير الكوكب من بَعد مفارقته لنقطة د على نقطة و. ونجيز على نقطة و دائرة زمانية، ولتكن ر و ص، فيكون أعظم ارتفاعات النقط التي على قوس ر ص هو قوس ر جـ، فقوس ر جـ أصغر من قوس د جـ، وارتفاع نقطة ر أقل من ارتفاع نقطة د، فارتفاع نقطة و أقل بكثير من ارتفاع نقطة د. ولأن الكوكب يميل أبداً إلى جهة الجنوب عن دائرة د ق، ودائرة د ق مماسة لدائرة د ح ز، فليس يرجع الكوكب إلى دائرة د ح ز. ونجيز على نقطة و مقنطرة <موازية لسطح> د ح ز، ولتكن مقنطرة ت و ش، ولتقطع هذه المقنطرة قوس د ق على نقطة ت. وليكن قطب معدل النهار نقطة خ. ونجيز على نقطتي خ و دائرة عظيمة، ولتكن دائرة خ و ي، <وعلى نقطتي خ ت دائرة عظيمة ولتكن دائرة خ ت>. فلأن قوسي ت د و ر جنوبيتان عن قطب الأفق، تكون قوس ت د أعظم من الشبيهة بقوس و ر كما تبين في الشكل يجـ. فدائرة خ و ي تقطع قوس ت د؛ وإذا كانت تقطع قوس ت د، فهي تقطع مقنطرة ت و ش / على نقطة <و ودائرة خ ت العظيمة تقطع مقنطرة ت و ش على نقطة> ٤٠٩-ظ شمالية عن نقطة و. وإذا كان ذلك كذلك، فإن قوس و ر شرقية عن دائرة خ و ي. ولأن الكوكب على نقطة و وهو يتحرك بالحركة الزمانية إلى أفق المغرب، فليس يعود بحركته التي تخصه إلى دائرة خ و ي، لأن دائرة خ و ي هي إحدى دوائر أنصاف النهار. وقد تبين من قبل أن الكوكب إذا فارق دائرة نصف النهار، فليس يعود إلى ذلك النصف منها إلا في الدورة الثانية. وإذا لم يعد الكوكب إلى دائرة خ و ي، فليس يلقى قوس و ت من المقنطرة. ولأن الكوكب مائل بحركته إلى الجنوب، فليس يعود إلى دائرة و ص؛ وإذا لم يعد إلى دائرة و ص، فليس يلقى قوس و ش من المقنطرة، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ت و ش إلا على نقطة و. وكذلك كل مقنطرة يمرّ بها تكون أخفض من مقنطرة د ح ز، فليس يمرّ بها إلا دفعة واحدة. فليس يكون للكوكب في الجهة الغربية ارتفاعان متساويان إذا كان متحركًا على الصفة التي قدمنا تحديدها، بل يكون ارتفاعاته الغربية جميعها مختلفة ويكون الثاني منها أقل من الأول؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

5 رَ: دَ – 6 دَ (الأولى): رَ – 12 جنوبيتان: جنوبيتين – 19 إحدى: احد.

<**كط**> وأيضاً، فإنا نقول: إن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا تحرك من دائرة نصف النهار إلى أفق المغرب في كل أفق من الآفاق التي تكون الكرة فيها مائلة إلى الجنوب أو منتصبة، وكان موضعه من دائرة نصف النهار مائلاً إلى الجنوب عن قطب الأفق، وكانت حركته في فلكه المائل من ناحية النهاية الجنوبية إلى ناحية النهاية الشمالية بالقياس إلى دائرة معدل النهار ولم ينته إلى نفس النهاية الشمالية – أما الشمس فمن غير زيادة شرط، وأما القمر فإذا كانت حركته المقومة زائدة أو كانت حركة فلك تدويره زائدة، وأما في الكواكب الخمسة، فعلى مثل صفات حركة القمر، ومع ذلك إذا كانت حركة ميل فلك تدويره أو انحراف فلك تدويره التي توجب الزيادة في العرض مائلة إلى جهة الشمال – فإن له ارتفاعات غربية متساوية، كل اثنين منها متساويان، وله ارتفاعات غربية مختلفة، يكون الثاني منها أعظم من الأول وله ارتفاع بعد نصف نهاره مساوٍ لارتفاع نصف نهاره وارتفاعاته الغربية المتساوية أعظم من ارتفاع نصف نهاره.



فليكن دائرة ا ب جـ د أفقًا من الآفاق، ولتكن دائرة ا ز جـ دائرة نصف النهار، ولتكن قوس ا ب جـ النصف الشرقي من الأفق وقوس ا د جـ النصف الغربي من الأفق. وليشرق مركز الشمس أو مركز كوكب من الكواكب السبعة من نقطة بَ ولينته إلى دائرة نصف النهار، وليُصيّر مركز هَ على نقطة زَ من دائرة نصف النهار، ولتكن نقطة زَ مائلة إلى الجنوب عن قطب الأفق.

وليغرب مركز هذا الكوكب من نقطة د، وليكن قطب معدل النهار نقطة ن. ونجيز على نقطتي ن د دائرة عظيمة ولتكن ن د. ونجيز على نقطة ز دائرة زمانية، ولتكن دائرة ز ل، ولتقطع هذه الدائرة دائرة ن د على نقطة ل، فتكون قوس ز ل هي الزمان المحصل لحركة الكوكب وتكون قوس د ل هي ميل حركة الكوكب. فتكون للكوكب نسب كثيرة كل واحدة منها هي أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين طرفي حركته من نقطة ز إلى نقطة د إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب، الذي هو ل د، مما يلي مبدأ الحركة. ولتكن إحدى تلك النسب نسبة س و إلى و ع. ونخرج قوس ح ك موازية لقوس ز ل حتى يكون نسبة ح ك إلى ك ز أعظم من نسبة س و إلى و ع. ونجيز على نقطتي ن ح دائرة عظيمة، ولتكن ن ح ه؛ ولتقطع هذه الدائرة قوس ز ل على نقطة ه، فتكون قوس ه ز شبيهة بقوس ح ك وتكون قوس ه ح مساوية لقوس ك ز. فتكون نسبة ز ه إلى ه ح أعظم من نسبة س و إلى و ع، فنسبة ز ه إلى ه ح أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب فيما بين طرفي حركته من نقطة ز إلى نقطة د إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب مما يلي مبدأ الحركة، فإذا تحرك الكوكب <في> زمان ز ه، كان ميل حركته / أعظم من قوس ه ح، فالزمان الذي يتحرك فيه الكوكب ويكون ٤١٠-و
ميل حركته فيه قوسًا مساوية لقوس ه ح هو أقل من زمان ز ه. وليكن الزمان الذي يميل فيه الكوكب قوسًا مساوية لقوس ه ح هو زمان ز ف. ونجيز على نقطتي ن ف دائرة عظيمة، ولتكن ن م ف؛ ولتقطع هذه الدائرة قوس ح ك على نقطة م. فيكون الكوكب إذا تحرك زمان ز ف، كان ميل حركته قوس ف م، ففي زمان ز ف يصير الكوكب على نقطة م، فالكوكب يصير من نقطة ز إلى نقطة م؛ ونقطة م أرفع من مقنطرة ز ح ط؛ وهذا الكوكب يغرب على نقطة د، فهذا الكوكب يصير من نقطة م إلى نقطة د، فهو يقطع مقنطرة ز ح ط، وهو يقطعها على نقطة فيما بين نقطتي ح ط لأن هذا الكوكب يميل بحركته إلى الشمال، فليس يعود إلى دائرة ك ح <فيما

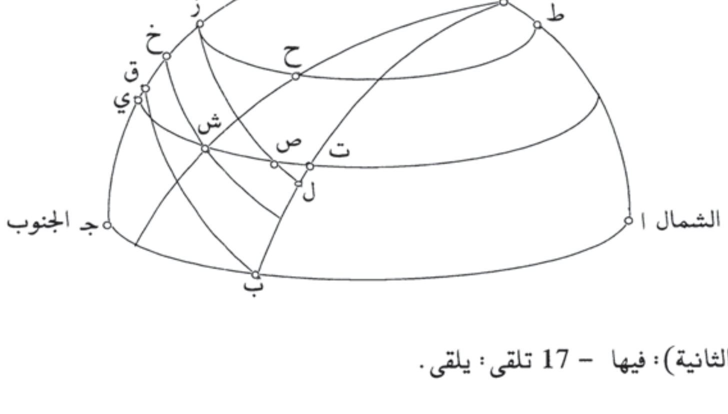
2 ز: ن – 18 ز ه: د ه – 19 ز ف: د ف – 21 ز ف: ا ف – 22 ففي: فهي / ز ف: ا ف.

بين نقطتي كـ ح>، فهو يقطع المقنطرة على نقطة فيما بين نقطتي ح ط ؛ وقد كان هذا الكوكب على نقطة ز التي هي على هذه المقنطرة، فهذا الكوكب يصير على مقنطرة ز ح ط دفعتين، فيكون له ارتفاع مساوٍ لارتفاع نصف نهاره.

ويتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أنه يصير على كل مقنطرة تقع فيما بين نقطتي م ح دفعتين، فيكون له ارتفاعات متساوية غربية، كل اثنين منها متساويان، وتكون هذه الارتفاعات أعظم من ارتفاع نصف نهاره وتكون مختلفة وتكون منها ارتفاعات، الثاني منها أعظم من الأول، وجميعها غربية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأقول: إن الكوكب إذا كانت حركته على هذه الصفة التي وصفناها أخيراً، فإن ارتفاعاته الشرقية ليس يكون منها ارتفاعان متساويان بل تكون مختلفة، يكون الثاني منها أبداً أعظم من الأول.

برهان ذلك: أنا نجيز على نقطة ب قوساً من الدائرة الزمانية، ولتكن ب ق. فنقطة ق أميل إلى الجنوب من نقطة ز لأن الكوكب هو مائل بحركته إلى جهة الشمال، فكل دائرة قطعها من الدوائر الزمانية من وقت حركته من نقطة ب إلى أن صار على نقطة ز فهي جنوبية عن دائرة ز ل. ودائرة ز ل مماسة لدائرة ح ط، فليس تلقى دائرةُ ز ح ط شيئاً من الدوائر الزمانية التي قطعها الكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة ز. فليس يكون للكوكب ارتفاع شرقي مساوٍ لارتفاع مقنطرة ز ح ط، فارتفاع ز جـ هو أعظم ارتفاعاته الشرقية.



8 منها (الثانية): فيها – 17 تلقى: يلقى.

وأيضًا، فإنا نرسم مقنطرة أقرب إلى الأفق من مقنطرة ز ح ط، ولتكن مقنطرة ي ش ت. فالكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة ز يقطع كل مقنطرة تكون أقرب إلى الأفق من مقنطرة ز ح ط، فهو يقطع مقنطرة ي ش ت؛ فليقطعها على نقطة ش. ونجيز على نقطة ش قوسًا زمانية، ولتكن ش خ؛ ولتقطع هذه القوس دائرة نصف النهار على نقطة خ. ونخرج قوس ل ز حتى تقطع مقنطرة ي ش ت، ولتقطعها على نقطة ص. فلأن قوسي ص ز ش خ قوسان زمانيتان وهما أميل إلى الجنوب عن قطب الأفق، يكون قوس ز ص أعظم من الشبيهة بقوس خ ش، كما تبين في الشكل يج. ونجيز على نقطتي ن ش دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ش، فهذه الدائرة تقطع قوس ز ص لأن قوس ز ص أعظم من الشبيهة بقوس خ ش، فقوس ش ص شرقية عن دائرة ن ش، فليس يلقى الكوكب في حركته من نقطة ش إلى نقطة ز شيئًا من قوس ش ص؛ وقوس ص ت شرقية عن دائرة نصف النهار؛ فإذا صار الكوكب إلى نقطة ز فليس يعود إلى شيء من قوس ص ت، وليس يلقى شيئًا من قوس ص ت قبل أن يصير إلى نقطة ز لأن قوس ص ت / شمالية من دائرة ص ز وحركة الكوكب هي من الجنوب إلى الشمال. وقوس ش ي جنوبية عن قوس خ ش، فليس يعود الكوكب إليها لأن الكوكب يميل بحركته إلى جهة الشمال. فليس يلقى هذا الكوكب قوس ي ش ت إلا على نقطة ش فقط. فليس يكون له ارتفاع شرقي مساوٍ لارتفاع ي ج إلا ارتفاع واحد فقط. ١٠-٤١-ظ

وكذلك يتبين في كل مقنطرة يمر بها هذا الكوكب في جهة المشرق أنه لا يصير عليها إلا دفعة واحدة، فليس يكون لهذا الكوكب ارتفاعان شرقيان متساويان، بل ارتفاعاته الشرقية مختلفة، الثاني منها أبداً أعظم من الأول؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

9 ن ش: ن ش ر – 10 ز ص (الأولى): ا ص – 11 ن ش: ن ش ر – 12 وقوس: فقوس – 22 بل: له.

<ل> ولنعد شكل الارتفاعات الشرقية.

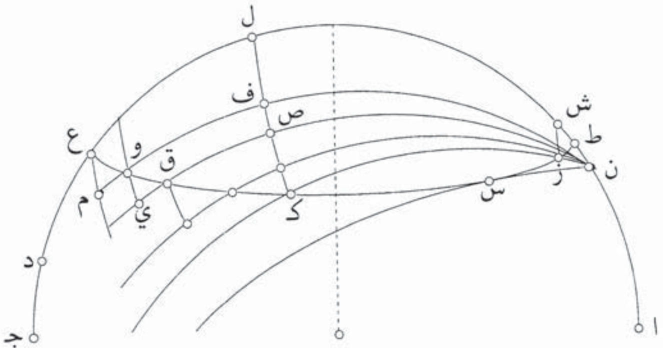
ونقول: إن أعظم ارتفاعات الكوكب الشرقية، إذا كانت له ارتفاعات شرقية متساوية، هو ارتفاع واحد فقط، ليس للكوكب ارتفاع مساوٍ له، وهو أعظم من ارتفاع نصف نهاره.

برهان ذلك: أنه قد تبين أن الكوكب يمرّ بمقنطرات كثيرة هي أرفع من مقنطرة نصف نهاره، ثم أن الكوكب من بعد حصوله على هذه المقنطرات يعود إلى نقطة د التي هي على مقنطرة نصف نهاره. فالكوكب إما أن ينتهي إلى غاية من الارتفاع ثم ينحدر منها إلى نقطة د، أو لا ينتهي إلى غاية من الارتفاع إلا ويتجاوزها إلى ما هو أرفع منها، ولو كان لا ينتهي إلى غاية إلا ويتجاوزها إلى ما هو أرفع منها، لم يعد إلى نقطة د أبداً لأن نقطة د هي أخفض من المواضع التي ارتفع إليها. والكوكب قد عاد إلى نقطة د فلا بدّ أن يكون الكوكب ينتهي في الارتفاع إلى نهاية، ثم ينحدر منها إلى نقطة د. فليس يكون هذه النهاية على دائرة نصف النهار ولا غربية عن دائرة نصف النهار، لأن الكوكب لو لقي دائرة نصف النهار على نقطة هي أرفع من نقطة د، لم يعد إلى نقطة د، لأنه قد تبين أن الكوكب ليس يصير على دائرة من دوائر نصف النهار في زمان نهاره مرتين. وليس يكون نهاية ارتفاعه غربية عن دائرة نصف النهار، لأنها لو كانت غربية لكان الكوكب قد يلقى دائرة نصف النهار قبل أن يصير غربياً عنها، فيكون الكوكب قد لقي دائرة نصف النهار قبل أن ينتهي إلى نقطة د، ثم يعود إلى نقطة د؛ وهذا محال. فليس نهاية ارتفاع الكوكب على دائرة نصف النهار، ولا غربية عن دائرة نصف النهار؛ فهي إذن شرقية عن دائرة نصف النهار.

فلتكن نهاية ارتفاع الكوكب مقنطرة ع ك ط، وليكن قطب معدل النهار نقطة ن. ونخرج من نقطتي ن س دائرة عظيمة تماس مقنطرة ع ك ط، ولتكن دائرة ن س، ولتكن نقطة التماس نقطة س.

فأقول: إن الكوكب لا يمرّ بقوس س ط.

5 بمقنطرات: مقنطرات.



فإن أمكن، فليمرّ بنقطة ز من قوس س ط. ونجيز على نقطتي ن ز دائرة عظيمة، فهي تقطع مقنطرة ع ك ط على نقطتين، إحداهما نقطة ز، فلتكن النقطة الأخرى نقطة ك. ونجيز على نقطتي ز ك قوسين زمانيتين، ولتكن قوسي ز ش ك ل. فإن كان الكوكب يمرّ بنقطة ز، فإن قوس ز ش هو الزمان المحصل الذي ميله قوس ش د، لأن الكوكب يصير من نقطة ز إلى نقطة د. وقوس ز ش شبيهة بقوس ك ل، فالزمان المحصل الذي ميله ل د هو بعض زمان ك ل. فليكن الزمان المحصل الذي ميله ل د هو زمان ص ل، فالكوكب في حركته من نقطة ز إلى د هو يقطع دائرة ل ك الزمانية، وإذا صار على دائرة ل ك، فإنه يكون بُعده من دائرة نصف النهار هو الزمان المحصل الذي ميله ل د، فالكوكب إذن يمرّ بنقطة ص، ونقطة ص أرفع من مقنطرة ع ك ط. فالكوكب إذن يرتفع عن مقنطرة ع ك ط؛ وهذا محال، لأن مقنطرة ع ك ط هي أرفع مقنطرة ينتهي إليها الكوكب بالفرض. فليس يمر الكوكب بنقطة ز ولا بنقطة غيرها من قوس س ط. فموضع الكوكب من مقنطرة ع ك ط هو إما نقطة التماس أو جنوبيًا عن نقطة التماس. فليمر الكوكب بنقطة ك، ولتكن نقطة ك النقطة التي لم يمر الكوكب بنقطة قبلها من مقنطرة ع ك ط.

فأقول: إن الكوكب لا يلقى مقنطرة ع ك ط على نقطة غير نقطة ك.

وذلك أنا نجيز على نقطة ك قوسًا زمانية، ولتكن قوس ك ل، ولتقطع هذه القوس دائرة نصف النهار على نقطة ل. فلأن الكوكب يصير من نقطة ك

6 ز ش: ا ج – 13 من قوس: وقوس / س ط: ر ط.

إلى نقطة د، تكون قوس ك ل هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ل د. ونجيز على نقطة ع قوساً من دائرة زمانية، ولتكن قوس ع م. ولتكن قوس م ع هي الزمان / ٤١١-و المحصل الذي ميله قوس ع د. ونجيز على نقطة م وعلى قطب معدل النهار وهو نقطة ن دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن م؛ ولتقطع هذه الدائرة قوس ك ل على نقطة ف ولتقطع قوس ك ع على نقطة و، فتكون قوس ف ل شبيهة بقوس م ع؛ فزمان م ع هو زمان ف ل، فقوس ع د هي ميل زمان ف ل. وقوس ل د هي ميل زمان ك ل، فتبقى قوس ل ع هي ميل زمان ف ك. وقوس ف م هي مساوية لقوس ل ع، فقوس ف م هي ميل زمان ف ك.

وأيضًا، فإنا نجيز على نقطة و قوسًا زمانية، ولتكن قوس و ي. ولتكن قوس و ي هي الزمان المحصل الذي ميله قوس و م. ونجيز على نقطتي ن ي دائرة عظيمة؛ ولتقطع هذه الدائرة قوس ف ك على نقطة ص ولتقطع قوس ك و على نقطة ق. فتكون قوس و م هي ميل زمان ف ص، فتبقى قوس ف و هي ميل زمان ص ك. وف و مساوية لـ ص ي، فقوس ص ي هي ميل زمان ص ك.

وكذلك إذا أجزنا على نقطة ق قوسًا زمانية مساوية للزمان الذي ميله قوس ق ي، وأجزنا على طرفها وعلى نقطة ن دائرة عظيمة، فصلت من قوس ص ك قوسًا، مما يلي نقطة ك، يكون ميلها هي القوس التي تنفصل من الدائرة العظيمة فيما بين قوس ص ك وبين القوس الزمانية التي تخرج من نقطة ق.

وإذا فعلنا ذلك دائمًا، تبين منه أن كل قوس تنفصل من قوس ك ل مما يلي نقطة ك، فإن ميلها الذي يخصها يكون أعظم من القوس التي تنفصل من الدائرة العظيمة الخارجة من قطب معدل النهار فيما بين قوس ك ل وبين مقنطرة ع ك ط النظيرة لقوسي ص ق ف و. فيتبين من ذلك أن نسبة القسي التي تنفصل من قوس ك ل إلى القسي التي تنفصل من الدوائر العظام فيما بين قوسي ك ل ك ع هي أعظم من نسب القسي التي تنفصل من قوس ك ل إلى ميولها التي تخصها، وإذا تصاغرت المثلثات النظائر لمثلث ك ص ق، صار

4 نقطة: نقط – 5 ك ل: ك ر – 6 هي: هو – 7 هي: هو / ل ع: ل ح – 8 ف م (الثانية): و م – 16 وكذلك: ولذلك – 24 ع ك ط: ع ك.

⟨لا⟩ فرق بينها وبين ⟨مثلثات⟩ الخطوط المستقيمة في المقدار وفي النسبة. وهذه المثلثات إذا كانت مستقيمة الخطوط، فهي متشابهة لأن الزوايا التي عند نقطتي ف ص ونظائرها هي زوايا قائمة. فتكون نسب القسي التي تنفصل من قوس كـ ل إلى القسي التي تنفصل من الدوائر العظام فيما بين قوسي كـ ص كـ ق هي كنسبة قوس كـ ص إلى قوس ص ق. وإذا كانت القسي الزمانية صغاراً وكانت متصلة متوالية، فليس تختلف نسبها إلى ميولها لصغرها وقرب بعضها من بعض. فيكون نسب القسي التي تنفصل من قوس ص كـ إلى ميولها هي كنسبة كـ ص إلى ص ق. ونسبة كـ ص إلى ص ق هي أعظم من نسبة كـ ص إلى ص ي، فنسب القسي التي تنفصل من قوس كـ ص إلى القسي من الدوائر العظام التي تنفصل بين قوسي كـ ص كـ ع هي أعظم من نسب القسي بعينها التي تنفصل من قوس كـ ص إلى ميولها التي تخصها. وقد تبين أن نسب قسي كـ ف كـ ص ونظائرها إلى قسي ف و ص ق ونظائرها أعظم من نسب قسي كـ ف كـ ص ونظائرها إلى قسي ف م ص ي ونظائرها التي هي ميول قسي كـ ف كـ ص ونظائرها. فنسبة كل جزء من أجزاء قوس كـ ل إلى القوس التي تنفصل بينه وبين قوس كـ ع من الدائرة العظيمة أعظم من نسبة ذلك الجزء بعينه من قوس كـ ل إلى ميله الذي يخصه. وإذا كان ذلك كذلك، فإن الكوكب إذا تحرك من بَعد حصوله على نقطة كـ، فإنه يكون أبداً تحت مقنطرة ع كـ ط، لأن كل جزء يتحرك فيه الكوكب من أجزاء الزمان، فإنه يكون في أجزاء ذلك الزمان على طرف ميل ذلك الزمان. وقد تبين أن ميول أجزاء زمان كـ ل هي تحت مقنطرة ع كـ ط. فإذا تحرك الكوكب من نقطة كـ، فإن أي قدر تحرك من الزمان، فإنه يصير تحت مقنطرة ع كـ ط.

فليس يلقى الكوكب قوس كـ ط من المقنطرة، لأن الكوكب يميل بحركته إلى جهة الجنوب / ونقطة كـ هي نقطة لم يلق الكوكب مقنطرة ٤١١-ظ ع كـ ط على نقطة غيرها. وإذا كان ذلك كذلك، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ع كـ ط على أكثر من نقطة كـ.

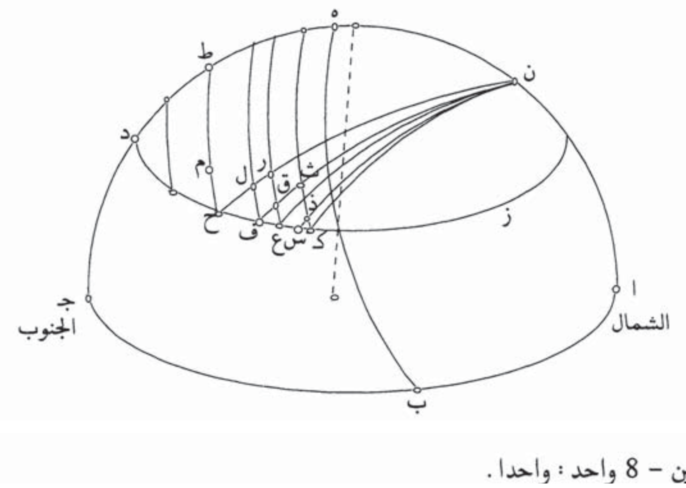
1 فرق: الفرق – 2 الزوايا: زوايا – 3 نقطتي: نقط – 8 ص ق (الأولى): ص ي.

وكذلك يتبين لو جعلنا موضع الكوكب نقطة س، فليس للكوكب ارتفاع مساوٍ لأعظم ارتفاعاته الشرقية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذ قد تبين ذلك، فإنا نقول: إن الكوكب في كل أفق من الآفاق التي يكون الكوكب فيها أبداً طالعًا وغارباً، إذا كانت له ارتفاعات شرقية متساوية، كل اثنين منها متساويان، فليس يكون له ارتفاع ثالث مساوٍ للارتفاعين المتساويين، وإن كل ارتفاعين شرقيين متساويين يكونان له، فهما أعظم من ارتفاع نصف نهاره. وإن كل ارتفاع شرقي يكون له أقل من ارتفاع نصف نهاره، فليس يكون إلا واحد فقط.

‹لا› ولنعد صورة الشكل كح الذي بينا فيه الارتفاعات الشرقية. فلأن الكوكب صار من نقطة ب التي أشرق منها إلى نقطة م من قوس ح ط، التي نسبتها إلى قوس ط د أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين طرفي حركته إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب، يكون الكوكب قد قطع مقنطرة د ح ز على نقطة فيما بين دائرتي ب ه ح ط الزمانيتين، فلتكن النقطة التي عليها قطع الكوكب مقنطرة د ح ز نقطة ك. فالكوكب قد صار على مقنطرة د ح ز على نقطتي ك د.

فأقول: إنه ليس يلقى مقنطرة د ح ز على نقطة غير هاتين النقطتين.



6 شرقيين: شرقيتين – 8 واحد: واحدا.

برهان ذلك: أن كل نقطة من قوس ح د إذا خرج منها خط مستقيم إلى قوس ط د في دائرة موازية لدائرة ح ط، كانت نسبته إلى وتر القوس التي يفصلها من قوس ط د أعظم من نسبة وتر قوس ح ط إلى وتر قوس ط د، كما تبين في الشكلين يا ويب. ونسبة وتر قوس ح ط إلى وتر قوس ط د، أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين طرفي حركته إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب. فتكون نسبة كل خط يخرج من قوس ح د إلى قوس ط د في دائرة موازية لدائرة ح ط إلى وتر ما يفصله ذلك الخط من قوس ط د أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب فيما بين طرفي حركته ‹إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب›، وتكون نسبة القوس التي على ذلك الخط إلى القوس التي يفصلها من قوس ط د أعظم بكثير من نسبة كل زمان محصل يقع للكوكب ‹فيما بين طرفي حركته› إلى ما يخص ذلك الزمان المحصل من ميل حركة الكوكب. فليس يقع بين قوس ح د وبين قوس ط د قوس زمانية تكون زمان من الأزمنة المحصلة للكوكب. فليس يصير الكوكب إذن على قوس ح د من مقنطرة د ح ز. وليس يلقى الكوكب أيضًا قوس ك ز من هذه المقنطرة، لأن الكوكب يميل بحركته أبداً إلى جهة الجنوب وقوس ك ز شمالية عن نقطة ك. فيبقى من المقنطرة قوس ك ح.

ونجيز على نقطة ح وعلى قطب معدل النهار – ولتكن نقطة ن – دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ح. فلأن الكوكب صار من نقطة ك إلى نقطة م، فهو يقطع دائرة ن ح، وليس يقطعها على نقطة ح، لأنه ليس يصير على قوس ح ط مرتين، لأنه يميل أبداً بحركته إلى جهة الجنوب، فليس يصير على دائرة زمانية أكثر من مرة واحدة، فليس يقطع دائرة ن ح على نقطة ح. وليس يقطعها أيضًا على نقطة جنوبية غير نقطة ح، لأنه إذا صار جنوبيًا عن دائرة ح ط، فليس يرجع إليها في هذه الحركة، فليس يعود من الجهة الجنوبية إلى نقطة م. فالكوكب إذا صار من نقطة ك إلى نقطة م، فهو يقطع دائرة / ن ح؛ وليس يقطعها على نقطة ح ولا على نقطة جنوبية غير نقطة ح، فليس يقطعها إلا على نقطة من قوس ن ح، فليقطعها على نقطة ل. ٤١٢-و

21 بحركته: حركته.

ونجيز على نقطة ل قوسًا من دائرة زمانية، فهذه القوس تقطع مقنطرة د ح ز على نقطة فيما بين نقطتي ك ح، لأن نقطة ل هي جنوبية عن نقطة ك وشمالية عن نقطة م. فليقطع القوس الزمانية مقنطرة د ح ز على نقطة ف التي هي فيما بين نقطتي ك ح. فلأن الكوكب صار من نقطة ك إلى نقطة ل، فليس يمرّ بنقطة ف لأنه لا يصير على قوس ل ف مرتين؛ وليس يمر بقوس ف ح أيضًا لأن قوس ف ح جنوبية عن قوس ل ف، فليس يرجع من قوس ف ح إلى نقطة ل، فليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس ف ح في حركته من نقطة ك إلى نقطة ل. وليس يلقى أيضًا قوس ف ح في حركته من نقطة ل إلى نقطة م، لأنه من بعد حصوله على دائرة ن ح ليس يصير شرقيًا عنها. فالكوكب في حركته من نقطة ك إلى نقطة م ليس يلقى شيئًا من قوس ف ح.

ونجيز على نقطتي ن ف دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ف. فلأن الكوكب صار من نقطة ك إلى نقطة ل، فهو يقطع دائرة ن ف، وليس يقطعها على نقطة ف ولا على نقطة جنوبية عن نقطة ف للعلة التي تبينت في دائرة ن ح، فهو يقطع دائرة ن ف على نقطة من قوس ن ف، فلتكن نقطة ق.

ونجيز على نقطة ق قوسًا من دائرة زمانية، فهي تقطع قوس ك ف فيما بين نقطتي ك ف لمثل ما تبين في نقطة ف، فلتكن قوس ق ع، ولتقطع هذه القوس قوس ن ل على نقطة ر، فتكون قوس ق ر هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ر ل.

ونجيز على نقطة ك قوسًا من دائرة زمانية؛ وليقطع قوس ن ق على نقطة ث، ولتكن قوس ك ث؛ فتكون قوس ك ث هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ث ق. فلأن الكوكب صار من نقطة ك إلى نقطة ق، فليس يمرّ بنقطة ع ولا بقوس ع ف لمثل ما تبين في قوس ف ح. فالكوكب في حركته من نقطة ك إلى نقطة ق ليس يلقى شيئًا من قوس ع ف.

وكذلك إذا رسمنا قوس ن ع من دائرة عظيمة، تبين أن الكوكب يلقى دائرة ن ع على نقطة فيما بين نقطتي ن ع. فإذا رسمنا على النقطة التي

19 ق ر: ق د - 20 ر ل: د ل.

يلقاها من قوس ن ع قوساً زمانية، قطعت قوس كـ ع، وتبين أن القوس من المقنطرة التي تفصلها القوس الزمانية مما يلي نقطة ع لا يلقى الكوكب شيئاً منها.

كذلك يتبين في جميع القسي النظائر لقوسي ع ف ف ح التي تفصلها المثلثات النظائر لمثلثي ع ق ف ف ل ح؛ فعلى هذه الصفة تحدث مثلثات كثيرة نظيرة لمثلثي ع ق ف ف ل ح، وكلما قربت هذه المثلثات من نقطة كـ، تصاغرت وصغرت القوس التي تبقى فيما بينها وبين نقطة كـ؛ ويتبين أن كل ما تجوزه هذه المثلثات من قوس كـ ح ليس يمرّ بها الكوكب. وإذا صغرت هذه المثلثات، صار لا فرق بينها وبين المثلثات المستقيمة الخطوط، فلا يكون بين نسب القسي المحيطة بهذه المثلثات وبين نسب الخطوط المستقيمة فرق، لأن هذه المثلثات تكون في غاية الصغر؛ / وذلك أن قوس ٤١٢-ظ
ه د هي ميل حركة الكوكب في الزمان الذي صار فيه من نقطة ب إلى نقطة د، وهذا الزمان هو بعض يوم، وهو في أكثر الأوقات ربع دورة أو ما قرب منها وليس يبلغ نصف دورة. وميل حركة الشمس والكواكب الخمسة في اليوم الواحد إنما هو دقائق يسيرة؛ فميل حركة الشمس والكواكب الخمسة في ربع دورة وفي أقل من نصف دورة هو بعض تلك الدقائق. فقوس ه د للشمس والكواكب الخمسة هي دقائق يسيرة. فأما القمر، فإن ميل فلكه المائل عن دائرة معدل النهار أعظم ما يكون تسعاً وعشرين درجة، وهي ميل الشمس الأعظم مضاف إليه عرض القمر عن دائرة البروج. وليس يجتمع أن هذا الميل إلا في النادر في الزمان، وما سوى ذلك الوقت من الزمان، فميله أقل من هذا المقدار، والذي يخص <ميل> حركة القمر في اليوم الواحد من التسع والعشرين الدرجة ليس يبلغ أكثر من أربع درجات أو ما قرب منها بالزيادة والنقصان. فميل حركة القمر بالقياس إلى دائرة معدل النهار في ربع يوم وما قرب منه ليس يبلغ أكثر من درجة واحدة أو ما يزيد عليها بمقدار يسير. فقوس ه د للقمر أكثر ما يكون درجة واحدة [ليس] على التقريب، وذلك في النادر من الزمان وفي المواضع المشرقة الميل، فأما في سائر الأوقات

15 فميل: فمثل – 18 تسعاً: تسعة – 23 فميل: فمثل – 24 ما يزيد: زيد.

وفي الآفاق العامرة، فليس يبلغ درجة واحدة. والميول التي هي ح ل ف ق ونظائرها التي هي ميول الأزمنة المحصلة، التي فيما بين نقطتي كـ ل، كل واحد منها هو جزء يسير من قوس ه د. فالمثلثات الصغار التي تحدث بين نقطتي كـ ح، بالوجه الذي بيناه، التي هي نظائر مثلث ل ف ح هي في غاية الصغر. ‹وكذلك أيضًا› الميول منها والأزمان المحصلة لأن الميول إذا كانت في غاية الصغر جداً، فإن أزمانها المحصلة تكون أيضًا صغاراً، فليس بين محيطات هذه المثلثات وبين الخطوط المستقيمة فرق في مقاديرها وفي نسبها. وإذا كانت هذه القسي في غاية الصغر فلا فرق بين نسب القسي منها، التي هي أزمنة محصلة إلى ما يخصها من الميول، وبين نسبة زمان كـ ث إلى ميل ث ق [فرق]، لأن قوسي كـ ث ث ق هي من هذه القسي الصغار والقسي التي تقع في داخلها التي هي أضلاع المثلثات الصغار هي أصغر منها. والأزمنة المحصلة إذا كانت صغاراً وكانت متصلة، فليس بين نسبة كل واحد منها إلى ما يخصه من الميل وبين نسبة الزمان المحصل الذي يليه إلى ما يخصه من الميل ‹فرق›. فليس بين نسبة زمان كـ ث إلى قوس ث ق وبين ‹نسب› الأزمنة المحصلة التي هي أضلاع المثلثات الصغار إلى الميول التي تخصها فرق.

وإذ قد تبين ذلك، فإنا نقول: إن الكوكب إذا تحرك من نقطة كـ إلى نقطة ق، فليس يمرّ بشيء من قوس كـ ع.

وذلك أنا نفرض على قوس كـ ع نقطة كيفما اتفقت ولتكن نقطة س. ونجيز على نقطة س وعلى قطب ن دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن س. فهذه الدائرة تقطع قوس كـ ث؛ فلتقطعها على نقطة ذ. فيحدث مثلث كـ ذ س، وهذا المثلث قائم الزاوية لأن دائرة ن ذ س قائمة على دائرة كـ ث على زوايا قائمة. وكذلك مثلث كـ ث ف قائم الزاوية لأن دائرة ن ث ف قائمة على دائرة كـ ث على زوايا قائمة، فزاوية كـ ث ف قائمة، فزاوية كـ ذ س قائمة ولا فرق بين قسي مثلثي كـ ث ف كـ ذ س وبين الخطوط المستقيمة. ومثلث كـ ذ س هو على ضلع مثلث كـ ث ف وزاويتا كـ ذ س كـ ث ف قائمتان، فالمثلثان متشابهان، فنسبة كـ ث إلى ث ف / هي كنسبة كـ ذ إلى ذ س. ٤١٣-و

1 ح ل: د ل و – 13 المحصل: الصغر – 21 ذ: ر، وكذلك فيما يلي – 22 ن ذ س: ق ر س.

ففي أكثر الأوضاع تكون نسبة كـ ث إلى ث ف أعظم من نسبة كـ ذ إلى ذ س، وفي بعض الأوضاع تكون نسبة كـ ث إلى ث ف مساوية لنسبة كـ ذ إلى ذ س. فنسبة كـ ث إلى ث ف على جميع الأوضاع ليست بأصغر من نسبة كـ ذ إلى ذ س. ونسبة كـ ث إلى ث ق هي أعظم من نسبة كـ ث إلى ث ف، فنسبة كـ ث إلى ث ق أعظم من نسبة كـ ذ إلى ذ س على تصاريف الأحوال. ونسبة زمان كـ ذ الذي هو زمان محصل إلى ميل حركة الكوكب الذي يخص زمان كـ ذ هي كنسبة زمان كـ ث إلى قوس ث ق كما تقرر فيما تقدم، ‹وكـ ذ› أصغر هذه القسي منه، فنسبة زمان كـ ذ إلى الميل الذي يخص زمان كـ ذ أعظم من نسبة زمان كـ ذ إلى قوس ذ س، فالميل الذي يخص زمان كـ ذ هو أصغر من قوس ذ س. فالكوكب في حركته من نقطة كـ إلى نقطة ق هو يقطع قوس ذ س ولا يمر بنقطة س. وإذا لم يمرّ بنقطة س، فليس يمر بقوس س ع، كما تبين في قوس ع ف وقوس ف ح.

وكذلك كل نقطة تفرض على قوس كـ ع يتبين أن الكوكب لا يمرّ بها كما تبين في نقطة س، فليس يمرّ الكوكب بشيء من قوس كـ ع. وقد تبين أنه ليس يمر بقسي ع ح ح د كـ ز فليس يمرّ الكوكب بشيء من مقنطرة دح ز سوى نقطتي كـ د؛ هذا إذا كانت دائرة ن ح أرفع من نقطة كـ.

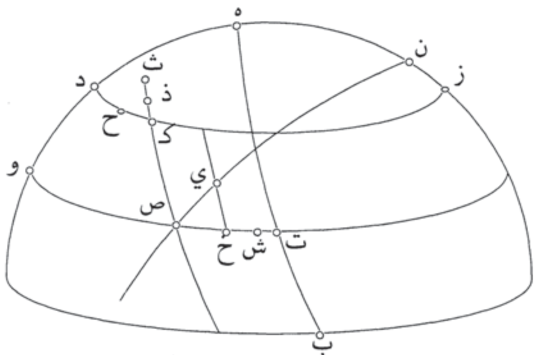
فإن كانت دائرة ن ح تمرّ بنقطة كـ، كانت قوس كـ ح شرقية عن دائرة ن ح وقد صار الكوكب عليها على نقطة كـ، فليس يمرّ الكوكب بشيء من قوس كـ ح.

وإن كانت دائرة ن ح تحت نقطة كـ، فإنا نجيز على نقطتي ن كـ دائرة عظيمة، فهي تقطع قوس ح م الزمانية، فيصير قوس كـ ح شرقية عن الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقطة كـ والكوكب قد صار عليها على نقطة كـ، فلا يمر الكوكب بشيء من قوس كـ ح.

فعلى تصاريف الأوضاع ليس يلقى الكوكب مقنطرة د ح ز إلا على نقطتين فقط.

فأقول إنه ليس يلقى شيئًا من المقنطرات التي هي أقرب إلى الأفق من مقنطرة د ح ز أكثر من مرة واحدة.

4 كـ ث (الثانية): كـ ف – 16 د ح ز: د ز ح – 19 كـ ح: ل ح – 27 د ح ز: د ز ح.



ولتكن مقنطرة و ش ت أقرب إلى الأفق من مقنطرة د ح ز. فهذه المقنطرة تقطع دائرة ب ه وتقطع دائرة ث ذ ك. ولتخرج قوس ث ذ ك حتى تقطع هذه المقنطرة؛ فلتقطعها على نقطة ص. فالكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة ك هو يقطع مقنطرة و ش ت وهو يقطعها على نقطة جنوبية ⟨عن⟩ قوس ب ه وشمالية عن قوس ث ص، فليقطعها على نقطة ش. ونجيز على نقطتي ص ن دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ص. فالكوكب إذا تحرك من نقطة ش إلى نقطة ك، فهو يقطع دائرة ن ص وليس يقطعها على نقطة ص ولا على نقطة جنوبية عن دائرة ك ص، كما تبين فيما تقدم، فهو يقطعها على نقطة من قوس ن ص، فليقطعها على نقطة ي. وليس يلقى الكوكب قوس ص و في حركته من نقطة ش إلى نقطة ك، لأن قوس ص و جنوبية عن نقطة ك. فلو لقي الكوكب قوس و ص لم يرجع إلى نقطة ك. وليس يلقى الكوكب قوس ش ت من المقنطرة / لأنها شمالية عن نقطة ش، فليس يبقى ٤١٣-ظ
من المقنطرة إلا قوس ش ص.

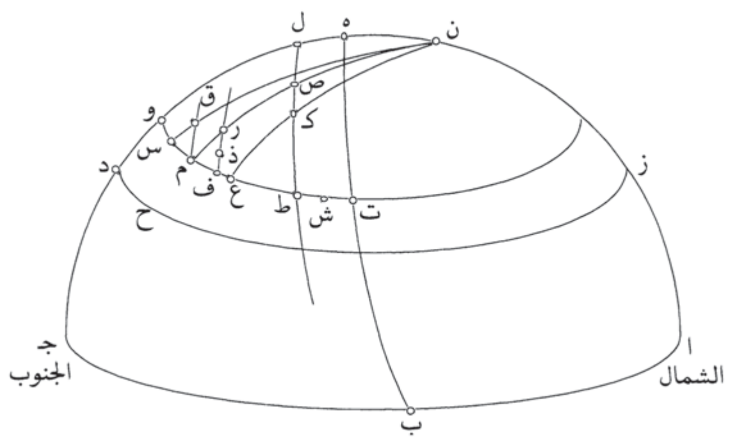
والكوكب في حركته من نقطة ش إلى نقطة ك هو يقطع دائرة ن ص على نقطة ي، فنقطة ي جنوبية عن نقطة ش وشمالية عن نقطة و. ونجيز على نقطة ي قوسًا من دائرة زمانية، ولتقطع مقنطرة و ش ت على نقطة خ، فيحدث مثلث خ ي ص، فيتبين أن الكوكب ليس يلقى قوس خ ص من مثلث خ ي ص كما تبين ⟨في قوس ع ف⟩ في مثلث ع ق ف. ويتبين أنه ليس يلقى قوس ش خ كما تبين في قوس ك ع. وإن كانت دائرة ن ص العظيمة تمرّ بنقطة ش أو تحت نقطة ش، يكون قوس ش ص شرقية عن الدائرة

1 د ح ز: د ز ح – 8 ك ص: ص – 11 و ص: و ش – 15 و: ص.

العظيمة التي تمرّ بنقطة ش، فلا يمرّ بها الكوكب، فليس يلقى الكوكب مقنطرة و ش ت في جهة المشرق إلا على نقطة ش. وكذلك كل مقنطرة فيما بين الأفق وبين مقنطرة د ح ز، ليس يلقاها الكوكب إلا على نقطة واحدة فقط.

‹لب› ولنعد الصورة، ولتكن نقطة ك أرفع نقطة ينتهي إليها الكوكب. ولتكن مقنطرة و ش ت تحت نقطة ك وفوق مقنطرة د ح ز. ونجيز على نقطة ك قوساً من دائرة زمانية، فلتكن ك ل. فهذه القوس تقطع مقنطرة و ش ت، لأنه إذا كانت دائرة ب ه تقطع الأفق الشرقي، فإن دائرة ل ك تقطع الأفق الشرقي، وإذا كانت دائرة ل ك تقطع الأفق الشرقي، فهي تقطع مقنطرة و ش ت؛ فلتقطع قوس ل ك مقنطرة و ش ت على نقطة ط. فلأن الكوكب صار من نقطة ب إلى نقطة ك، فهو يقطع مقنطرة و ش ت؛ فليقطعها على نقطة ش. فنقطة ش شمالية عن نقطة ك وجنوبية عن نقطة ت، فهي فيما بين دائرتي ب ه ل ط. ثم أن الكوكب من بَعد حصوله على نقطة ك قد صار على نقطة د، فقد قطع مقنطرة و ش ت على نقطة أخرى ‹غير› نقطة ش، لأن نقطة ش شمالية عن نقطة ك، والنقطة الأخرى جنوبية عن نقطة ك؛ فلتكن النقطة الأخرى نقطة م، فالكوكب يلقى مقنطرة و ش ت على نقطتي ش م.

فأقول: إنه لا يلقى هذه المقنطرة على نقطة ثالثة.



3 د ح ز: د ز ح – 6 د ح ز: د ز ح – 13 ل ط: ل ت – 16 يلقى: يلي.

أما أنه لا يلقى قوس ش ت، فهو بيّن لأن قوس ش ت شمالية عن نقطة ش والكوكب يميل أبداً بحركته إلى جهة الجنوب، فليس يلقى قوس ش ت.

وأما أنه ليس يلقى قوس ش ط، فإنه يتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أنه لا يلقى قوس كـ ح من مقنطرة د ح ز التي في الشكل الذي قبل هذا.

وأما أنه ليس يلقى قوس ط م، فيتبين كما نصف: نجيز على نقطتي ن كـ دائرة عظيمة، فهي تقطع قوس و ط، فلتقطعها على نقطة ع، ولتكن دائرة ن كـ ع. فالكوكب ليس يلقى قوس ط ع لأنه لا يصير شرقيًا عن دائرة ن كـ ع، وليس يصير على نقطة ع لأنه لا يصير على دائرة ن كـ مرتين، فليس يلقى الكوكب قوس ط ع.

ونجيز على نقطتي ن م دائرة عظيمة ولتكن ن م؛ ولتقطع قوس ل كـ على نقطة ص، فتكون قوس كـ ص زمانًا محصلاً وتكون قوس ص م هي الميل الذي يخص زمان كـ ص. ونفرض على قوس ع م نقطة كيفما اتفقت ولتكن نقطة ف. ونجيز على نقطة ف قوساً زمانية، فهي تقطع قوس ص م، ولتكن قوس ف ر. فنسبة قوس ف ر إلى قوس ر م مساوية لنسبة قوس ط ص إلى قوس ص م لأن هذه القسي في غاية الصغر فلا فرق بينها وبين الخطوط المستقيمة / التي هي أوتارها. ومثلثا ط ص م ف ر م قائما الزاويتين لأن ٤١٤-و
زاويتي ط ص م ف ر م كل واحدة منهما هي زاوية قائمة. فنسبة قوس ف ر إلى قوس ر م كنسبة قوس ط ص إلى قوس ص م. ونسبة قوس ط ص إلى قوس ص م هي أعظم من نسبة كـ ص إلى ص م، فنسبة ف ر إلى ر م أعظم من نسبة كـ ص إلى ص م؛ ونسبة كـ ص <إلى ص م> هي كنسبة زمان ف ر إلى الميل الذي يخص ف ر لأن هذه الأزمنة متقاربة في غاية الصغر، فليس بين نسبها إلى ميولها فرق، فنسبة ف ر إلى ر م هي أعظم من نسبة ف ر إلى ما يخص ف ر من الميل، فالذي يخص ف ر من الميل هو أعظم من قوس ر م. فالزمان الذي ميله قوس ر م هو أصغر من زمان ف ر. فليكن ذلك الزمان زمان ذ ر، فقوس ذ ر هو الزمان المحصل الذي ميله قوس ر م. والكوكب في

4 ش ط: ب ط – 5 د ح ز: د ز ح – 18 ف ر م: د ر م – 22 كـ ص (الأولى): ط ص – 25 ر م: د م – 27 ر م: ب م.

حركته من نقطة ك إلى نقطة م، قد مرّ بدائرة ف ر، ثم صار إلى نقطة م. ولما صار الكوكب على دائرة ف ر، فإن القوس التي تكون بينه وبين دائرة ن ر م هي الزمان المحصل الذي ميله ر م؛ والزمان المحصل الذي ميله ر م هو قوس ذ ر، فالكوكب لما صار على دائرة ف ر إنما صار على نقطة ذ. وإذا كان الكوكب قد صار على نقطة ذ، فليس يلقى دائرة ف ر على نقطة أخرى، فالكوكب ليس يمرّ بنقطة ف.

وكذلك كل نقطة من قوس ع م يتبين أن الكوكب ليس يمرّ بها، كما تبين في نقطة ف، فالكوكب ليس يلقى قوس ع م.

وأيضًا، فإنا نتعلم على قوس م و نقطة س، ونجيز على نقطتي ن س دائرة عظيمة، ولتكن ن س. ونجيز على نقطة م قوسًا زمانية؛ ولتقطع دائرة ن س على نقطة ق. فتكون نسبة م ق إلى ق س هي كنسبة ف ر إلى ر م لصغر هذه المثلثات، فليس بينها وبين الخطوط المستقيمة فرق. ونسبة ف ر إلى ر م أعظم من نسبة ذ ر إلى ر م، فنسبة م ق إلى ق س أعظم من نسبة ذ ر إلى ر م. وذ ر زمان <محصل> فضل ميل قوس ر م، فنسبة زمان م ق إلى الميل الذي يخصه هي نسبة ذ ر إلى ر م، فنسبة زمان م ق إلى قوس ق س هي أعظم من نسبة زمان م ق إلى الميل الذي يخص زمان م ق، فالميل الذي يخص زمان م ق هو أعظم من قوس ق س، فنهاية هذا الميل هي تحت مقنطرة ت ش. فإذا تحرك الكوكب من نقطة م زمان م ق، يكون مركزه قد صار على دائرة ن ق س وعلى نقطة منها تحت نقطة س. وإذا كان الكوكب يلقى دائرة ن ق س على نقطة غير نقطة س، فليس يمرّ بنقطة س، بل يمرّ تحت نقطة س.

وكذلك كل نقطة من قوس م و يتبين منها، كما تبين في نقطة س، أن الكوكب لا يمرّ بها وأنه يكون تحتها. فليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس م و؛ بل إذا تحرك من نقطة م إلى نقطة د، يكون أبداً تحت مقنطرة و ش ت.

فقد تبين أن الكوكب ليس يلقى قوس ط م و إلا على نقطة م وليس يلقى قوس ط ت إلا على نقطة ش. فليس يلقى الكوكب مقنطرة و ش ت إلا على نقطتين فقط.

3 ر م (الأولى والثانية): د م – 9 م و: م ف / س: ش، وكذلك فيما يلي – 13 ر م (الثانية): د م – 14 ر م (الثانية): د م – 26 قوس: مكررة / ط ت: ط ت / ش: س / و ش ت: و س ت.

وكذلك كل مقنطرة فوق مقنطرة د ز ح وتحت نقطة ک، ليس يلقاها الكوكب إلا على نقطتين فقط. فليس يكون للكوكب ارتفاعات شرقية متساوية أكثر من الارتفاعين فقط.

فكل كوكب من الكواكب السبعة إذا كانت له ارتفاعات شرقية متساوية فليس يكون له أكثر من ارتفاعين متساويين / وتكون جميع هذه الارتفاعات ٤١٤-ظ أعظم من ارتفاع نصف نهاره ويكون له ارتفاع واحد فقط مساوٍ لارتفاع نصف نهاره، وكل ارتفاع شرقي يكون له أقل من ارتفاع نصف نهاره. فليس يكون له ارتفاع آخر شرقي مساوٍ له؛ وذلك ما أردنا بيانه في الشكلين الأخيرين.

〈جـ〉 ولنعد شكل الارتفاعات الغربية.

فأقول: إن أعظم ارتفاعات الكوكب الغربية هو ارتفاع واحد فقط.

أما أن للكوكب ارتفاع هو أعظم ارتفاعاته الغربية، فإنه يتبين كما تبين في شكل الارتفاعات الشرقية.

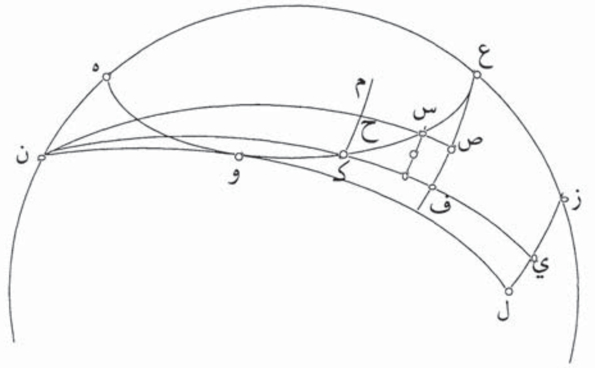
وأما أنه ليس له ارتفاع مساوٍ لأعظم ارتفاعاته الغربية، فإنه يتبين كما نصف.

ليكن أرفع مقنطرة ينتهي إليها الكوكب في حركته من دائرة نصف النهار إلى أفق المغرب مقنطرة ع ک ه. ونجيز على نقطة ع قوساً زمانية، ولتكن ع ف. ونخرج من قطب معدل النهار وهو نقطة ن دائرة عظيمة تماس مقنطرة ع ک ه، ولتكن دائرة ن و، ولتماس هذه الدائرة مقنطرة ع ک ه على نقطة و. فيتبين كما تبين في شكل الارتفاعات الشرقية أن الكوكب ليس يلقى شيئاً من قوس و ه، لأن كل نقطة من قوس و ه إذا خرج إليها من نقطة ن دائرة عظيمة، فهي تقطع مقنطرة ع ک ه على نقطة أخرى وتقطع دائرة ع ف، وتكون القوس من الدائرة العظيمة التي بين النقطة من قوس و ه وبين قوس ع ف هي ميل الزمان الذي ينفصل من قوس ع ف، ويكون القوسان الزمانيتان اللتان تخرجان من نقطتي التقاطع بين المقنطرة وبين الدائرة العظيمة إلى دائرة نصف النهار متساويتين. فيعرض من ذلك المحال الذي عرض في شكل الارتفاعات الشرقية وهو شكل لَ، فليس يلقى

5 ارتفاعين: مكررة – 9 الأخيرين: الاخرين – 21 و ه (الأولى): د ه.

الكوكب شيئًا من قوس و ه. فموضع الكوكب من مقنطرة ع ك ه هو إما نقطة و أو جنوبي عن نقطة و. فليكن موضع الكوكب نقطة ك، ولتكن نقطة ك النقطة التي لا يلقى الكوكب بعدها شيئًا من مقنطرة ع ك ه.

فأقول: إن الكوكب لا يلقى مقنطرة ع ك ه على نقطة غير نقطة ك.



برهان ذلك: أنا نجيز على نقطتي ن ك دائرة عظيمة، ولتقطع قوس ع ف على نقطة ف، ولتقطع هذه الدائرة قوس ز ل على نقطة ي. فلأن الكوكب تحرك من نقطة ز إلى نقطة ك، يكون قوس ز ي هي الزمان المحصل الذي ميله قوس ك ي؛ وقوس ع ف شبيهة بقوس ز ي، وقوس ك ف هي بعض قوس ك ي، فالزمان المحصل الذي ميله قوس ك ف هو أصغر من زمان ع ف. فليكن ذلك الزمان المحصل قوس ص ف، فالكوكب إذا تحرك من نقطة ز إلى نقطة ك، فهو يقطع دائرة ع ف. وإذا قطع دائرة ع ف، فهو يقطعها على نقطة ص. ونجيز على نقطة ك قوسًا زمانية، ولتكن قوس ك م، ونجيز على نقطتي ن ص دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ص. فهذه الدائرة تقطع قوسي ك م ك ع، فلتقطع قوس ك م على نقطة ح ولتقطع قوس ك ع على نقطة س، فتكون قوس ح س أصغر من قوس ح ص، وقوس ح ص هي ميل زمان ح ك المساوي لـ ص ف، فتكون نسبة ك ح إلى ح س أعظم / من نسبة ك ح إلى ح ص. وإذا أجزنا على نقطة س قوسًا زمانية، قطعت قوس ك ف، وتكون تلك القوس الزمانية شبيهة بقوس ص ف، وتكون القوس التي تنفصل من قوس ك ف مساوية لقوس ح س، فيكون الزمان المحصل الذي ٤١٥-و

1 و ه: د ه – 16 ح ك: ح ط – 17 ح ص: خ ص.

ميله ⟨القوس التي تنفصل من قوس كـ ف هي بعض⟩ القوس الزمانية التي تخرج من نقطة س إلى قوس كـ ف. فيكون بعض هذه القوس الزمانية هو الزمان المحصل الذي ميله القوس التي تنفصل من قوس كـ ف.

فيتبين بهذا التدبير كما تبين في شكل الارتفاعات الشرقية أن الكوكب في حركته من نقطة ص إلى نقطة كـ يكون أبداً تحت مقنطرة ع كـ ه، فليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس كـ ع؛ وليس يلقى شيئًا من قوس كـ ه، لأن نقطة كـ هي النقطة التي ليس يلقى الكوكب بَعدها شيئًا من مقنطرة ع كـ ه، فليس يلقى الكوكب شيئًا من مقنطرة ع كـ ه غير نقطة كـ.

وكذلك لو جعلنا موضع الكوكب نقطة و، يتبين بمثل هذا البيان أن الكوكب ليس يلقى شيئًا من مقنطرة ع كـ ه.

فعلى تصاريف الأوضاع ليس يلقى الكوكب شيئًا من مقنطرة ع كـ ه غير نقطة كـ، فليس يكون للكوكب ارتفاع غربي مساوٍ لأعظم ارتفاعاته الغربية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

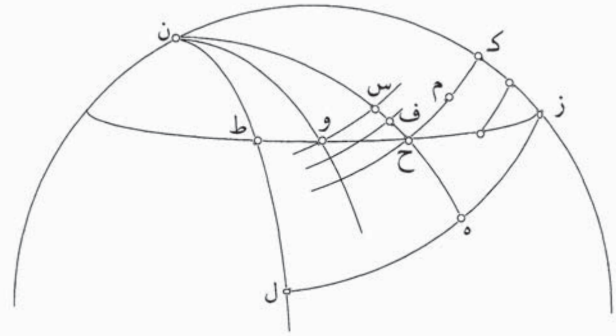
وإذ قد تبين ذلك، فإنا نقول: إن الكوكب في كل أفق من الآفاق التي يكون فيها أبداً طالعًا غاربًا إذا كانت له ارتفاعات غربية متساوية، كل اثنين منها متساويان، فليس يكون له ارتفاع ثالث مساوٍ للارتفاعين المتساويين، وإن كل ارتفاع غربي يكون له أقل من ارتفاع نصف نهاره، فليس يكون إلا واحد فقط.

⟨لد⟩ ولنعد شكل الارتفاعات الغربية. ولتكن نسبة وتر قوس ح كـ إلى وتر قوس كـ ز أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب في حركته من نقطة ز إلى نقطة د إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل مما يلي مبدأ الحركة. فتكون نسبة قوس ح كـ إلى قوس كـ ز أعظم بكثير من كل نسبة لكل زمان محصل إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل؛ وتكون نسبة قوس كـ ح إلى قوس ه ح هي نسبة قوس ح كـ إلى قوس كـ ز. وليكن الزمان المحصل الذي ميله قوس كـ ز هو زمان كـ م، فالكوكب يصير

2 هو: هي – 3 القوس: للقوس – 5 ع كـ ه: ع كـ – 16 متساويان: متساويين – 18 واحد: واحدا – 24 كـ ح: ر ه.

من نقطة زَ إلى نقطة مَ. وليكن النقطة الثانية من مقنطرة زَ حَ طَ التي يمرّ بها الكوكب نقطة وَ

فأقول: إن الكوكب لا يلقى مقنطرة زَ حَ طَ على غير نقطتي زَ وَ.



برهان ذلك: أن كل نقطة من قوس حَ زَ إذا خرج منها خط مستقيم إلى قوس كـ زَ في دائرة موازية لدائرة كـ حَ، فإن نسبته إلى وتر ما يفصله من قوس كـ زَ أعظم من نسبة وتر قوس حَ كـ إلى وتر قوس كـ زَ. فتكون نسبة كل قوس تخرج فيما بين قوسي حَ زَ كـ زَ، موازية لقوس حَ كـ، إلى القوس التي تنفصل من قوس كـ زَ، أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب إلى الميل الذي يخص ذلك الزمان المحصل؛ فليس يمرّ الكوكب بشيء من قوس زَ حَ، بل يكون أبداً في حركته من نقطة زَ إلى نقطة مَ فوق مقنطرة حَ طَ. ونجيز على نقطة وَ ‹دائرة زمانية ولتكن دائرة وَ سَ؛ و›الكوكب صار من نقطة مَ إلى نقطة وَ، فهو يقطع دائرة / نَ حَ، وليس ٤١٥-ظ
يقطعها على نقطة حَ لأنه لا يصير على قوس كـ حَ مرتين، وليس يقطعها على نقطة جنوبية غير نقطة حَ لأنه ليس يصير تحت قوس حَ زَ، وليس يقطعها على نقطة سَ لأنه ‹لا› يمرّ بنقطة سَ من قوس وَ سَ، وليس يقطعها على نقطة من قوس نَ سَ لأنه يصير شماليًا عن قوس وَ سَ، فلا يعود إلى نقطة وَ؛ وهو يصير إلى نقطة وَ، فليس يلقى دائرة نَ حَ إلا على نقطة فيما بين نقطتي سَ حَ، فلتكن النقطة التي يمرّ بها الكوكب من قوس سَ حَ نقطة فَ. فإذا أخرجنا على نقطة فَ قوساً زمانية، قطعت قوس وَ حَ، وحدث مثلث مما

3 وَ: دَ – 4 حَ زَ: حَ دَ – 6 كـ زَ (الأولى): طَ زَ – 15 سَ (الثانية): وَ.

يلي نقطة ح. ويتبين أن الكوكب لا يلقى شيئًا من القوس التي يحوزها ذلك المثلث مما يلي نقطة ح، لأن القوس التي يحوزها ذلك المثلث من قوس و ح تكون جنوبية عن القوس الزمانية. فيتبين بالتدبير الذي بيناه في شكل الارتفاعات الشرقية أن الكوكب لا يلقى شيئًا من قوس و ح.

وأيضًا، فإنا نجيز على نقطتي ن و دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن و. فإن كانت هذه الدائرة تماس مقنطرة ز ح ط على نقطة و، فإن الكوكب من بعد حركته من نقطة و ليس يلقى شيئًا من قوس و ط، لأن قوس و ط شرقية عن دائرة و ن. وإن كانت دائرة ن و تقطع مقنطرة ز ح ط، فهي تقطعها على نقطتين، فإن كانت نقطة و هي النقطة الشمالية من نقطتي التقاطع، فليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس و ط لأن قوس و ط، تكون شرقية عن دائرة ن و؛ وإن كانت نقطة و هي الجنوبية من نقطتي التقاطع، فإنا نخرج من نقطة ن دائرة تماس مقنطرة ط ح ز، ولتكن دائرة ن ش ص؛ ولتكن نقطة التماس نقطة ش. ونخرج قوس س و الزمانية حتى تقطع دائرة ن ش ص؛ ولتقطعها على نقطة ص. ونجيز على نقطة ش قوسًا زمانية؛ ولتقطع دائرة ن و على نقطة ر. فتكون نسبة قوس و س إلى قوس س ح مساوية لنسبة قوس ش ر إلى قوس ر و كما تبين في الشكل لا. ونسبة و س إلى س ف، التي هي نسبة الزمان المحصل إلى الميل الذي يخصه، أعظم من نسبة و س إلى س ح، فنسبة زمان و س إلى ميل ف س أعظم من نسبة قوس ش ر إلى قوس ر و؛ ونسبة زمان ش ر إلى الميل الذي يخص زمان ش ر هي نسبة و س إلى س ف لصغر هذه الأزمنة وتجاورها، فليس تختلف نسبها إلى ميولها، فنسبة زمان ش ر إلى الميل الذي يخصه هي أعظم من نسبة ش ر إلى ر و. فالميل الذي يخص زمان ش ر هو أصغر من قوس ر و، وزمان ش ر هو زمان و ص وقوس ش ص مساوية لقوس <ر و، فنسبة و س إلى س ف أعظم من نسبة قوس ص و إلى> / قوس ص ش؛ فالكوكب إذا تحرك من نقطة و زمان ٤١٦-و و ص، فهو يصير على قوس ص ش فيما بين نقطتي ص ش. وكذلك كل نقطة من قوس ش و إذا أخرجنا إليها دائرة عظيمة من نقطة ن، فهي تقطع قوس و ص. وإذا أجزنا على تلك النقطة قوسًا زمانية، فهي تقطع قوس ر و. فيتبين

20 وتجاورها: وتجاوزها – 23-24 <...>: مكانها متآكل في المخطوطة.

كما تبين في قوس ر و أن القوس التي تفصلها القوس الزمانية من قوس ر و هي أعظم من ميل تلك القوس الزمانية. فيلزم من ذلك أن يكون أطراف الميول التي تحدث فيما بين نقطة و وبين دائرة ن ص جميعها تحت قوس و ش. فيتبين من ذلك أن الكوكب ليس يلقى شيئًا من قوس ش و. وإذا صار الكوكب على دائرة ن ص، فليس يلقى شيئًا من قوس ش ط لأن قوس ش ط شرقية عن دائرة ن ص، فليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس و ط. وقد تبين أنه ليس يلقى شيئًا من قوس و ز، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ز ح ط التي هي مقنطرة نصف نهاره إلا على نقطتي ز و.

وأيضًا، فإنا نرسم إحدى المقنطرات التي تحت مقنطرة و ح ط، ولتكن مقنطرة ع ص ت، وليلق الكوكب هذه المقنطرة على نقطة خ. فهو بيّن أن نقطة خ شمالية عن قوس س و لأن الكوكب يميل بحركته إلى جهة الشمال.

فأقول: إن الكوكب ليس يلقى مقنطرة ع ص ت على نقطة غير نقطة خ.

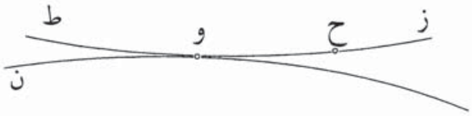
برهان ذلك: أنا نخرج قوس س و الزمانية حتى تقطع مقنطرة ع ص ت، ولتقطعها على نقطة ص. ونجيز على نقطتي ن خ دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن خ؛ فدائرة ن خ إما أن تكون مماسة لمقنطرة ع ص ت على نقطة خ، وإما أن تكون قاطعة لها على نقطتين، إحداهما نقطة خ.

فإن كانت مماسة للمقنطرة، فليس يلقى الكوكب قوس خ ت من المقنطرة، لأن قوس خ ت تكون شرقية عن دائرة ن خ. وليس يلقى قوس خ ع من المقنطرة لأن قوس خ ع جنوبية عن نقطة خ التي هي موضع الكوكب، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ع ص ت إلا على نقطة خ.

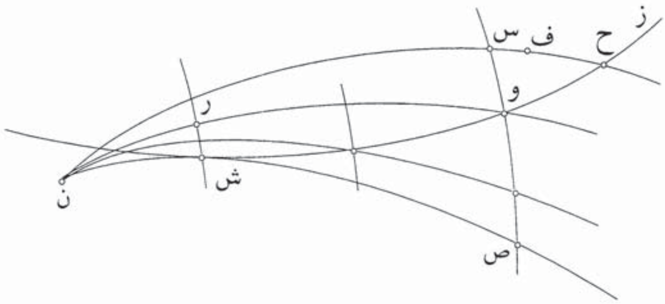
وكذلك إن كانت دائرة ن خ قاطعة مقنطرة ع ص ت على نقطة خ وعلى نقطة جنوبية عن نقطة خ، يكون قوس خ ت شرقية عن دائرة ن خ وقوس خ ع جنوبية عن الكوكب.

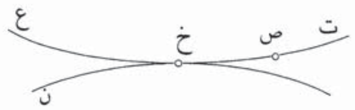
فإن كانت دائرة ن خ قاطعة لمقنطرة ع ص ت على نقطة خ وعلى نقطة أخرى شمالية عن نقطة خ على ما تبين في الصورة، فإنا نجيز على نقطتي ن

6 ن ص: ر ص – 9 إحدى: احد – 24 الكوكب: الكواكب.

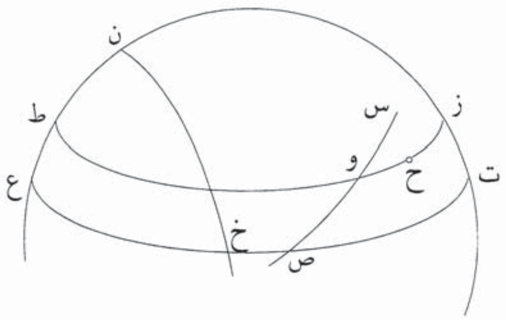

ط
و
ح
ز
ن

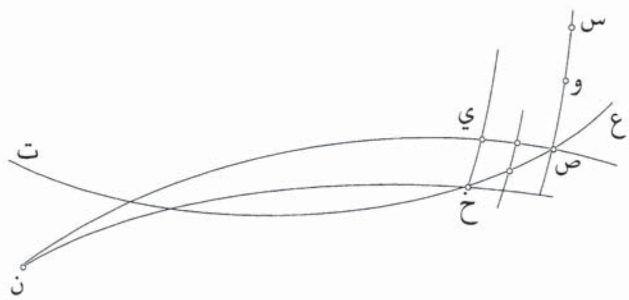

ط
و
ز
ن


ز
ح
ف
س
و
ر
ش
ن
ص


ع
خ
ص
ت
ن


ع
خ
ت
ن


ن
ط
س
ز
و
ح
ت
ع
خ
ص


س
و
ي
ع
ت
ص
خ
ن

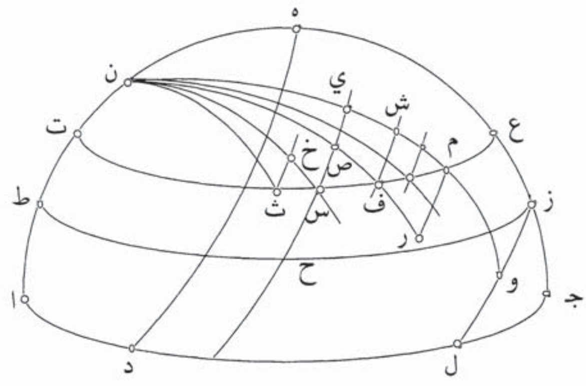
ص دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن ص. فتكون هذه الدائرة قاطعة لمقنطرة ع ص ت أيضًا على نقطتين، إحداهما نقطة ص والأخرى شمالية عن نقطة ص، على ما تبيّن في الصورة. ونجيز على نقطة خ قوسًا زمانية، ولتكن خ ي. فالكوكب يصير من نقطة و إلى نقطة خ، فهو يقطع دائرة ن ص وليس يقطعها إلا على نقطة جنوبية عن قوس خ ي وشمالية عن قوس و ص، فهو يقطعها على نقطة من قوس ي ص فيما بين نقطتي ي ص. فإذا أجيز على تلك النقطة قوس زمانية، فهي تقطع قوس خ ص. فيتبين كما تبين في قوس و ش بالمثلثات الصغار التي تحدث في داخل مثلث خ ي ص أن الكوكب لا يمرّ بشيء ‹من› قوس خ ص، ويتبين أنه لا يلقى شيئًا من قوس خ ت كما تبين في قوس و ط، وليس يلقى الكوكب شيئًا من قوس ص ع، لأن قوس ص ع جنوبية عن قوس و ص، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ع ص ت إلا على نقطة خ فقط.

وكذلك يتبين في كل مقنطرة من المقنطرات التي بين مقنطرة ز ح ط وبين الأفق أن الكوكب ليس يلقاها إلا على نقطة واحدة فقط. / فكل ٤١٦-ظ ارتفاع غربي يكون للكوكب أقل من ارتفاع نصف نهاره، فليس يكون إلا واحداً فقط.

‹له› ولنعد الصورة، ولتكن نقطة ص أرفع نقطة ينتهي إليها الكوكب. ولتكن مقنطرة ع س ت أرفع من مقنطرة ز ح ط وأخفض من نقطة ص.

وقد تبين فيما تقدم أن كل مقنطرة هي أرفع من مقنطرة نصف نهار الكوكب، إذا كان الكوكب يرتفع عنها، فإن الكوكب يلقاها على نقطتين. فالكوكب يلقى مقنطرة ع س ت على نقطتين. ونجيز على نقطة د قوسًا زمانية، فهي تقطع دائرة نصف النهار، فلتقطعها على نقطة ه. فدائرة د ه شمالية عن نقطة ص، لأن نقطة د شمالية عن نقطة ص، ودائرة ز ل جنوبية عن نقطة ص، فنقطة ص فيما بين دائرتي ه د ز ل. وهاتان الدائرتان تقطعان الأفق، فالدائرة الزمانية التي تمرّ بنقطة ص تقطع الأفق. ونقطة ص أرفع من مقنطرة ع س ت، فالدائرة الزمانية التي تمرّ بنقطة ص تقطع مقنطرة

7 قوس (الأولى): قوسا / و ش: م ح.



ع س ت. ونجيز على نقطة ص قوساً من الدائرة الزمانية، ولتقطع مقنطرة ع س ت على نقطة س. ونجيز على نقطتي ن س دائرة عظيمة ⟨ولتكن دائرة ن س، وعلى نقطتي ن ص دائرة عظيمة⟩، ولتكن دائرة ن ص، ولتقطع هذه الدائرة مقنطرة ع س ت على نقطة ف. فلأن الكوكب صار من نقطة ز التي هي تحت مقنطرة ع س ت إلى نقطة ص التي هي فوق مقنطرة ع س ت، فهو يقطع مقنطرة ع س ت، وليس يقطعها على نقطة من قوس س ف، لأنه لو مرّ بنقطة من قوس س ف لما صار إلى نقطة ص، لأن نقطة ص شرقية عن كل نقطة من قوس س ف؛ ولا يمرّ بنقطة ف لأنه لا يلقى دائرة ن ص على نقطتين؛ وليس يمر الكوكب بنقطة س لأنه لا يلقى قوس ص س على نقطتين. فليس يلقى الكوكب شيئاً من قوس س ف، وهو يقطع مقنطرة ع س ت قبل أن يصير إلى نقطة ص، فهو يقطع المقنطرة على قوس ع ف، فليقطعها على نقطة م. ونجيز على نقطتي م ن دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ن م، فتكون قوس ز و هي الزمان المحصل الذي ميله قوس و م. ولتقطع دائرة ن و قوس س ص على نقطة ي، فالكوكب صار من نقطة ز إلى نقطة م، ولتكن نقطة م أول نقطة يلقى عليها الكوكب مقنطرة ع س ت. فليس يلقى الكوكب شيئاً من قوس م ع لأن قوس م ع شرقية عن دائرة ن م. ونجيز على نقطة م قوساً زمانية، ولتقطع دائرة ن ص ر على نقطة ر؛ فتكون قوس م ر الزمان المحصل الذي ميله قوس ر ص، فتكون نسبة ص ي إلى ي م هي نسبة الزمان المحصل إلى الميل الذي يخصه. ونجيز على نقطة ف قوساً زمانية، ولتقطع دائرة ن م /

14 س ص: كـ ص – 17 ن ص ر: ن ص ف.

على نقطة ش، فتكون قوس ف ش شبيهة بقوس ص ي، وقوس ي م أعظم ٤١٧-و من قوس ش م، فتكون نسبة ف ش إلى ش م أعظم من نسبة ص ي إلى ي م. وكل نقطة من قوس م ف إذا أخرجنا منها قوساً زمانية تقطع قوس ش م، يتبين بالمثلثات الصغار كما تبين في الشكل الذي قبل هذا، أن نسبها إلى ما تفصله من قوس ش م كنسبة ف ش إلى ش م. فيتبين من ذلك أن كل قوس زمانية تخرج من نقطة من قوس ف م إلى قوس ش م، فإن نسبتها إلى ما تفصله من قوس ش م أعظم من نسبتها إلى ما يخصها من الميل. وإذا أجزنا على نقطة ن وعلى النقطة من قوس ف م دائرة عظيمة، ففصلت من قوس ص ي قوساً شبيهة بالقوس التي في داخل قوس ف م، وكانت القوس من الدائرة العظيمة التي تقع فيما بين قوسي ف م م ر مساوية للقوس التي انفصلت من قوس ش م، فيتبين من ذلك أن كل جزء من أجزاء زمان م ر، فإن ميله هو أعظم من القوس التي تقع بينه وبين قوس م ر. فليس يمر الكوكب بشيء من قوس م ف، بل يكون فوقها. وقد تبين أنه ليس يمر بقوس س م.

فليكن النقطة الثانية التي تمرّ بها الكوكب من مقنطرة ع س ت نقطة ث. فنقطة ث فيما بين دائرتي س ص د ه. ونجيز على نقطة ث قوساً زمانية، ولتكن ث خ. فالكوكب في حركته من نقطة ص إلى نقطة ث هو يقطع قوس خ س فيما بين نقطتي خ س. فيتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أن الكوكب ليس يلقى شيئاً من قوس ث س سوى نقطة ث. ويتبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا أيضاً أن الكوكب لا يلقى شيئاً من قوس ث ت، لأن الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقطتي ن ث إما أن تماس المقنطرة على نقطة ث أو تقطعها عليها. فيتبين بالطريق التي سلكناها في الشكل الذي قبل هذا أن الكوكب ليس يلقى قوس ت ث، فليس يلقى الكوكب مقنطرة ع س ت في الجهة الغربية إلا على نقطتي م ث.

وكذلك يتبين في كل مقنطرة هي أرفع من مقنطرة ز ح ط وأخفض من نقطة ص أن الكوكب لا يلقاها على أكثر من نقطتين.

8 ففصلت: فصلت – 9 ص ي: ص ر – 12 م ر: م – 14 س م: س د – 16 س ص: س ع – 22 التي: الذي – 25 ز ح ط: ح ط.

فكل كوكب من الكواكب السبعة إذا كان له ارتفاعات غربية متساوية، فليس يكون فيها أكثر من ارتفاعين متساويين، وكل ارتفاع يكون له أقل من ارتفاع نصف نهاره، فليس يكون له ارتفاع غربي مساوٍ له، وليس يكون له ارتفاع غربي مساوٍ لأعظم ارتفاعاته، وجميع ارتفاعاته المتساوية هي أعظم من ارتفاع نصف نهاره؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فقد تبين من جميع ما بيناه أن كل واحد من الكواكب السبعة قد يكون له في اليوم الواحد ارتفاعات شرقية متساوية، كل اثنين منها متساويان، وقد يكون له في اليوم الواحد ارتفاعات غربية متساوية، كل اثنين منها متساويان، / وأن ذلك يكون إذا كان انتصاف نهاره جنوبيًا عن قطب ٤١٧-ظ الأفق.

فأما إن كان موضع انتصاف نهاره شماليًا عن قطب الأفق، فربما كانت له ارتفاعات متساوية شرقية وغربية، وربما لم يكن له ذلك بحسب الآفاق.

⟨لو⟩ أما الآفاق التي تكون الكرة فيها منتصبة، فإنه قد يكون لكل واحد من الكواكب السبعة فيها ارتفاعات شرقية متساوية وارتفاعات غربية متساوية. وذلك أن وضع القسي الزمانية من مقنطرة نصف نهار الكوكب في الجهة الشمالية عن قطب الأفق وفي الجهة الجنوبية عن قطب الأفق وضع واحد، لأن الدوائر الزمانية تكون قائمة على سطح المقنطرة على زوايا قائمة. فكل قوس زمانية تكون فوق مقنطرة نصف النهار وتكون جنوبية عن قطب الأفق، فإن في الجهة الشمالية عن قطب الأفق قوسًا زمانية فوق مقنطرة نصف النهار مساوية لها وتفصل من دائرة نصف النهار – مما يلي نقطة انتصاف النهار – قوسًا مساوية للقوس من دائرة نصف النهار التي تفصلها القوس الزمانية الجنوبية مما يلي نقطة انتصاف النهار. فيلزم من ذلك أنه يوجد في الجهة الشمالية عن قطب الأفق قسي زمانية نسبتها إلى ما تفصله من دائرة نصف النهار مما يلي نقطة انتصاف نهار الكوكب أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب إلى ميل حركة الكوكب.

وإذا كان ذلك كذلك، فإنه يعرض في الجهة الشمالية عن قطب الأفق، إذا كان انتصاف نهار الكوكب شماليًا عن قطب الأفق، مثل ما يعرض في

11 قطب: أثبتها فوق السطر – 13 فيها: فيه – 19 قوسًا: قوس.

الجهة الجنوبية. فيكون للكوكب ارتفاعات شرقية متساوية وارتفاعات غربية متساوية في الآفاق التي تكون الكرة فيها منتصبة، كان انتصاف نهار الكوكب جنوبيًا عن قطب الأفق أو كان شماليًا عن قطب الأفق.

فأما في الآفاق التي تكون الكرة فيها مائلة إلى جهة الجنوب، فإن الكوكب إذا كان انتصاف نهاره شماليًا عن قطب الأفق، فإنه ربما كانت له ارتفاعات متساوية شرقية وغربية؛ ولكن تكون يسيرة ومتقاربة وذلك في المواضع القريبة من خط الاستواء التي ميل الكرة فيها إلى الجنوب ميلاً يسيراً. فأما الآفاق الكثيرة الميل، أعني التي تكون الكرة فيها مائلة ميل كثيراً، فليس يعرض فيها هذا المعنى. والعلة في ذلك أن الآفاق التي تكون الكرة فيها مائلة إلى الجنوب ميلاً كثيراً، تكون القسي الزمانية منها الجنوبية عن قطب الأفق مائلة إلى الجنوب. فتكون القسي من دائرة نصف النهار التي تفصلها القسي الزمانية صغاراً، فتكون نسب القسي الزمانية إليها نسباً عظيمة المقدار. فيحتمل أن يكون منها ما هو أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يقع للكوكب إلى ميل حركة الكوكب. والقسي الزمانية التي تكون شمالية عن قطب الأفق في الآفاق التي تكون الكرة فيها مائلة إلى الجنوب ميلاً كثيراً تكون مائلة إلى الجنوب أيضًا ميلاً كثيراً. فتكون القسي التي تفصلها هذه القسي الزمانية من دائرة نصف النهار مما يلي نقطة انتصاف نهار الكوكب الشمالية أعظم بكثير من القسي من دائرة نصف النهار التي يفصلها القسي الزمانية الجنوبية. ففي أكثر الأحوال ليس يكون نسب القسي الزمانية الشمالية إلى ما تفصلها من دائرة نصف النهار أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب إلى ميل حركة الكوكب، فلذلك قل ما يعرض تساوي الارتفاعات الشرقية وتساوي الارتفاعات الغربية في الآفاق الكثيرة الميل إلى الجنوب، إذا كان انتصاف نهار الكوكب شماليًا عن قطب الأفق؛ / وأعني «في الآفاق الكثيرة الميل» في هذا الموضع الآفاق التي ميلها ٤١٨-و مع كثرته أقل من أعظم ميل الكوكب عن دائرة معدل النهار. وهذه المواضع تكون انتصاف نهار الكوكب فيها تارة شماليًا عن قطب الأفق وتارة جنوبيًا

7 القريبة: الغربية.

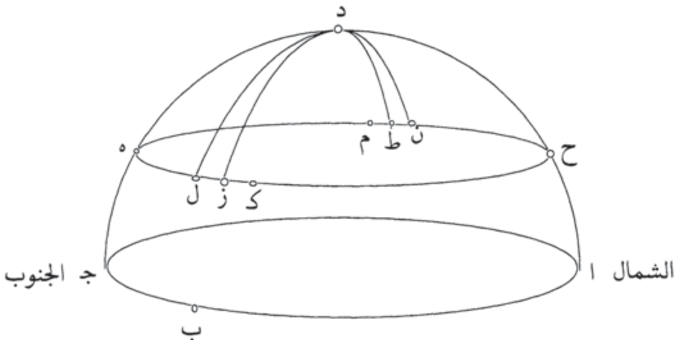
عن قطب الأفق. والمواضع التي يكون انتصاف نهار الكوكب فيها تارة شمالياً عن قطب الأفق وتارة جنوبياً عن قطب الأفق هي المواضع التي يكون ارتفاع القطب على آفاقها أقل من ميل فلك الكوكب المائل عن دائرة معدل النهار. فإن في هذه المواضع يكون بعض فلك الكوكب المائل يدور على دوائر زمانية شمالية عن قطب الأفق وبعض الفلك المائل يدور على دوائر زمانية جنوبية عن قطب الأفق. فأما المواضع التي ارتفاعات القطب فيها أكثر من ميل فلك الكوكب المائل، عن دائرة معدل النهار، فإن جميع فلك الكوكب المائل يدور على دوائر زمانية جميعها جنوبية عن قطب الأفق. فانتصاف نهار الكوكب في هذه المواضع يكون أبداً جنوبيًا عن قطب الأفق. فالآفاق التي يكون ارتفاع القطب عليها أعظم من ميل فلك الكوكب المائل، فإنه يكون للكوكب فيها أبداً ارتفاعات شرقية متساوية وارتفاعات غربية متساوية في الأوقات التي حددناها. والآفاق التي ارتفاع القطب عليها أقل من ميل فلك الكوكب المائل، فإنه يكون للكوكب فيها ارتفاعات شرقية متساوية وارتفاعات غربية متساوية إذا كان انتصاف نهاره جنوبياً عن قطب الأفق. وإذا كان انتصاف نهاره شمالياً عن قطب الأفق، فربما عرض له ذلك، إذا اتفقت له النسبة التي تتفق عند انتصاف النهار الجنوبي، وذلك في الآفاق القليلة الميل. وربما لم يعرض له هذا المعنى، وذلك في الآفاق الكثيرة الميل.

فأما إذا كان انتصاف نهار الكوكب على قطب الأفق بعينه، فليس يكون للكوكب في ذلك اليوم ارتفاعان شرقيان متساويان ولا ارتفاعان غربيان متساويان، كانت الكرة منتصبة أو كانت مائلة. ونبين ذلك بالبرهان.

فليكن الأفق دائرة $\overline{\text{ا ب جـ}}$، ودائرة نصف النهار $\overline{\text{ا د جـ}}$، وقطب الأفق نقطة $\overline{\text{د}}$، ولينته الكوكب عند انتصاف نهاره إلى نقطة $\overline{\text{د}}$.

فأقول: إن الكوكب في هذا اليوم لا يكون له ارتفاعان شرقيان متساويان ولا ارتفاعان غربيان متساويان، بل كل ارتفاع شرقي يكون له يكون واحداً فقط وكل ارتفاع غربي يكون له يكون واحداً فقط.

19 متساويان: متساويات.



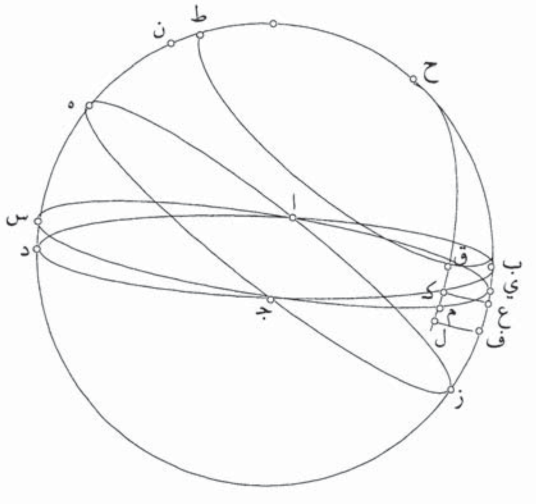
برهان ذلك: أنا نرسم مقنطرة من مقنطرة الارتفاع، ولتكن ه ز ح ط. ونجيز على نقطة د قوساً زمانية، فهي تقطع مقنطرة ه ز ح ط على نقطتين، إحداهما شرقية والأخرى غربية، كانت الكرة منتصبة أو كانت مائلة. إذا كان الكوكب طالعاً غارباً، فليقطع المقنطرة على نقطتي ز ط، ولتكن نقطة ز شرقية ونقطة ط غربية. فالكوكب في حركته من أفق الشرق إلى نقطة د هو يقطع مقنطرة ه ز ح ط. فإن كانت حركته من الشمال إلى الجنوب، فهو يلقى مقنطرة ه ز ح ط على نقطة شمالية عن دائرة د ز؛ فلتكن تلك النقطة نقطة ك. وإن كانت حركة الكوكب من الجنوب إلى الشمال، فهو يلقى المقنطرة على نقطة جنوبية عن دائرة د ز، فلتكن تلك النقطة نقطة ل. ثم إذا انحدر الكوكب للغروب، فإنه إن كانت حركته من الشمال إلى الجنوب، فهو يلقى المقنطرة على نقطة جنوبية عن دائرة د ط، فلتكن تلك النقطة نقطة م. وإن كانت حركته من الجنوب إلى الشمال، فهو يلقى المقنطرة على نقطة شمالية عن دائرة د ط، فلتكن تلك النقطة نقطة ن. فإن كان موضع الكوكب نقطة ك، فإنه يتبين مثل ما تبين في آخر الشكل لا أن الكوكب لا يلقى المقنطرة في الجهة الشرقية إلا على نقطة واحدة فقط. وإن كان موضع الكوكب نقطة ل، فإنه يتبين بمثل ما تبين / في آخر الشكل كط أن الكوكب ٤١٨-ظ
لا يلقى المقنطرة في الجهة الشرقية إلا على نقطة واحدة فقط. وإن كان موضع الكوكب في الجهة الغربية نقطة م، فإنه يتبين بمثل ما تبين في آخر ⟨الشكل⟩ كح أن الكوكب لا يلقى المقنطرة في الجهة الغربية إلا على نقطة

12 الجنوب إلى الشمال: الشمال إلى الجنوب.

واحدة فقط، وإن كان موضع الكوكب نقطة ن، فإنه يتبين بمثل ما تبين في آخر الشكل لد أن الكوكب لا يلقى المقنطرة في الجهة الغربية إلا على نقطة واحدة فقط.

وكذلك يتبين في كل مقنطرة من مقنطرات الارتفاع. فاليوم الذي يكون انتصاف نهار الكوكب فيه قطب الأفق، فليس يكون للكوكب في ذلك اليوم ارتفاعان شرقيان متساويان ولا ارتفاعان غربيان متساويان؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأيضًا، فإنا نقول: إن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا كان متحركًا من النهاية الشمالية من فلكه المائل إلى نقطة التقاطع بين فلكه المائل وبين دائرة معدل النهار، وكانت حركته زائدة، فإنه في كل يوم من الأيام التي بين طرفي حركته، يغرب في بعض المواضع من الأرض في أفق المشرق، ثم يطلع من أفق المشرق من بعد غروبه فيه. وليتبين ذلك بالبرهان.



فليكن دائرة ا ب جـ د أفقًا من الآفاق التي ارتفاع القطب عليها مساوٍ لتمام ‹ميل› فلك الكوكب عن دائرة معدل النهار، أعني مقدار ما يزيد به ربع دائرة على ميل فلك الكوكب. ولتكن دائرة ب ه د دائرة نصف النهار. ولتكن قوس ب جـ د النصف الشرقي من الأفق وقوس د ا ب النصف الغربي من الأفق. ولتكن قوس د ه نهاية ميل فلك الكوكب عن دائرة معدل النهار،

فدائرة معدل النهار تمرّ بنقطة ه، إذا كان ارتفاع القطب مساويًا لتمام الميل. فلتكن دائرة معدل النهار دائرة ا ه جـ ز، ولتكن نقطة ز هي التقاطع بين دائرة معدل النهار وبين دائرة نصف النهار، أعني التقاطع الشمالي. فيكون قوس ب ز مساوية لقوس د ه. وليكن قطب معدل النهار نقطة ح. وندير على قطب ح وببعد ح ب دائرة زمانية، ولتكن دائرة ب ق ط، فتكون قوس ط ه مساوية لقوس ب ز التي هي مساوية لميل فلك الكوكب. فتكون دائرة ب ق ط هي مدار نهاية ميل فلك الكوكب، التي هي لفلك الشمس مدار السرطان، ولكل واحد من الكواكب الباقية الدائرة النظيرة لمدار السرطان. فيكون أفق ا ب جـ د مماسًا لدائرة ب ق ط، فلأن دائرة ب ق ط إحدى المدارات التي يدور عليها الكوكب، فإن الكوكب يوم ‹أن› يصير إلى النهاية الشمالية من فلكه، فإنه يصير على نقطة من دائرة ب ق ط، ولتكن النقطة التي يصير عليها الكوكب من دائرة ب ق ط نقطة ب؛ والدائرة التي تمر بنقطة ب وبقطب معدل النهار هي دائرة ب ه د؛ ودائرة ب ه د هي دائرة نصف النهار لعدة من الآفاق، والدائرة العظيمة التي تماس دائرة ب ق ط على نقطة ب هي أفق من الآفاق التي دائرة نصف نهارها دائرة ب ه د. وإذا صار الكوكب على نهاية ميله عن دائرة معدل النهار، فهو / على محيط أفق من ٤١٩-و الآفاق التي دائرة نصف نهارها الدائرة التي تمرّ بمركز الكوكب وبقطب معدل النهار؛ ولتكن دائرة ا ب جـ د هي ذلك الأفق. ونخرج قوس كـ ع موازية لدائرة معدل النهار، حتى تكون نسبة قوس كـ ع إلى قوس ع ب أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة ط إلى ميل حركة الكوكب. فلأن نسبة كـ ع إلى ع ب أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب في حركته من نقطة ب إلى نقطة ط ‹إلى ميل حركة الكوكب›، تكون نسبة كـ ع إلى ع ب أعظم من نسبة زمان كـ ع إلى الميل الذي يخص زمان كـ ع، فالميل الذي يخص زمان كـ ع هو أعظم من قوس ب ع؛ فليكن الميل الذي يخص زمان كـ ع قوس ب ف. ونجيز على نقطة ف قوسًا زمانية، ولتكن ف ل. ونجيز على نقطتي ح كـ دائرة عظيمة، ولتقطع هذه الدائرة دائرة ف ل على نقطة ل، ولتقطع دائرة ب ق ط

على نقطة ق، فتكون قوس ب ق مساوية لزمان ع كـ وتكون قوس ق ل مساوية لقوس ب ف، فتكون قوس ق ل هي ميل زمان ب ق. فإذا مرّ الكوكب بنقطة ب ثم تحرك زمانًا مساويًا لقوس ب ق، فإنه يصير على نقطة ل. ونجعل قوس ب ي أصغر من قوس ع ف وأصغر من قوس ب ع. ونجيز على نقط ا جـ ي دائرة عظيمة، ولتكن دائرة ا ي جـ س؛ فهذه الدائرة تقطع قوس ه د، فلتقطعها على نقطة س، فتكون قوس س د مساوية لقوس ب ي؛ وهذه الدائرة، أعني دائرة ا ي جـ س، تقطع قوس كـ ع وتقطع قوس كـ ل؛ فلتقطع قوس كـ ل على نقطة م. فتكون نقطة م فيما بين نقطتي كـ ل. وذلك أن قوس كـ م هي ميل قوس كـ جـ عن دائرة ا ي جـ، وقوس ب ي هي نهاية ميل دائرة ا ب جـ عن دائرة ا ي جـ، فقوس كـ م أصغر من قوس ب ي؛ وقوس ب ي أصغر من قوس ع ف، فقوس كـ م أصغر بكثير من قوس ع ف. وقوس ع ف مساوية لقوس كـ ل، فقوس كـ م أصغر بكثير من قوس كـ ل. فنقطة م هي فيما بين نقطتي كـ ل، فنقطة ل هي تحت دائرة ا ي جـ س ونقطة ب فوق دائرة جـ ي. أما الموضع الذي أفقه دائرة ا ي جـ س يكون نقطة ب مرتفعة عن أفقه ونقطة ل تحت أفقه. والكوكب إذا تحرك من نقطة ب زمان ب ق، صار على نقطة ل، فالكوكب إذا مرّ بنقطة ب التي هي فوق أفق ا ي جـ س، ثم تحرك زمان ب ق، صار تحت أفق ا ي جـ س. وحركة الكوكب هي من جهة ب إلى جهة ق؛ فالكوكب إذن يغرب من نقطة من قوس ي م. وقوس ي جـ س هي النصف الشرقي من الأفق، فالكوكب إذن يغرب في أفق المشرق.

وأيضًا، فإن قوس ط ه هي ميل فلك الكوكب عن دائرة معدل النهار، فهي أعظم بكثير من الميل الذي يخص زمان نصف دورة يدورها الكوكب. فإذا تحرك الكوكب الزمان المساوي لقوس ب ق ط الذي هو نصف دورة، فإن ميل حركته يكون أقل بكثير من قوس ط ه؛ فليكن ميل حركة الكوكب في زمان ب ق ط قوس ط ن. فإذا تحرك الكوكب زمان ب ق ط، صار على نقطة ن. فلأن الكوكب يصير من نقطة ل إلى نقطة ن، ونقطة ل هي تحت الأفق ونقطة ن هي فوق الأفق، فالكوكب إذن يطلع من قوس م جـ، لأنه في هذا اليوم ليس ينتهي إلى دائرة معدل النهار. / فالكوكب إذا صار على النهاية ٤١٩-ظ

19 هي: هو.

الشمالية من فلكه المائل، فهو في أفق من الآفاق يغرب في أفق المشرق، ثم يطلع من أفق المشرق من بعد غروبه فيه.

وكذلك إن مرّ بنقطة من قوس ب ز قريبةً من نقطة ب، فإن حاله تكون هذه الحال بعينها. وذلك أنا إذا أجزنا على تلك النقطة أفقًا ودبرنا ذلك الأفق مثل ما دبرنا أفق ا ب جـ، حدثت صورة مثل الصورة التي بيناها. وكذلك تكون حال الكوكب في اليوم الثاني من نزوله ‹من› النهاية الشمالية: يمرّ بنقطة من دائرة نصف النهار فيما بين نقطتي ب ز. فإذا أجزنا على تلك النقطة دائرة زمانية، كانت نظيرة لدائرة ب ق ط. وإذا أجزنا على النقطة من دائرة نصف النهار، التي يمرّ بها الكوكب وتمر بها الدائرة الزمانية، دائرة عظيمة تماس الدائرة الزمانية، كانت نظيرة لدائرة ا ب جـ د. وإذا أجزنا على تلك الدائرة العظيمة قوسًا زمانية نظيرة لقوس كـ ع، نسبتها إلى القوس النظيرة لقوس ع ب أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب إلى ميل حركة الكوكب، وفرضنا نقطة نظيرة لنقطة ي وأجزنا عليها وعلى نقطتي ا جـ دائرة عظيمة، يتبين بمثل ما تبين في هذه الصورة أن الكوكب يغرب من النصف الشرقي من تلك الدائرة، ثم يطلع من ذلك النصف الشرقي بعينه؛ وتلك الدائرة التي تمرّ بالنقطة النظيرة لنقطة ي هي أفق لموضع من المواضع من الأرض على تصاريف الأحوال، ومن الآفاق الشمالية لأن القطب الشمالي مرتفع عليه بأقل من ربع دائرة، فالكوكب في ذلك الموضع من الأرض يغرب في أفق المشرق ويطلع من أفق المشرق. وكذلك كل نقطة من الدائرة الموازية لسطح معدل النهار التي تمرّ بذلك الموضع من الأرض، يغرب الكوكب في مشرق أفقها ويطلع منه، إذا كانت النقطة من المدار الذي هو أصغر مداراته مماسة لذلك الأفق.

فهذه ‹حركة كل كوكب من الكواكب› السبعة في كل يوم من الأيام التي يتحرك فيها الكوكب من النهاية الشمالية إلى دائرة معدل النهار إلى أن ينتهي إلى المدار القريب من معدل النهار، الذي يكون بينه وبين معدل النهار أقل من ميل نصف الدورة. ففي ذلك اليوم يكون انتصاف نهار الكوكب على نقطة جنوبية عن دائرة معدل النهار. فتكون تلك النقطة على دائرة ب ه د جنوبية عن نقطة ه. فإذا كانت جميع القوس النظيرة لقوس ه س أعظم من

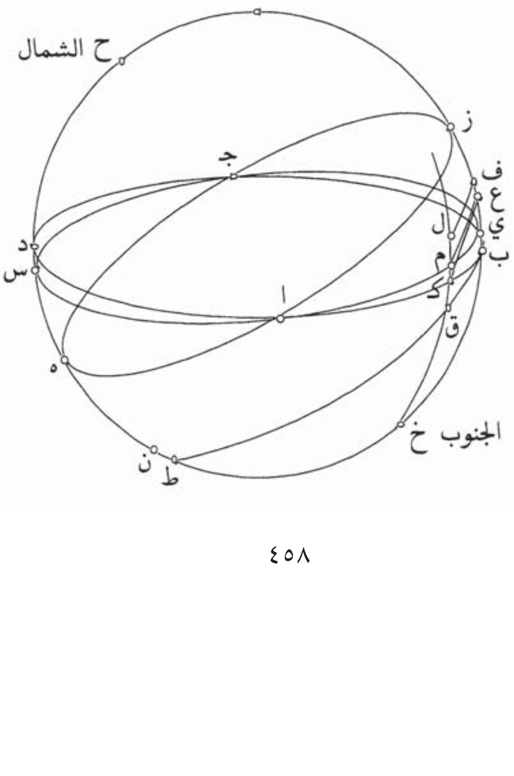
23 ‹حركة ... الكواكب›: مطموسة – 28 ه س: ط س.

الميل الذي يخص نصف الدورة، فإن الكوكب يطلع من الأفق الشرقي، لأن نقطة انتصاف نهاره تكون فوق الأفق، فيكون طلوعه إما من القوس النظيرة لقوس م جـ وإما من القوس النظيرة لقوس جـ س.

فقد تبين مما بيناه أن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا كانت حركته من النهاية الشمالية إلى دائرة معدل النهار وكانت حركته زائدة، فإنه في كل يوم من الأيام الذي بين طرفي هذه الحركة، يغرب في بعض المواضع / الشمالية من الأرض في أفق المشرق، ثم يطلع من أفق المشرق؛ ٤٢٠-و
وذلك ما أردنا أن نبين.

وأيضًا، فإنا نقول: إن كل كوكب من الكواكب السبعة إذا كان متحركًا من النهاية الجنوبية إلى نقطة التقاطع بين فلكه المائل وبين دائرة معدل النهار، وكانت حركته زائدة، فإنه في كل يوم من الأيام التي بين طرفي حركته، يطلع في بعض المواضع من الأرض من أفق المغرب ثم يغرب في أفق المغرب من بعد طلوعه منه. ولنبين ذلك بالبرهان.

فليكن دائرة ا ب جـ د أفقًا من الآفاق التي ارتفاع القطب عليها مساوٍ لتمام ميل فلك الكوكب عن دائرة معدل النهار. وليكن دائرة د ه ب ز دائرة نصف النهار، وليكن قوس د ه ب النصف الذي تحت أفق ا ب جـ د، ولتكن قوس ب ا د النصف الغربي من الأفق، وليكن قطب معدل النهار الجنوبي



نقطة خ، فتكون قوس خ ب هي تمام ميل فلك الكوكب، ثم إن قوس خ ب هي انحطاط القطب عن الأفق. وليكن قوس ب ز ميل فلك الكوكب، فيكون نقطة ز على دائرة معدل النهار. ونرسم على نقطة ز دائرة معدل النهار، ولتكن دائرة ا ز جـ ه. ونخرج قوس كـ ع حتى يكون نسبة قوس كـ ع إلى قوس ع ب أعظم من كل نسبة لكل زمان محصل يكون للكوكب في حركته من نقطة ب إلى تمام نصف دائرة إلى ميل حركة الكوكب مما يلي مبدأ الحركة. ونجعل نقطة خ قطبًا وببعد خ ب ندير دائرة زمانية، ولتكن دائرة ب ق ط، فهذه الدائرة هي مدار النهاية الجنوبية التي هي في فلك الشمس مدار الجدي وفي أفلاك الكواكب الباقية الدائرة النظيرة لمدار الجدي. ونجيز على نقطتي خ كـ دائرة عظيمة، فهي تقطع دائرة ب ق ط، فلتقطعها على نقطة ق. فتكون قوس ب ق شبيهة بقوس ع كـ ويكون الميل الذي يخص زمان ب ق أعظم من قوس ب ع، فليكن الميل الذي يخص زمان ب ق قوس ب ف. ونجيز على نقطة ف قوسًا زمانية، ولتكن ف ل؛ ولتقطع دائرة خ كـ على نقطة ل. ونجعل قوس ب ي أصغر من قوس ع ف وأصغر من قوس ب ع. ونجيز على نقطتي ا جـ وعلى نقطة ي دائرة عظيمة ولتكن دائرة ا ي جـ س؛ ولتقطع دائرة خ كـ ل على نقطة م. فيتبين أن نقطة م فيما بين نقطتي كـ ل كما تبين في الشكل الذي قبل هذا. فتكون نقطة ل فوق دائرة ا ي جـ، ونقطة ب هي تحت دائرة ا ي جـ، وقوس ق ل هي ميل زمان ب ق. فإذا مرّ الكوكب بنقطة ب ثم تحرك زمان ب ق، فهو يصير على نقطة ل؛ ونقطة كـ تحت دائرة ا ي جـ ونقطة ل / فوق دائرة ا ي جـ. فإذا تحرك ٤٢٠-ظ
الكوكب زمان ب ق فهو يقطع قوس ي م؛ وقوس ي ا س هو النصف الغربي؛ فالموضع الذي أفقه دائرة ا ي جـ س إذا صار الكوكب في النهاية الجنوبية من فلكه، فإنه يطلع عليه من أفق المغرب من قوس ي م س. وأيضًا، فإن قوس ط خ هي ميل فلك الكوكب لأنها مساوية لقوس ب ز، فقوس ط خ هي أعظم بكثير من الميل الذي يخص نصف دورة واحدة. وليكن الميل الذي يخص نصف دورة واحدة قوس ط ن. فالكوكب إذا تحرك زمان ب ق ط صار على نقطة ن، فالكوكب يصير من نقطة ل إلى نقطة ن؛ ونقطة ل فوق الأفق ونقطة

20 كـ: ث – 24 ط خ (الأولى والثانية): ط ه.

ن تحت الأفق، فالكوكب يقطع الأفق ويصير تحت الأفق، فالكوكب يغرب من قوس م ا، لأنه ليس ينتهي في هذا اليوم إلى دائرة معدل النهار، فالكوكب في يوم نزوله النهاية الجنوبية يطلع من مغرب هذا الأفق ويغرب في مغرب هذا الأفق.

وكذلك يطلع من مغرب كل أفق من آفاق النقط التي على الدائرة الموازية لمعدل النهار التي على سطح الأرض التي تمرّ بالموضع الأول من الأرض إذا كانت النقطة من المدار الذي هو أصغر مدارات الكوكب مماسة لذلك الأفق. وهذه الآفاق هي الآفاق بعينها التي فرضناها في الشكل الذي قبل هذا الشكل.

ونبين كما تبين في الشكل الذي قبل هذا الشكل أن الكوكب في كل يوم من الأيام التي بين طرفي حركته من النهاية الجنوبية إلى دائرة معدل النهار، يطلع من مغارب آفاق مواضع شمالية ويغرب من مغارب تلك الآفاق؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فقد تبين من جميع ما بيناه في هذه المقالة هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة، وتبين أن كل كوكب من الكواكب السبعة قد يكون له في بعض الأوقات في اليوم الواحد في جهة المشرق ارتفاعات متساوية في جميع المواضع من الأرض التي تنصّف فيها نهار الكوكب، وأنه في بعض الأوقات قد يكون له في اليوم الواحد في جهة المغرب ارتفاعات متساوية في جميع المواضع من الأرض التي تنصّف فيها نهار الكوكب، وأنه في بعض المواضع من الأرض في بعض الأوقات قد يغرب من أفق المشرق ويطلع في يومه من أفق المشرق وأنه في بعض الأوقات في ذلك الموضع بعينه من الأرض، قد يطلع من أفق المغرب ويغرب في يومه من أفق المغرب؛ وذلك ما أردنا <أن نبين>.

تمت.

21 من (الأولى): مطموسة.

الفصل الثالث

"في ما يعرض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب":
المؤلَّف الذي مهَّد لمؤلَّف "هيئة حركات الكواكب السبعة"

١- مقدِّمة

يُكرِّس ابن الهيثم القسم الأهمّ من مؤلَّفه " في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة" لدراسة تغيُّر ارتفاع الكوكب بين شروقه وغروبه. لقد أصبح، مع ابن الهيثم، ارتفاعُ الكوكب خلال حركته المرصودة أحد أهمّ مواضيع البحث في علم الفلك. ينبغي إذاً إعادة تشكيل تطوُّر بحثه في هذا الموضوع، ولو جزئياً، ولا سِيَّما أنّه قد أعلن في مُقدّمة "هيئة الحركات" أنّه كان قد قام بتفحُّص هذه المسألة في كتاباتٍ أصبحت نتائجها ملغاة بعد ذلك[١]؛ فهو يقول إنّه قد كتب حول الارتفاع والمسائل المتعلّقة به "على طريقة جمهور أصحاب التعاليم وعلى الأصول المتعارفة". وهذا يعني أنّه قد عالج هذا الموضوع في الماضي وفقاً للطريقة الفلكية التقليدية وتبعاً لقوانينها، وأنّ هذه الكتابات أصبحت ملغاة فأعاد كتابتها وفقاً لطريقة جديدة ومبادئ جديدة ضمن مؤلَّفه"هيئة الحركات".

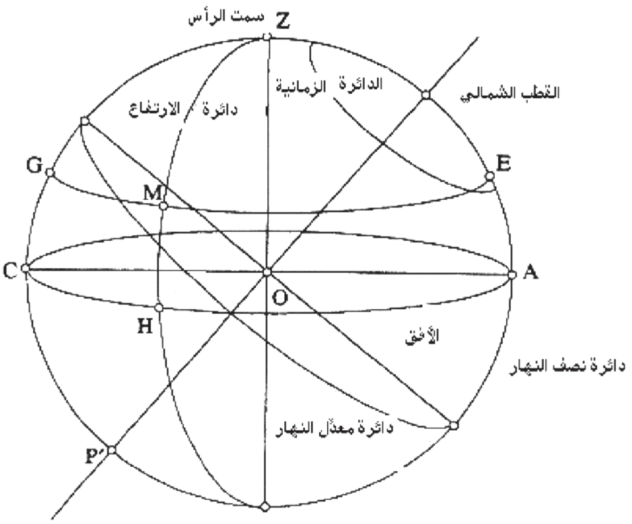
وهكذا يجد المؤرِّخ نفسه في وضع مُفَضَّل، نادراً ما يلقاه في تاريخ العلوم الرياضية المكتوبة بالعربية. يُمكن للمؤرِّخ، بالفعل، أن يقيس المسافةَ التي قطعها ابن الهيثم، بداية من كتاباته الملغاة حتّى "هيئة الحركات"، وأن يُقدِّر بشكل أفضل التجديد في هذا المؤلّف. ويُمكن للمؤرِّخ، بالإضافة إلى ذلك، ترتيب الكتابات المختلفة لابن الهيثم. ولكن ابن الهيثم لا يُعطي أيَّ عنوان مُعيَّن من كتاباته القديمة، بل يكتفي بالكلام عن "كتاباتنا". ولكننا نعرف من قائمة أعماله التي أوردها المفهرسون القدامى[٢] أنّه كرَّس مؤلّفين على الأقلّ لدراسة الارتفاع. لا يوجَد، من مؤلّفه الأوَّل "في نسبة الأقواس الزمانية إلى ارتفاعاتها"، أي نسخة معروفة. أما

[١] انظر ص ٢٨٦ وما بعدها.
[٢] انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٤٧٨-٥٠١.

عنوان المؤلّف الثاني فهو "في ما يعرض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب" (لِنُسَمِّه من الآن فصاعداً "في اختلاف الارتفاعات"). ولقد وصل إلينا في مخطوطة وحيدة قراءتُها صعبة جدّاً. وهذه الوثيقة بالغة الأهميّة، إذ إنّها الشهادة الوحيدة التي تسمح بمتابعة تطوُّر أفكار ابن الهيثم حول موضوع الارتفاع.

ولكنَ ابن الهيثم قد حرَّر هذين المؤلَّفين قبل سنة ١٠٣٨، وفقاً لما نعرفه من قوائم المفهرسين القدامى. وهذا ما يؤكِّد، لو دعت الحاجة، أنَّ ابن الهيثم ، في الوقت الذي كان يكتب فيه مؤلّفاته الناقدة لفلكيات بطلميوس، كان يتابع أبحاثه المبتكَرة في حركة الالتفاف وحركة القمر وفي ارتفاع الحركات المرصودة.

لنتناول الآن هذا المؤلّف "في اختلاف الارتفاعات". إنّه لا يتضمَّن أيَّ تمهيد يشرح فيه ابن الهيثم هدفه ومشروعه، بل يبدأ مباشرة بالتعاريف. ويُتبِع هذه التعاريف بسبع قضايا-مُقدِّمات- في الهندسة المستوية يستخدمها كلّها بعد ذلك. وتتبع هذه المقدّمات سبعُ قضايا مكرَّسة لدراسة الارتفاع. وهذه القضايا مرتبطة فيما بينها ومُبرهنة بواسطة مُقدّمات. والنتائج المنطقيّة لهذا المنهج جاءت هنا لتعطي بنية متماسكة لهذا المؤلّف ولتؤكّد أنْ لا شيء قد اندسَّ في تحريره الأصليَّ. ولا ينقص شيء في هذه التحرير الأصليّ باستثناء تمهيد يشرح فيه ابن الهيثم كعادته الغرض من تأليف الكتاب. ولكن ليس هناك حجَّة إيجابية تسمح بتأكيد أنّ مثل هذا التمهيد قد فُقِد. كلُّ التعاريف الواردة في بداية المؤلّف تخصّ مكاناً معلوماً على الكرة الأرضية، مع العلم أنَّ نصف قطر هذه الكرة لا يُعتَدُّ به أمام نصف قطر الكرة السماويّة. ويُفترَض، بالإضافة إلى ذلك، أنّ المكان المعلوم هو مركز الكرة السماوية؛ كما يُرفَق بكل مكان أفقٌ ونقطة Z على الكرة السماوية تكون سمت الرأس.



الشكل ١

إنَّ المستويين المرجعيّين، في كلّ هذه الدراسة الواردة في هذا المؤلّف، هما الأفق CA ومستوي نصف النهار للمكان. ولا يحتاج ابن الهيثم في البحث الذي يقوم به إلى الأخذ بنظام للإحداثيات. ولم يكن الأمر كذلك في مؤلّفه "هيئة الحركات"، حيث يستخدِم عدة أنظمة للإحداثيات، وخاصّة نظام الإحداثيات الاستوائية. وهذا الاختلاف مهمٌّ، وسوف نحفظه الآن في ذاكرتنا.

إنَّ عدداً من التعاريف التي يُعطيها ابن الهيثم في بداية هذا المؤلّف يخصُّ مفهوم الارتفاع. يتناول ابن الهيثم أي نقطة M على الكرة السماوية. ويُرفق بهذه النقطة الدائرة العظمى MZ للكرة السماوية، وهي دائرة الارتفاع. تلتقي هذه الدائرة بالأفق في النقطة H؛ والقوس $\widehat{MH}$ تُسمى قوس الارتفاع، أو ببساطة ارتفاع النقطة M. يقطع المستويُ الأفقي المارّ بالنقطة M دائرةَ نصف النهار على نقطتين G وَ E بحيث يكون $\widehat{HM} = \widehat{CG} = \widehat{AE}$ (انظر القضية ٨). فيكون ارتفاع النقطة M مساوياً للقوس $\widehat{CG}$ أو للقوس $\widehat{AE}$. وارتفاع قوس ما هو الفرق بين ارتفاعي طرفيه.

يتبع هذه التعاريف سبع قضايا في الهندسة المستوية. يتعلّق الأمر بقضايا حول الخواصّ الهندسية للدائرة، وهي الخواصّ التي تسمح لابن الهيثم بأن يتحوَّل من معادلة بين المساحات إلى متباينة أو معادلة للأقواس. فيكون واضحاً أنَّ ابن الهيثم قد أثبت هذه القضايا بهدف المقارنة بين الارتفاعات. سوف نشرح هذه القضايا لاحقاً؛ ولكن لنتوقّف، على سبيل المثال،

على القضية الخامسة. يبرهِن ابن الهيثم أنّه، إذا قُسم وترُ BD في دائرة، على النقطتين K وَ E بحيث يكون $KB \cdot KD = \frac{1}{4} BD \cdot DE$، وإذا أخرجنا خطّين متوازيين MK وَ CE بحيث تكون الزاوية $\widehat{CEB}$ أصغر من زاوية قائمة (نأخذ M وَ C على القوس $\widehat{BD}$ الصغرى)، فيكون حينئذ $\widehat{MC} < \widehat{BM}$.

يعود ابن الهيثم، بعد أن يُثبت هذه المقدّمات، إلى الموضوع الخاصّ بهذا المؤلّف في تسع قضايا. يتناول ابن الهيثم موضعين لنقطة متحرِّكة على دائرة زمانية. يُحَدِّد قياسُ القوس الذي يفصل بين هذين الموضعين الزمنَ الذي تستغرِقه النقطة المُتحرِّكة لكي تجتاز هذه القوس، لأنّ الحركة دائرية مستوية. يَستخدم ابن الهيثم، بداية من القضية ٩، عبارة "الزمن" لكي يدُلَّ على هذه القوس، كما يستخدم عبارة "ارتفاع الزمن" ليدلّ على ارتفاع هذه القوس . وكنا قد لاحظنا أنّه قاس الزمنَ أيضاً، في مؤلّفه "هيئة الحركات"، بقوس، وهذا ما سمح له بتطبيق نظرية النسَب.

يتناول ابن الهيثم نقطة مُتحرِّكة ترسم قوساً، على دائرةٍ زمانية، بحيث يكون وسط هذه القوس معلوماً. ويُقارن الارتفاع الخاصَّ بالنصف الأوّل لهذا المسار، بالارتفاع الخاصَّ بالنصف الثاني منه. ويقوم بهذه الدراسة لأمكنة مُختلفة. وهو يدرس في البداية حالة المكان الذي تكون فيه الكرة السماوية منتصبة، ثمّ حالة المكان الذي تكون فيه الكرة السماوية مائلة. ويُميِّز بين الإمكانيات المختلفة لوضع الدائرة الزمانية: الدائرة الزمانية التي تقطع الأفق والدائرة الزمانية التي توجد كلها فوق الأفق والحالة الخاصّة للدائرة الزمانية التي تمرُّ بسمت الرأس.

وتصبح عروض القضايا، بعد القضيّة العاشرة للمؤلّف، من النوع السينماتيكي: يُعتبَر الكوكبُ نقطة متحرِّكة على الكرة السماوية. يدرس ابن الهيثم حينئذ تزايدات الارتفاع الموافقة لتزايدات متساوية للزمن. والهدف من دراسته، بعبارة أخرى، هو دراسة تقعُّر الارتفاع كدالة للزمن. ولكن ليس هناك دراسة متّصلة لهذا التغيُّر. لا يتناول ابن الهيثم هنا سوى ثلاث نقاط: نقطة الأصل والنقطة الموجودة على دائرة نصف النهار ونقطة منتصَف القوس المعني بالأمر. وهو لم يكتفِ في مؤلّفه "هيئة الحركات" بهذه الدراسة النقطيّة، بل قرّر القيام بدراسة متّصلة للتغيُّرات.

ليس هذا هو الفارق الوحيد بين "اختلاف الارتفاعات" و"هيئة الحركات". لِنذكر، بالإضافة إلى الفوارق التي أشرنا إليها، فارقاً لا يقلُّ أهمية عن الفارق الأخير. لقد لاحظنا أنَّ ابن الهيثم قد درس، في المؤلّف الأوَّل، الحركة المستوية لنقطة ترسُم دائرة زمانيَّة. ولكنّه، بعكس ذلك، يدرُس في "هيئة الحركات" الحركةَ الظاهرة لكوكب مُتَحَيِّرٍ، وهي الحركة المركَّبة من ثلاث حركات دائريّة مُستوية. وهذه الحركة الظاهرة لا تحدُث إذاً وفقاً لدائرة زمانية.

إنَّ هذه الدراسة المتّصلة لتغيُرات هذه الحركة الظاهرة تتطلّب وسائل رياضية تتجاوز كثيراً وسائل الهندسة المُستوية المُستَخدَمة في "اختلاف الارتفاعات". لنذكر مثلاً دراسة تغيُّر العبارات المثلَّثاتية مثل $\frac{\sin x}{x}$ وَ $\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ وَ $\frac{\sin kx}{\sin x}$.

إنَّ المقارنة بين هذين المؤَلّفين تُظهر من دون التباس خطوط تطوُّر بحث ابن الهيثم في الارتفاع وبطريقة غير مباشرة في علم الفلك أيضاً. فالحركة المُتناوَلة لم تَعُد حركة نقطة متحرِّكة وفقاً لدائرة زمانية، بل أصبحت الحركة الظاهرة لكوكب؛ ودراسة تغيُّرات الارتفاع لم تعد نُقطيّة بل أصبحت متّصلة؛ والرياضيات المستخدَمة لم تعد تتعلّق بالهندسة المستوية، بل أصبحت تتعلّق بهندسة اللامتناهيات في الصغر.

٢- الشرح الرياضي

سوف نُرجِع القارئ، في هذا الشرح، إلى القضايا نفسها وإلى الأشكال المرسومة. وسوف نجتهد هنا فقط بإظهار الأفكار التي تحتويها القضايا والصعوبات التي قد نلقاها. وهذا يعني أننا لا يُمكن أن نفهم هذا الشرح من دون أن تكون أمام أعيننا القضايا المُبَرهَنة هنا. ولقد رأينا لتجنّب الإعادة - نظراً إلى بساطة هذه القضايا- أن لا نقوم بعرضها بالتفصيل.

القضية١- إنّ فكرة البرهان هي التالية: التشابهُ الذي يُحَوِّل الشكل ABC إلى الشكل DEG، يُحَوِّل H إلى I، لأنّ $\frac{DI}{IG}=\frac{AH}{HC}$. يكون معنا: $\widehat{AHB} > \widehat{DIE}$، فتتحوَّل إذاً B بهذا التشابه إلى E. فينتج عن ذلك أنَّ: $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{EG}}=\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$.

القضية ٢ - يُفترَض، في هذه القضية المهمّة في هذا المؤلّف، أنَّ $BG \cdot GD = \frac{1}{4} BD \cdot DE$؛ ونريد أن نستنتج أنّ $\widehat{BI} = \widehat{HC}$.

يكون معنا $AH^2 = 4GH^2 = 4BG \cdot GD = BD \cdot BE = BC^2$، فينتج من ذلك أنَّ $AH = BC$ وَ $\widehat{BH} = \widehat{AB} = \widehat{HC}$.

وإذا كانت معنا هذه المعادلات، وفقاً للقضية العكسية، نستنتج عندئذ أنّ $\widehat{AH} = \widehat{BC}$ فيكون $BC = AH$ وَ $4BG \cdot GD = 4GH^2 = AH^2 = BD \cdot BE$.

يتعلّق الأمر إذاً بتحويل معادلة بين قوسين إلى معادلة مكافئة لها بين مساحتين؛ وكلُّ مساحة من هاتين المساحتين تنتج من ضرب طولَي خطّين مقطوعين على القطر بأطراف الأقواس المعنيَّة بالأمر.

القضية ٣ - الفرضيّات في هذه القضية هي نفس فرضيّات القضية السابقة، باستثناء أنّ BD هو الآن وترٌ أصغر من قطر؛ والخلاصة حينئذ هي أنّ لدينا المتباينة $\widehat{AP} > \widehat{PB}$، في حين أنّه كانت لدينا معادلة في الحالة السابقة.

نَرجِع خلال البرهان إلى القضية السابقة، وذلك برسم نصف دائرة ذات قطر BD. يكون معنا إذاً $\widehat{KI} = \widehat{IB}$ ونستخرِج القوسين $\widehat{AP}$ وَ $\widehat{PB}$ من القوسين $\widehat{KI}$ وَ $\widehat{IB}$ بإسقاط القوسِ $\widehat{BIK}$ على القوس $\widehat{BPA}$ (عموديّاً على BD).

ونُدخل، ببناء مُساعد جديد، القوسَ $\widehat{BLK}$ المشابهة للقوس $\widehat{BPA}$، فينبغي إثبات المتباينة $\widehat{KL} > \widehat{LB}$، التي تعني أنّ L بين Q وَ B. نُثبت أوّلاً أنّ O، على القوس $\widehat{KLB}$، هي بين Q وَ B، ثمّ أنّ L هي بين O وَ B.

يكفي لأجل ذلك أن نرى أنّ الزاوية $\widehat{BHI}$ منفرجة، لأنّ الزاوية $\widehat{BHL}$ قائمة. فنرى إذاً أنّ القوس $\widehat{BLK}$ مُحَوَّلة من القوس $\widehat{BIK}$ ، بالتحويلة المر وبة من التحويلة السابقة ومن التشابه ذي المركز B. فيعود برهان المتباينة $\widehat{PB} > \widehat{AP}$ إلى برهان $\widehat{LB} > \widehat{KL}$.

إنَّ أهمَّ قسم من استدلال ابن الهيثم في هذا البرهان يَنُصُّ على استخدام هذه التحويلة للحصول على قوسين من دائرة لهما نفس الوتر KB.

القضية ٤- هذه القضية مشابهة للقضية السابقة ولكنَّ الزاويتين $\widehat{HGD}$ وَ $\widehat{AED}$ حادَّتان بدلاً من أن تكونا قائمتين.

والبرهان مُختلِفٌ عن برهان القضية السابقة. يُستخدَم هنا القطرُ KB، للنقطة B، العموديُّ على الخطَّين MH وَ LA.

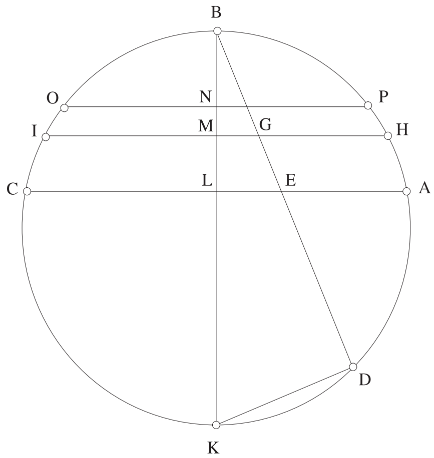
ونُثبِت أنَّ $4HG \cdot GI = KB \cdot BL$، مُستَخدِمين الفرضيات وميزةَ قوَّة النقطة G بالنسبة إلى الدائرة. ولكننا نعرف أنّ $MI.\ HM > GI\ .HG$ ، فيكون $BM \cdot MK > HG \cdot GI$ (قوَّة النقطة M). ونتّخذ عندئذ النقطة N على BM بحيث يكون:

$$GI\ .\ HG = \frac{1}{4} KB\ .BL = NB\ .KN.$$

يكون معنا $\widehat{BP} = \widehat{PA}$، وفقاً للقضية ٢، وبما أنّ H بين P وَ A، يكون معنا $\widehat{BH} > \widehat{HA}$.

ملاحظة: يُعطي ابن الهيثم في صيغة هذه القضية الشرط التالي: الوتر CA يفصل قوساً لا تكون أكبر من نصف دائرة. وهو لا يُعيد الكلام عن هذا الشرط ضمن المثال. لندرس هذا الشرط بالتفصيل.

يقطع الوترُ BD الخطَّ CA على النقطة E، والنقطة G مأخوذة على EB بحيث يكون: $\frac{1}{4} DB \cdot BE = DG \cdot GB$.



الشكل ٢

نُسقِط النقاط B، G وَ E، على القطر KB، فتقع حسب الترتيب على النقاط B، M وَ L؛ فيكون معنا $KM \cdot MB = \frac{1}{4} KB \cdot BL$.

إذا كان الخطّ PN موازياً للخطّ AC، نحن نعرف أنَّ $\widehat{BP} = \widehat{PA}$، عندما تكون N بين B وَ L (القضية ٢). لنُخرِج الخطّ HM الموازيَ للخطّ AC؛ يُمكننا أن نستخلص أنَّ $\widehat{BH} > \widehat{HA}$، إذا علمنا أنّ N بين B وَ M.

ليكن $BK = d$ قطرَ الدائرة وَ ليكن $BL = a$ ؛ فتكون $BN = x$ ، إحداثية N على المحور BK، محدَّدة بالمعادلة:

$$\frac{1}{4} ad = x (d - x) \quad (١)$$

يكون لهذه المعادلة جذران بين 0 وَ d.

ويكون معنا: $a (\frac{3}{4} d - a) = a(d - a) - \frac{1}{4} ad$ ، فنرى أنَّ a بين الجذرين إذا كان $a \leq \frac{3}{4} d$، وخارج فُسحة الجذرين إذا كان $\frac{3}{4} d < a$. وهكذا عندما يكون $a \leq \frac{3}{4} d$ ، فإنَّ الجذرَ الصغير وحده يُعطي N بين B وَ L ؛ ولكن عندما يكون $\frac{3}{4} d < a$ ، فإنَّ كلاً من هذين الجذرين يعطي هذه النتيجة.

لتكن $BM = y$ إحداثية M؛ فتُكتب الفرضية $\frac{1}{4} KB < KM \cdot MB$ على الشكل التالي: $y (d - y) - \frac{1}{4} ad > 0$. وهكذا تكون y بين جذريْ المعادلة (١) ، ويُمكن إذاً أن نختار دائماً

نقطة N (المحدَّدة بالجذر الصغير للمعادلة (١)) بين B وَ M لكي نُنهيَ الاستدلال؛ وبذلك نرى أنّ الشرطَ الوارد في الصيغة غير ضروري.

لنلاحظ أنّ الشرطَ " N بين B وَ L " يتضمَّن الشرط " N بين B وَ M "، وذلك في الحالة التي يكون فيها $a \leq \frac{3}{4} d$ ، أيْ حيث تفصل CA قوساً أكبر من ثلثيْ دائرة.

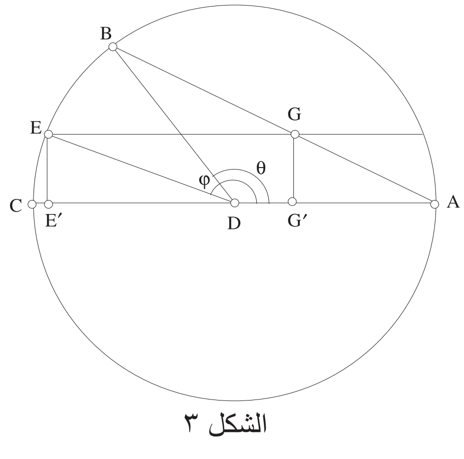
يُمكن أن نتساءل لماذا أعطى ابن الهيثم هذا الشرط في صيغة القضية ولم يُعِد ذكرَه ضمن المثال؛ فهل كان بحاجة إليه في بعض القضايا اللاحقة؟

القضية ٥- لقد أشرنا سابقاً إلى هذه القضية. يكفي أن نلاحظ هنا أنَّ المُعطيات والفرضيات مشابهة لتلك الخاصَّة بالقضية السابقة، مع الفارق الوحيد وهو أنّ اتجاه الإسقاط EC لم يعُد عمودياً على قطر النقطة B.

والبرهان يهدف أيضاً إلى الرجوع إلى الحالة التي تكون فيها DB قطراً لدائرة؛ ولكنّ الدائرة هذه المرّة مُختلفة عن الدائرة المعطاة والخطّ DB لا يتغيَّر.

القضية ٦- تثبت هذه القضية أنّ الشرط $AG < AD$ يتضمَّن $\overset{\frown}{BE} < \overset{\frown}{CE}$، وأنّ $AG = AD$ تتضمَّن $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$ وأنَّ $AG > AD$ تتضمَّن $\overset{\frown}{BE} > \overset{\frown}{CE}$.

يتعلّق الأمر إذاً بصيغة حول تغيُّر النسبة $\frac{\overset{\frown}{CE}}{\overset{\frown}{BE}}$ وفقاً للنسبة $\frac{AG}{AD}$، حيث يكون CA قطرَ الدائرة، وتكون B على نصف الدائرة العليا مع $AB > BC$ ، وتكون G على AB وتكون EG موازية لـِ CA.



الشكل ٣

لنُعْطِ برهاناً تحليليّاً لهذه القضية: ليكن $\widehat{ADB} = \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ وَ $\widehat{ADE} = \varphi \in [\theta, \pi]$. ليكن $AD = r$ نصف قطر الدائرة، ولتكن $GG' = EE' = h$ المسافة بين EG وَ CA. يكون معنا: $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$، $\widehat{EDC} = \pi - \varphi$، وَ $\widehat{BDE} = \varphi - \theta$ ؛ وهكذا يكون $r \sin\varphi = AG \cos\frac{\theta}{2} = h$.

إنّ المتباينة $\widehat{CE} < \widehat{EB}$ تعادل $\pi - \varphi < \varphi - \theta$، أيْ $\pi + \theta < 2\varphi$. ولكن $\pi + \theta$ وَ 2φ ينتميان إلى الفسحة $[\pi, 2\pi]$ حيث يكون تمام الجيب دالّة تزايدية، فتكون المتباينة $\widehat{CE} < \widehat{EB}$ معادلة لِـ $-\cos\theta < \cos 2\varphi$، أيْ للمتباينة:

$$\frac{2h^2}{r^2 AG^2}\left(r^2 - AG^2\right) = 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\varphi\right) = \cos\theta + \cos 2\varphi > 0،$$

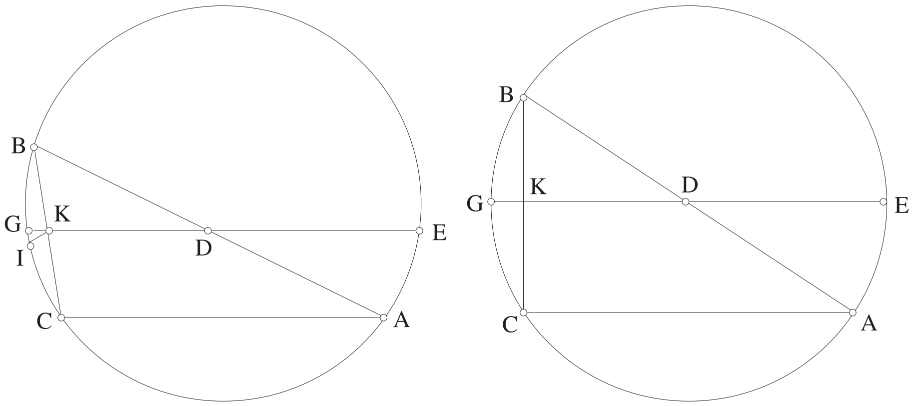
وهذا ما يعادل أيضاً $r > AG$. وكذلك إنّ $\widehat{CE} = \widehat{EB}$ تُعادل $r = G$ ، وَ $\widehat{CE} > \widehat{EB}$ تُعادل $r < AG$.

لنلاحظ أيضاً أنّه إذا كان $\lambda = \frac{\widehat{CE}}{\widehat{EB}} = \frac{\pi - \varphi}{\varphi - \theta}$، فإنّ $\varphi = \frac{\lambda\theta + \pi}{\lambda + 1}$ تكون دالّة تناقصيّة للمتغيّر λ لأنّ $\theta < \pi$؛ وبما أنّ $sin\ \varphi$ دالّة تناقصيّة للمتغيّر φ في الفسحة $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$، فإننا نرى أنّ $\frac{AG}{r} = \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}$ دالّة تزايدية للمتغيّر λ (على أن تكون θ ثابتة). وهكذا تتغيَّر $\lambda = \frac{\widehat{CE}}{\widehat{EB}}$ وَ $\frac{AG}{r} = \frac{AG}{AD}$ بنفس الاتّجاه. إذا كان $\lambda = 1$، يكون $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ وَ $\frac{AG}{r} = 1$، فيكون إذاً: $\lambda < 1 \Leftrightarrow AG < r$ وَ $\lambda > 1 \Leftrightarrow AG > r$.

القضية ٧- القوس ABC لا يكون أكبر من نصف دائرة، في هذه القضية؛ والوتر EG الموازي للخطّ CA يقطع AB وَ BC في وسطيْهما D وَ K، وفقاً للترتيب. يكون معنا حينئذ $\widehat{BE} > \widehat{EA}$ وَ $\widehat{BG} > \widehat{GC}$؛ فنستخلص إذاً متباينات بين الأقواس انطلاقاً من معادلات بين الخطوط.

ملاحظة: يُعطي ابن الهيثم في صيغة القضية وفي مثال القضية الشرطَ: $\widehat{ABC}$ أصغر من نصف دائرة أو مساوية لنصف دائرة، وهذا ما يُفضي إلى أنَّ الزاويتين $\widehat{CAB}$ و $\widehat{ACB}$ حادَّتان.

إذا كانت $\widehat{ABC}$ أكبر من نصف دائرة، يُمكن أن تكون إحدى الزاويتين $\widehat{CAB}$ أو $\widehat{ACB}$ منفرِجة أو قائمة. إذا كانت $\widehat{ACB}$ منفرِجة، فإنَّ الخطّ IK يقطع حينئذ القوس $\widehat{CG}$ ويكون معنا $BG < GC$. وإذا كانت $\widehat{ACB}$ قائمة، فإنَّ D تكون مركز الدائرة، فتتطابق النقطتان G وَ I، ويكون معنا $GC = BG$.



الشكل ٤

إذا كانت الزاويتان $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{ACB}$ حادَّتين يكون معنا $\widehat{CG} < \widehat{GB}$، مثلما كان معنا في الحالة المدروسة في هذه القضية.

إذا كانت القوس $\widehat{ABC}$ أكبر من نصف دائرة، نحصل على ثلاث حالات ممكنة للقوسين $\widehat{BG}$ وَ $\widehat{CG}$.

تنتهي هنا المجموعة الأولى من القضايا التي هي مُقدِّمات لدراسة الارتفاع. والمجموعة الثانية المكرَّسة لدراسة الارتفاعات تتضمَّن القضايا التسع التالية. يتعلّق الأمر في هذه القضايا، بدراسة ارتفاع نقطة متحرِّكة على قوس.

القضية ٨- يُثبت ابن الهيثم أوّلاً أنَّ ارتفاع نقطة ما G على الكرة السماوية، يُمكن أن يُقاسَ على دائرة نصف النهار للمكان، بين الأفق والدائرة الموازية للأفق المارَّة بالنقطة G. وهذا

راجعٌ إلى أنّ سمت الرأس E للمكان هو قطب دائرةِ الأفق والدائرةِ الموازية له المعنية بالأمر.

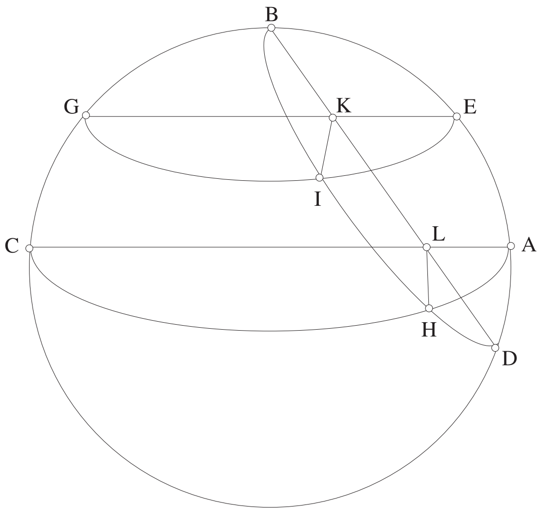
القضية ٩- يقيس ابن الهيثم هنا ارتفاع قوسٍ من دائرة زمانية على طول دائرة نصف النهار للمكان، بين الدائرتين الموازيتين للأفق المارَّتين بطرفيْ هذه القوس. وهذا ينتج من القضية السابقة بأخذ الفرق بين قوسين.

القضية ١٠- تؤيد صيغة هذه القضية التطابق بين الارتفاعات والزمن في الحالة التي تكون فيها الكرة السماوية منتصبة. وذلك، لأنَّ دائرة الارتفاع هي دائرة نصف النهار. ويتناول البرهان فقط الحالة التي تكون فيها النقطة E في الوسط بين B وَ D.

ونلاحظ هنا أنَّ الصيغة هي من النوع السينماتيكي، إذ إنَّ الكوكبَ مُعْتَبَرٌ كنقطة متحرِّكة على الكرة السماويّة، على طول معدِّل النهار.

القضية ١١- يدرس ابن الهيثم في هذه القضية أيضاً حركة كوكب مُعتَبَر كنقطة متحرِّكة على الكرة السماوية، ويفرِض أنَّ هذه النقطة ترسم دائرة زمانية HIB موازية لدائرة معدِّل النهار، ولكنّها غير مُطابقة لها.

إذا كانت I في وسط $\widehat{BH}$، يكون ارتفاع $\widehat{IH}$ حينئذ أكبر من ارتفاع $\widehat{BI}$. وهكذا فإنّ الارتفاعات تكون تناقصية من H نحو B، لأزمان متساوية للمسير.

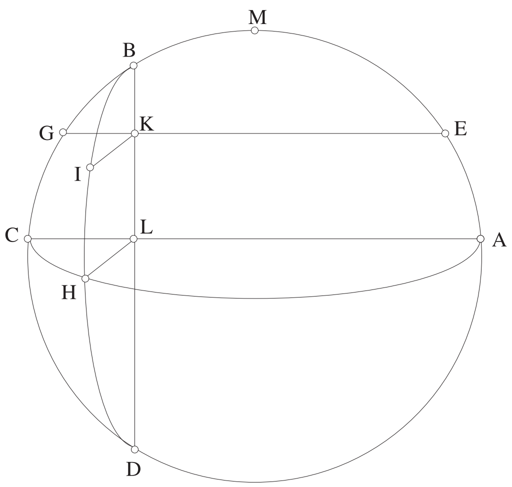


الشكل ٥

لنلاحظ هنا أيضاً أنَّ ابن الهيثم يتناول فقط النقطة I وسط القوس $\widehat{BH}$ كما أنّه لا يُثبت في القضية ١٠ خاصّة تقعُّر الارتفاع كدالّة للزمن، وهي الميزة التي يُمكن استنتاجها من دراسة متّصلة للتغيُّر، وهذا ما فعله لاحقاً في مؤلّفه "هيئة الحركات". والدراسة الحالية لا تتناول إلا نقاطاً منفصلة من مسار الحركة.

يستند البرهان، هنا أيضاً، إلى تحقّق متباينة، انطلاقاً من معادلة. ويتمُّ تحويل المعادلة بين زمانين إلى معادلة بين مساحتين بواسطة عكس القضية ٢ المطبَّقَة على الدائرة DHB؛ ثمَّ تتضمَّن هذه المعادلة بين مساحتين متباينة بين قوسين للقضية ٣ المطبَّقة على الدائرة $ABCD$.

القضية ١٢- يتناول ابن الهيثم في هذه القضية حركة نقطة متحرِّكة على دائرة زمانية HIB، مائلة بالنسبة إلى الأفق؛ إذاً، لم تَعُد الكرة السماوية منتصبة؛ ولكنه يفترض أنّ النقطة B في سمت الرأس.



الشكل ٦

إذا كانت النقطة I في وسط القوس $\widehat{BH}$، يكون ارتفاع $\widehat{IH}$ أصغر من ارتفاع $\widehat{BI}$. وهكذا تكون الارتفاعات تناقصية، لأزمان متساوية للمسار. والدراسة هنا تخصُّ نقاطاً منفصلة

وغير مُتّصِلة، كما هي الحال في القضية السابقة. وهكذا توجَّب لأجل ذلك، كما هو الأمر في الحالات الأخرى، انتظار مؤلّف "هيئة الحركات".

والبرهان مُشابه لبرهان القضية السابقة: المساواة بين زمنين تعادل مساواة بين مساحتين، وهذه المساواة تتضمَّن متباينة بين قوسين وفقاً للقضية ٤.

لنلاحظ أنّ ابن الهيثم يُدخل في البرهان، وليس في صيغة القضية، الفرضيّةَ غير الضرورية (وهي أنَّ AC تفصل قوساً أكبر من نصف دائرة).

القضية ١٣ـ صيغة هذه القضية مشابهة لصيغة القضية السابقة، إلا أنّ النقطة B لم تَعُدْ في سمت الرأس. يُفترَض هنا أنّ النقطة B موجودة بين دائرة معدِّل النهار وسمت الرأس. ولكن هذا الشرط غير وارد في صيغة القضية، مع أنّه ضروريٌّ لكي نضمن أنَّ $\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

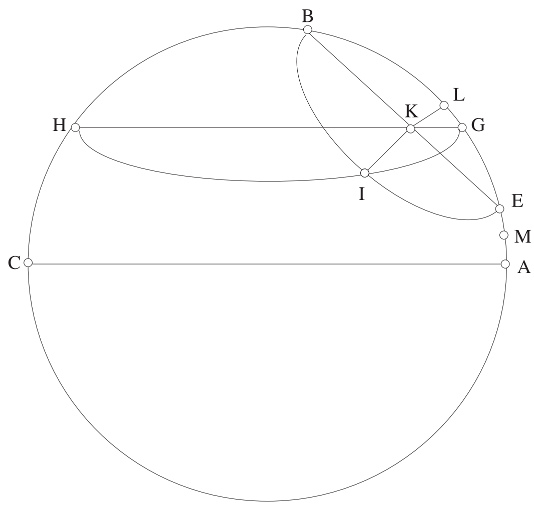
ونفترض، بالإضافة إلى ذلك، أنّ القوس $\widehat{ABC}$ ليست أكبر من نصف دائرة، لكي يكون تطبيق القضية ٥ ممكناً. وهذه القضية الأخيرة تسمح بأن نستخلِص أنّ $\widehat{CG} > \widehat{GB}$، استناداً إلى أنّ المساواة بين مساحتين تُعادل المساواة بين زمنين، أي بين $\widehat{HI}$ وَ $\widehat{IB}$ ، كما هي الحال في القضايا السابقة. ولم تُستخدَم هنا القضيّة السادسة.

القضية ١٤ـ الحركة المأخوذة هنا هي حركة نقطة متحركة تنتقل من نقطة H على الأفق إلى النقطة B على دائرة نصف النهار، على دائرة زمانية BIH. والنقطة I هي في وسط القوس $\widehat{HB}$، فيكون الزمانان $\widehat{HI}$ وَ $\widehat{IB}$ متساويين؛ ولكن قد يكون الارتفاعان الخاصَّان بِهما $\widehat{CG} = \widehat{EA}$ وَ $\widehat{GB}$ أوْ $\widehat{EB}$، وفقاً للشكل، متساويين أو غير متساويين، حسب الحالة المدروسة. وهذا ينتج من القضية ٦.

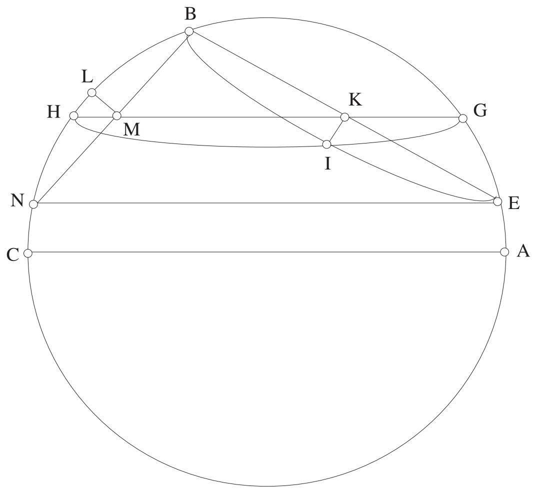
القضية ١٥ـ الوضع مشابه للوضع في القضية السابقة، إلا أنّ الدائرة الزمانية للحركة مُماسَّة للأفق في النقطة الأوَّليّة A. نفترض أنّ $\widehat{AB} = \widehat{DB}$؛ ويُمكن أن نستخلص، وفقاً للقضية ٧، أنَّ $\widehat{CH} = \widehat{AG}$، ارتفاعَ $\widehat{AD}$، هو أصغر من ارتفاع $\widehat{DB}$ (وهذا الارتفاع الأخير هو $\widehat{HB}$ أو $\widehat{GB}$، حسب الحالة المأخوذة).

القضية ١٦- يريد ابن الهيثم، في هذه القضية الأخيرة، أن يُقارن ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ بارتفاع الزمان $\widehat{IB}$.

يكون معنا، في الحالة الأولى المدروسة ($\widehat{AB} < \widehat{BC}$): $\widehat{AG}$ هي ارتفاع النقطة I، وَ $\widehat{EG}$ هي ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ ؛ ولكنَّ $\widehat{EG} < \widehat{AG}$.



الشكل ٧-١



الشكل ٧-٢

يُميِّز ابن الهيثم بين حالات ثلاث:

١- $\widehat{GL} = \widehat{ME}$، يكون حينئذ $\widehat{GB} = \widehat{AG}$ وَ $\widehat{GB} > \widehat{EG}$، حيث يكون $\widehat{GB}$ ارتفاعَ الزمان $\widehat{IB}$. فيكون ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ أصغر من ارتفاعَ الزمان $\widehat{IB}$، ولا يُمكن أن يكون مساوياً له.

٢- $\widehat{GL} > \widehat{ME}$، يكون حينئذ $\widehat{GB} > \widehat{AG}$ وَ $\widehat{GB} > \widehat{EG}$. فيكون ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ أصغر من ارتفاع الزمان $\widehat{IB}$.

٣- $\widehat{GL} < \widehat{ME}$، يكون حينئذ $\widehat{GB} < \widehat{AG}$ ؛ ولا يُمكن أن نحسم الأمر لأنّ المقارنة بين $\widehat{EG}$ وَ $\widehat{GB}$ تتعلّق بموضع النقطة ، أيْ بالوضع المُختار للدائرة الزمانية.

والمسألة هي نفسها في الحالة الثانية المدروسة ($\widehat{AB} > \widehat{BC}$). يكون معنا حينئذ: $\widehat{CH}$ هي ارتفاع النقطة I، $\widehat{NH}$ هي ارتفاع القوس $\widehat{EI}$ وَ $\widehat{HB}$ هي ارتفاع القوس $\widehat{IB}$. ويكون معنا أيضاً ثلاث حالات:

١- $\widehat{CN} = 2\widehat{LH}$ ؛ هنا أيضاً، يكون ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ أصغر من ارتفاع الزمان $\widehat{BH}$.

٢- $\widehat{CN} < 2\widehat{LH}$؛ نبيِّن أنّ ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ أصغر من ارتفاع الزمان $\widehat{BH}$.

٣- $\widehat{CN} > 2\widehat{LH}$؛ يكون معنا حينئذ $\widehat{CH} > \widehat{BH}$. ولا يُمكن أن نحسم الأمر لأنّ المقارنة بين $\widehat{NH}$ وَ $\widehat{BH}$ تتعلَّق بموضع النقطة E، أيْ بالموضع المُختار للدائرة الزمانية.

وهكذا يكون ارتفاع الزمان $\widehat{EI}$ أصغر من ارتفاع الزمان $\widehat{IB}$ في الحالتين ١ و ٢، بينما يكون لدينا في الحالة ٣ ثلاث إمكانيات، وفقاً لوضع النقطة E.

والظاهر هو أنّ ابن الهيثم قد تسرَّع في تحرير هذه القضية، وهذا ما قد يُفسِّر كيف أنّه خلط سهواً بين ارتفاع النقطة I وارتفاع القوس $\widehat{EI}$.

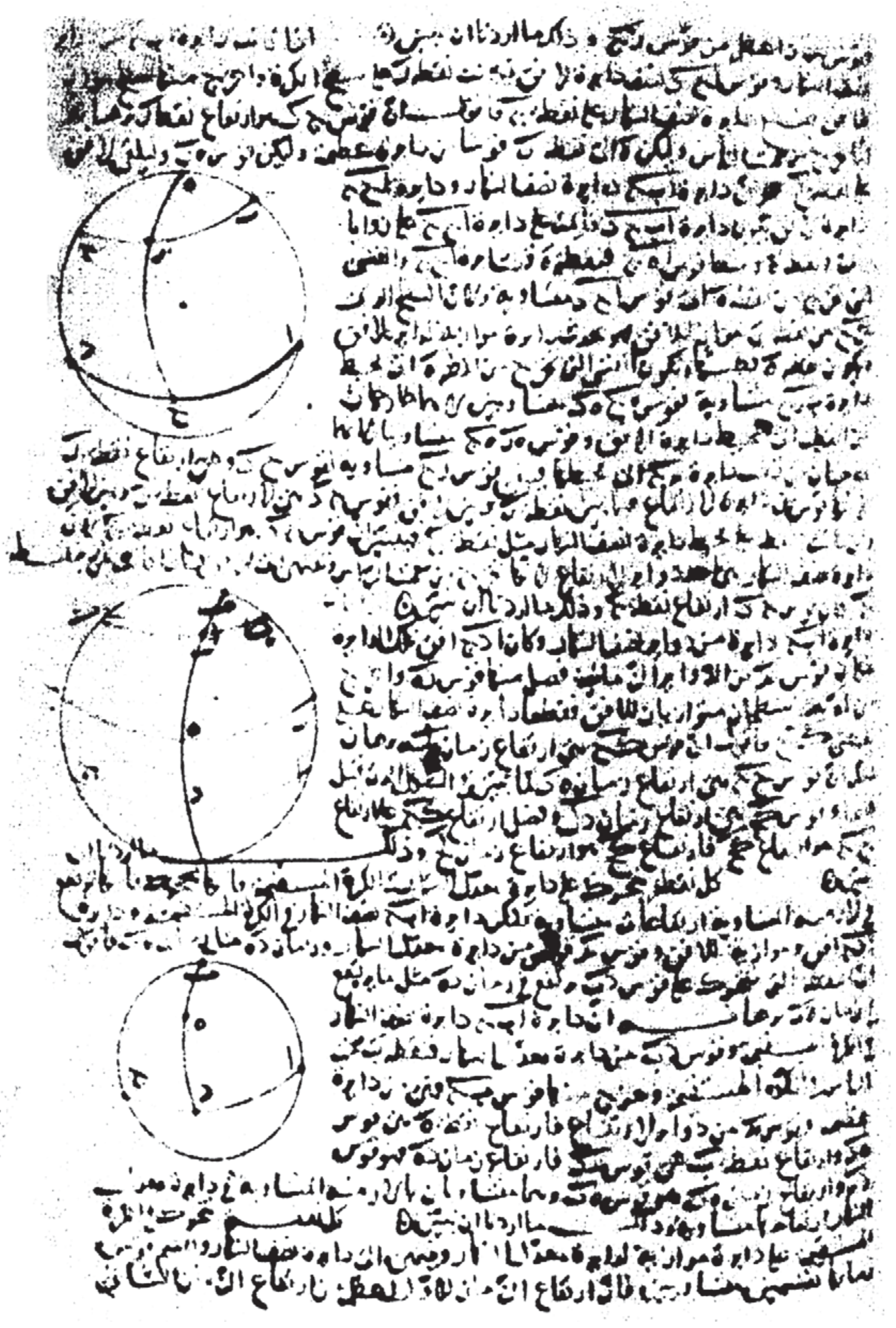
٣- تاريخ النصّ

إننا نقرأ العنوان "في الاختلاف في ارتفاعات الكواكب" على كل من القوائم الثلاث، بأعمال ابن الهيثم السابقة لسنة ١٠٣٨، التي نقلها القِفطي وابن أبي أصَيبعة والمؤلّف المجهول الهوية لمخطوطة لاهور[٣]. ولقد وصل إلينا هذا المؤلَّف تحت عنوان أكمل من العنوان السابق: " فيما يَعْرِض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب". إنّ هذا العنوان الأخير هو العنوان الذي أراد ابن الهيثم، على أرجح الاحتمالات، أن يُعطيه لمؤلّفه هذا، وأن يكون هذا العنوان قد اختـُصِرَ من قِبَل المُفَهرسين القدامى- وهذا ما قد يحدث بدون أن يكون ذلك استثنائيّاً. إنَّ هذا المؤلّف موجود على كلّ حال في مخطوطة وحيدة. وهو ضمن مجموعة فاتح رقم ٣٤٣٩، على الأوراق ١٥١و-١٥٥و، في المكتبة السليمانية في اسطنبول. وهذه المجموعة تحتوي على نصوص أخرى لابن الهيثم مثل "مقالة مستقصاة في الأشكال الهلالية". ولقد نُسخت المخطوطة في سنة ٨٠٦/ ١٤٠٣-١٤٠٤.

---

[٣] انظر ص. ٤٦١، الحاشية ٢.

إنّ النصَّ صعبُ القراءة بسبب اللون الباهت للحبر المستَعمَل في كتابته؛ وهذا ما جعل بعض المقاطع صعبة الفهم. وكتابةَ النصّ هي بالخطِّ النسْخيِّ، وهي قليلة العناية ؛ والنصُّ يتضمَّن عشرين نقصاً لكلمة وخمسة نواقص لعبارات، في كلّ منها أكثر من كلمتين. كما نلاحظ فيه أيضاً وجود العديد من الأخطاء النسخيّة، وخاصّة في الأحرف الهندسية؛ وكذلك نجد فيه بعض الأخطاء في العربية وخاصّة في القواعد اللغوية، التي تُمْكِن نسبتها ، كما يبدو بعد المعاينة، إلى الناسخ. ولكن هذه الحوادث والأخطاء ، بالرغم من كلّ شيء، لا تمنع من فهم النصّ بعد تحقيقه.



"في الاختلاف في ارتفاع الكواكب"، مخطوطة إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩ ورقة ١٥٣و.

٤ ـ نصّ كتاب ابن الهيثم

" فيما يعرض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب"

١٥١-و

الأفق دائرة عظيمة تقسم كرة العالم بنصفين. دائرة نصف النهار هي دائرة عظيمة تمر بسمت الرأس وبالقطبين اللذين تتحرك <عليهما> الكرة، وهي قائمة على الأفق على زوايا قائمة. دوائر الارتفاع هي دوائر عظام تمر بسمت الرأس وتكون [على] قائمة على الأفق على زوايا قائمة.

قطبا الكرة هما نهايتا قطر من أقطارها، والقطبان ثابتان إذا تحركت الكرة. قطب الدائرة هو نقطة تكون كل الخطوط الخارجة منها إلى محيط الدائرة متساوية؛ وكل دائرة في كرة فلها قطبان.

دوائر الزمان هي دوائر مختلفة المقدار تحدثها حركة الكرة <و>تكون فيها دائرة واحدة عظيمة وتكون جميعها متوازية، وقطبا جميعها هما قطبا الكرة اللذان عليهما تتحرك، وما كان منها إلى القطب أقرب كان أصغر. و<القسي> الزمانية فهي الأجزاء من تلك الدوائر.

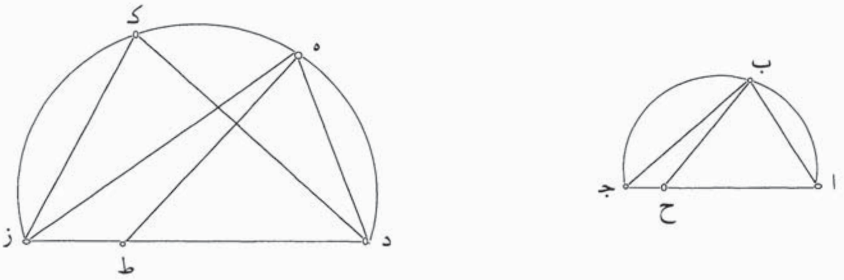
دائرة معدّل النهار هي أعظم دائرة ترسمها الكرة بحركتها. قوس الارتفاع من دائرة الارتفاع فيما بين النقطة المرتفعة عن الأفق وبين الأفق.

الكرة المستقيمة هي التي قطباها على محيط أفقها. الكرة المائلة هي التي أحد قطبيها ظاهر فوق الأرض والآخر غائب تحتها. كل نقطة على الكرة ترتفع عن الأفق وعن سطح مواز للأفق في زمان ما ارتفاعًا ما؛ فإني أسمي الارتفاع ارتفاع ذلك الزمان، وإذا ارتفعت زيادة على ذلك الارتفاع، فإني أسمي زيادة الارتفاع الثاني على الارتفاع الأول ارتفاع الزمان الثاني.

6 وبالقطبين: والقطبين – 9 قطر: قطرين / تحركت: تحرك – 10 هو: هي – 14 اللذان: اللذين.

<آ> كل قطعتين متشابهتين من الدوائر نقسم قاعدتيهما على نسبة واحدة، ويخرج من موضعي القسمة خطان على زاويتين متساويتين، فإنهما يقسمان القوسين على نسبة واحدة.

مثال ذلك: قطعتا ا ب جـ د ه ز متشابهتان؛ وقد جعل نسبة ا ح إلى ح جـ كنسبة د ط إلى ط ز، وأخرج ح ب ط ه على زاويتين متساويتين؛ فأقول: إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ه ز.



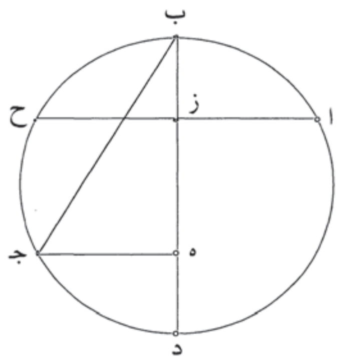
برهانه: أنه لا يمكن غيره؛ فإن أمكن، <فلتكن> نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ك إلى قوس ك ز. ونصل ا ب ب جـ د ك ك ز. فلأن قوسي ا ب جـ د ه ز متشابهان قد قسما على نسبة واحدة، يكون قوسا ب جـ ك ز متشابهين، فزاويتا ب ا جـ ك د ز متساويتان. وزاويتا ا ب جـ ز ك د متساويتان، لأن النقطتين <ب وك> متشابهتان، فمثلثا ا ب جـ د ك ز متشابهان. فنسبة ب ا إلى ا جـ كنسبة د ك إلى د ز، ونسبة ا جـ إلى ا ح كنسبة ز د إلى د ط بالفرض. ففي نسبة المساواة، تكون نسبة ا ب إلى ا ح كنسبة ك د إلى د ط. وزاويتا ب ا ح ك د ط متساويتان، فمثلثا ب ا ح ك د ط متشابهان، فزواياهما متساوية. فزاوية ا ح ب مساوية لزاوية د ط ك، وذلك لا يمكن.

فليس نسبة قوس د ك إلى قوس ك ز كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ؛ فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ه إلى قوس ز ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 نقسم: يقسم – 4 قطعتا: قطعتي / متشابهتان: متشابهتين – 9 متشابهان: في هذا النص يذكر ويؤنث الكاتب كلمة «قوس»، وبما أن هذا جائز فلن نغير النص – 10 متساويتان: متساويتين – 11 متساويتان: متساويتين / النقطتين: القطبين / متشابهتان: متشابهين / فمثلثا: فمثلثي – 14 وزاويتا: وزاويتي / متساويتان: متساويتين – 15 فمثلثا: فمثلثي / متشابهان: متشابهين / فزواياهما: فزاويتاهما.

〈ب〉 كل دائرة يخرج فيها قطر من أقطارها ويُفرض أية نقطتين، فيكون ضرب قسميه اللذين تفصلهما النقطة الأولى أحدهما في الآخر ربع السطح الذي يحيط القطر به كله والقسم الذي تفصله النقطة الأخرى، ونخرج من النقطتين عمودين على القطر وينتهيان إلى المحيط، فإنهما يفصلان مما يلي طرف القطر قوسين متساويتين.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د يخرج فيها قطر ب د وفرض عليه نقطتا ه ز، فصار ضرب ب ز في ز د ربع السطح الذي يحيط به القطر كله 〈وب ه〉، وأخرج ز ح ه جـ على زوايا قائمة؛ فأقول: إن قوس ب ح مثل قوس ح جـ.



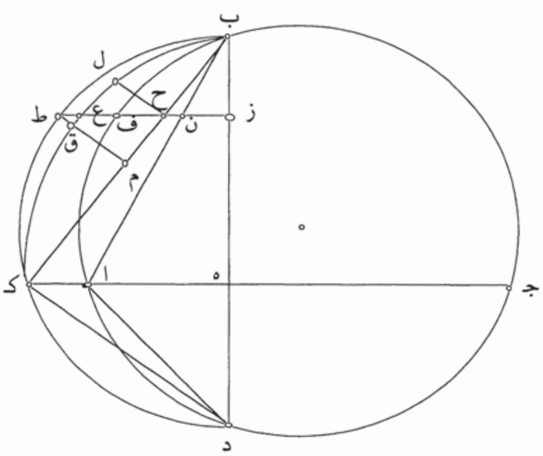
برهان ذلك: أنا ننفذ ح ز إلى ا ونصل ب جـ. فلأن ب د قطر الدائرة وز ح عمود على القطر، يكون خط ا ز مثل خط ز ح، فمربع ا ح أربعة أمثال مربع ز ح. ولكن ضرب د ز في ز ب مثل مربع ز ح. فمربع ا ح أربعة أمثال ضرب د ز في ز ب؛ / وضرب د ب في ب ه أربعة أمثال ضرب د ز في ١٥١–ظ ز ب، فضرب د ب في [مربع] ب ه مثل مربع ا ح. فلأن د ب قطر وجـ ه عمود، يكون ضرب ب د في ب ه مثل مربع ب جـ. فمربع ا ح مثل مربع ب جـ، فـ ا ح مثل ب جـ. فقوس ا ح مثل قوس ب جـ. فإذا ألقينا قوس ب ح المشترك، بقي قوس ا ب مثل قوس جـ ح. لكن قوس ب ح نصف قوس ا ح 〈لأن ا ح〉 عمود على القطر، فقوس ب ح مثل قوس ح جـ.

وبهذا الطريق نبين أنه إذا فصل من المحيط قوسان متساويان وأخرج منهما عمودان على القطر، فإنهما يفصلان القطر على هذه النسبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 نقطتين: نقطتان – 3 به كل: كُلٍّ – 4 إلى: على – 7 القطر كله: مطموسة – 16 نصف: لان.

⟨جـ⟩ كل دائرة يخرج فيها وتر يفصل منها قوسًا أصغر من نصف دائرة، ونفرض عليه نقطتين، فيكون ضرب قسميه اللذين تقسمهما النقطة الأولى أحدهما في الآخر ربع السطح الذي يحيط به الخط كله والقسم الذي تفصله النقطة الأخرى، ونخرج من النقطتين عمودين ينتهيان إلى القوس، فإنهما يفصلان مما يلي طرف الوتر قوسين مختلفتين تكون أصغرهما مما يلي رأس الوتر.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د وفيها وتر ب د يفصل منها قوس ب ا د أصغر من نصف دائرة، وفرض عليه نقطتا ز ه، فصار ضرب د ز في ز ب ربع السطح الذي يحيط به د ب ب ه، وأخرج من نقطتي ه ز عمودا ا ه ز ف؛ فأقول: إن قوس ا ف أعظم من قوس ف ب.



برهانه: أنا نعمل على خط ب د نصف دائرة ب ك د، ونخرج ه ا إلى ك وز ف إلى ط ونصل ب ح ك ب ن ا ا د د ك.

فلأن ب د قطر دائرة ب ك د، وقد جعل ضرب د ز في ز ب ربع السطح الذي يحيط به د ب ب ه، وك ه ط ز عمودان، يكون قوس ط ب مثل قوس ط ك لما تبين في الشكل الذي قبل هذا. ولأن زاوية ك د ه أعظم ⟨من زاوية⟩ ا د ه، يكون قوس ك ب أعظم من القوس الشبيه بقوس ا ب.

ونعمل على خط ب ك قوس ب ل ك شبيه بقوس ا ب. ونخرج ط م عموداً على ب ك، فهو يقطع [على] خط ك ح لأن زاوية ط ح ك حادة،

2 عليه: عليها / قسميه: قسمة – 6 الوتر: النقطة – 9 عمودا: عمودي – 14 عمودان: عمودين / ط ب: غير واضحة.

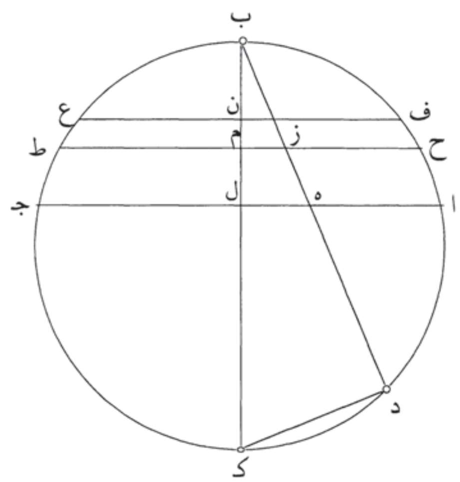
وذلك لأنها مساوية لزاوية ب ك ه. فلأن قوس ك ط مثل قوس ط ب وط م عمود، يكون ك م مثل م ب؛ وم ق عمود، يكون قوس ك ق مثل قوس ق ب، فقوس ك ع أعظم من قوس ع ب؛ وزاوية ب ح ط أعظم من زاوية ب ز ح لأنها خارجة عن المثلث، فنفصل منها زاوية ب ح ل مثل ب ز ح، فخط ح ل يفصل قوس ع ب. وقد كان تبين أن قوس ك ع أعظم من قوس ع ب، فقوس ك ل أعظم كثيراً من قوس ل ب. فلأن خط ح ز موازٍ لخط ا ك، تكون نسبة ك ح إلى ح ب كنسبة ا ن إلى ن ب، وزاوية ب ح ل مساوية لزاوية ب ز ح وقوس ك ل ب شبيهة بقوس ا ف ب، فنسبة قوس ك ل إلى قوس ل ب كنسبة قوس ا ف إلى قوس ف ب. وقوس ك ل أعظم من قوس ل ب، فقوس ا ف أعظم من قوس ف ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨د⟩ كل دائرة يخرج فيها وتر يفصل منها قوسًا ليست بأعظم من نصف دائرة، ونقسم القوس بنصفين، ونخرج من موضع القسمة خطًا يلقى الوتر على زاوية حادة وينتهي إلى محيط الدائرة، ونفرض على الخط نقطة فيما بين القوس وبين الوتر الأول، فنجعل ضرب قسمي الخط كله أحدهما في الآخر ربع السطح الذي يحيط به الخط كله والقسم الذي انتهى إلى الوتر، ويخرج من تلك النقطة خط موازٍ للوتر الأول، فإنه يقسم القوسين اللذين عن جنبتيه بقسمين مختلفين، يكون القسم الأعظم منهما مما يلي رأس القطعة.

مثاله: دائرة ا ب ج د، خرج فيها وتر ا ج، وقسم قوس ا ب ج بنصفين على نقطة ب، وأخرج خط ب ه د على زاوية حادة، وفرض عليه نقطة ز، وجعل ضرب د ز في ز ب ربع السطح الذي يحيط به خطا د ب ب ه، وأخرج خط ز ح ط موازيًا لـ ج ا؛ فأقول إن قوس ب ح أعظم من ⟨قوس⟩ ح ا.

برهانه: أنا نخرج خط ب م ل عموداً على ا ج / وننفذه إلى ك، ونصل ١٥٢-و
د ك. فلأن قوس ا ب مثل قوس ب ج وب ل عمود، يكون خط ب ك قطر الدائرة، وتكون زاوية ب د ك قائمة. ولأن ب ل عمود وزاوية ب د ك قائمة، يكون مثلثا ب د ك ب ل ه متشابهين، فنسبة ك ب إلى ب د كنسبة

8 ب ز ح: ب ن ح – 17 منهما: منه – 19 نقطة ب: نقطتين – 20 د ب ب ه: د ز ز ه.



ه ب إلى ب ل، فضرب د ب في ب ه كضرب ك ب في ب ل. وضرب د ب في ب ه أربعة أمثال ضرب د ز في ز ب، فهو أربعة أمثال ضرب ح ز في ز ط. ولأن ح ط موازٍ لـ جـ ا، يكون ط م عموداً على ب ك. وب ك قطر، فخط ح م مثل خط م ط، فضرب ط م في م ح أعظم من ضرب ط ز في ز ح، فضرب ط م في م ح أعظم من ربع ضرب ك ب في ب ل. وضرب ط م في م ح هو ضرب ك م في م ب، فضرب ك م في م ب أعظم من ربع ضرب ك ب في ب ل. فنجعل ضرب ك ن في ن ب مثل ربع ضرب ك ب في ب ل، ونخرج خط ن ف ع موازيًا لـ جـ ا. فلأن خط ب ك قطر الدائرة وضرب ك ب في ب ل أربعة أمثال ضرب ك ن في ن ب، وخطي جـ ل ا ع ن ف عمودان على القطر، يكون قوس جـ ع مثل قوس ف ا وقوس ف ح مثل قوس ع ط، فقوس ب ح أعظم من قوس ح ا وقوس ب ط أعظم من قوس ط جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

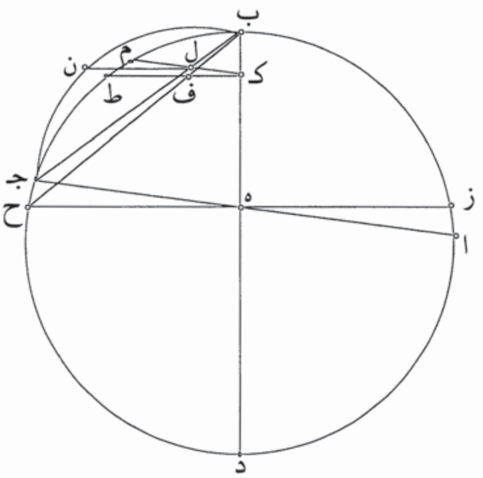
<هـ> كل دائرة يخرج فيها وتر يفصل منها قوسًا ليست بأعظم من نصف دائرة، ويفرض عليها نقطة تفصل القوس قسمين مختلفين، ويخرج منها خط يلقى الوتر على زاوية حادة مما يلي القسم الأصغر، ويفصل ذلك الخط من الدائرة على تلك الجهة قطعة ليست بأعظم من نصف دائرة، ثم يفرض عليه

7 فنجعل ... ب ل: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم – 9 ك ن في ن ب: ك ز في ز ب / وخطي: وخطا – 10 جـ ع: لب – 11 ع ط: ع جـ / ب ح: ب جـ – 14 نقطة: نقط – 16 ثم: غير واضحة.

نقطة فيما بين القوسين والوتر، فنجعل ضرب قسمي جميع الخط أحدهما في الآخر ربع السطح الذي يحيط به الخط كله والقسم الذي انتهى إلى الوتر، وأخرج من تلك النقطة خط مواز للوتر، فإنه يقسم القوس الصغرى بقسمين مختلفين، يكون قسمه الأصغر مماً يلي رأس القوس.

مثاله: دائرة ا ب جـ د وفيها وتر ا جـ، وقوس ا جـ ليست بأعظم من نصف دائرة، وفرض عليها نقطة ب، فصار قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ. وأخرج خط ب ه د حتى صارت زاوية ب ه جـ حادة، وقوس ب جـ د ليست بأعظم من نصف دائرة، ويجعل ضرب د كـ في كـ ب ربع [مربع] السطح الذي يحيط به د ب ب ه. وأخرج كـ م موازياً لـ ا جـ؛ فأقول: إن قوس جـ م أعظم من قوس م ب.

برهانه: أنا نخرج خطي ه ح كـ ط على زاوية قائمة.



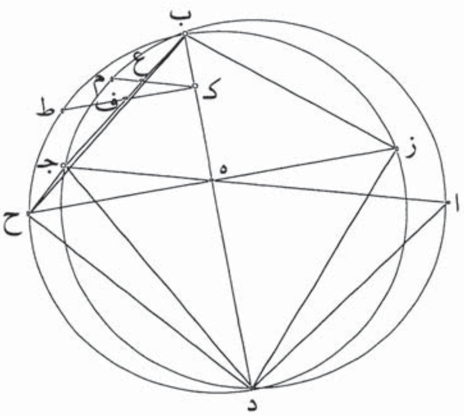
وليكن أولاً قوس ب جـ د نصف دائرة. وننفذ ح ه إلى ز، ونصل ب ل جـ ب ف ح. فلأن ضرب د كـ في كـ ب ربع السطح الذي يحيط به د ب ب ه، وخطا ح ه كـ ط عمودين ‹على ب د›، يكون قوس ب ط مثل قوس ط ح. وقوس ب ح أعظم من قوس ب جـ. فنعمل على خط ب جـ قوساً شبيهة بقوس ب ح، ولتكن قوس ب ن جـ. ولأن كـ ط مواز لـ ه ح، تكون نسبة ب ف إلى ف ح كنسبة ب كـ إلى كـ ه، وكذلك نسبة ب ل إلى ل جـ كنسبة

1 نقطة: نقط – 12 ح ه: ح – 17 ب ل إلى ل جـ: جـ ل إلى ن جـ.

ب كـ إلى كـ ه. فنسبة ب ف إلى ف ح كنسبة ب ل إلى ل جـ. وقوس [وتر] ب ز أصغر من قوس ا ب، فزاوية ب ح ه أصغر من زاوية ب جـ ه، فزاوية ط ف ح أصغر من زاوية م ل جـ. فنفصل زاوية جـ ل ن مثل زاوية ح ف ط. فلأن قوس ب ح شبيهة بقوس ب ن جـ، فنسبة ب ف إلى ف ح كنسبة ب ل إلى ل جـ. وزاوية ح ف ط مثل زاوية جـ ل ن، فنسبة قوس ب ن إلى قوس ن جـ كنسبة قوس ب ط إلى <قوس> ط ح. ولكن قوس ب ط مثل قوس ط ح، فقوس ب ن مثل قوس ن جـ. وزاوية جـ ل ن حادة، والعمود الخارج من نقطة ن إلى خط ب جـ يفصل قوس ب جـ بنصفين، فقوس ب م إذاً أصغر من قوس م جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأيضاً، فلتكن قوس ب جـ د أصغر من نصف دائرة؛ فأقول: إن قوس ب م أصغر من قوس م جـ.

برهانه: أنا نعمل على خط ب د دائرة قطرها ب د، فهي تقع خارجة من قوس ب جـ د / ١٥٢-ظ لأنها أصغر من نصف دائرة، وداخلة في قوس ب ا د، لأنها أعظم من نصف دائرة. ونخرج ه ح كـ ط <عمودين على ب د> وننفذ ه ح إلى ز، ونصل د ح د جـ د ز د ا ب ز ح ب جـ ح ع ح. فزاوية ح د ب أعظم من زاوية جـ د ب، فقوس ب ط ح أعظم من الشبيهة بقوس ب م جـ. وزاوية ز د ب أصغر من زاوية ا د ب. فزاوية ب ح ه أصغر من زاوية ب جـ ه لأنهما مساويتان للزاويتين الأوليين، فزاوية ح ف ط أصغر من زاوية جـ ع م، ونسبة ب ف إلى ف ح كنسبة ب ع إلى جـ ع. وقوس ب ط ح

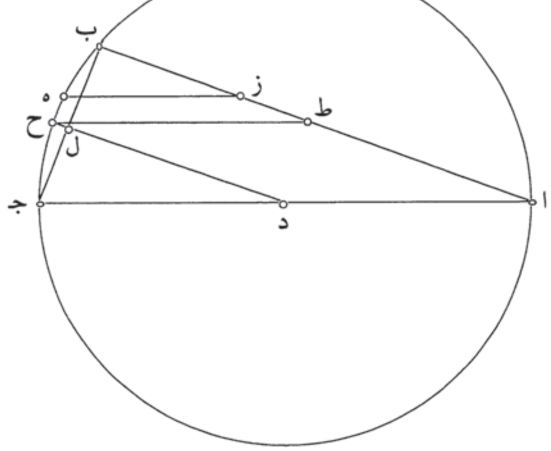


8 قوس: وقوس – 13 لأنها ... دائرة: مطموسة.

أعظم من الشبيهة بقوس ب م جـ. ونسبة ب ف إلى ف ح كنسبة ب ع إلى ع جـ، وزاوية ح ف ط أصغر من زاوية جـ ع م، فقوس ب ط مثل قوس ط ح، فقوس ب م أصغر من قوس جـ م، كما تبين في الشكل الذي قبل هذا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨و⟩ كل دائرة يخرج فيها قطر من أقطارها ويفرض على محيطها نقطة كيفما وقعت، ويوتر أعظم القوسين بخط مستقيم ويفصل منه مثل نصف قطر الدائرة، ونخرج من موضع القسم خطًا موازيًا للقطر، فإنه يقسم القوس الأخرى بنصفين.

مثاله: دائرة ا ب جـ خرج فيها قطر ا جـ، ومركزها د، وفرض عليها نقطة ب ووصل ا ب، وفصل منه ا ز مثل نصف القطر، وأخرج خط ه ز موازيًا لـ جـ ا؛ فأقول: إن قوس ب ه مثل قوس ه جـ.



برهانه: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فليكونا مختلفين.

ونقسم قوس ب جـ بنصفين على نقطة ح، ونخرج خط ح ط موازيًا لـ جـ ا ونصل ب جـ. فلأن قوس ب ح مثل قوس جـ ح ود مركز الدائرة، يكون د ل عموداً على ب جـ. فزاوية د ل جـ قائمة، وزاوية ا ب جـ قائمة، لأنها على نصف دائرة، فخط د ل ح موازٍ لـ ب ا. وخط ح ط موازٍ لـ جـ ا، فخط ا ط

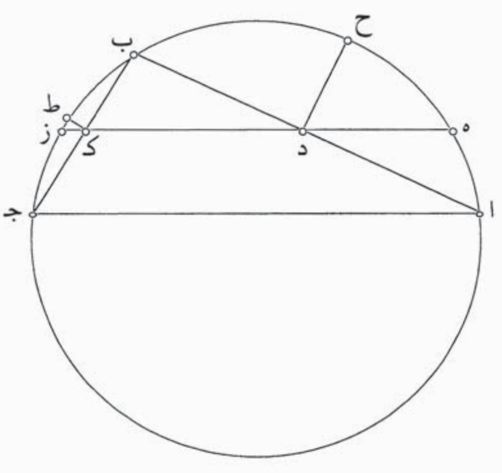
16 جـ ا: ز ا.

مثل خط د ح. ود ح نصف القطر، فخط ا ط نصف القطر؛ وقد كان ا ز ⟨نصف القطر، فقوس ب ه⟩ مثل قوس ه جـ.

وبهذا البرهان يتبين أنه إن كان ⟨ا ز⟩ أصغر من نصف القطر، فإن قوس جـ ه أصغر من قوس ه ب، وإن كان أعظم، كان القوس أعظم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨ز⟩ كل دائرة يخرج فيها وتر يفصل منها قوسًا ليست بأعظم من نصف دائرة، ويفرض على القوس نقطة ويخرج منها إلى طرف الوتر خط، ويقسم بنصفين ويخرج منه خط مواز للوتر، فإنه يقسم كل واحد من القوسين بقسمين مختلفين، يكون القسم الأعظم مما يلي رأس القوس.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ يخرج فيها وتر ا جـ ⟨يفصل منها قوسًا ليست بأعظم من نصف دائرة⟩، وفرض على القوس نقطة ب وأخرج منها خط ا ب وقسم بنصفين على نقطة د، وأخرج خط موازيًا لـ جـ ا؛ فأقول: إن قوس ب ه أعظم من قوس ه ا وقوس ب ز أعظم من قوس ز جـ.

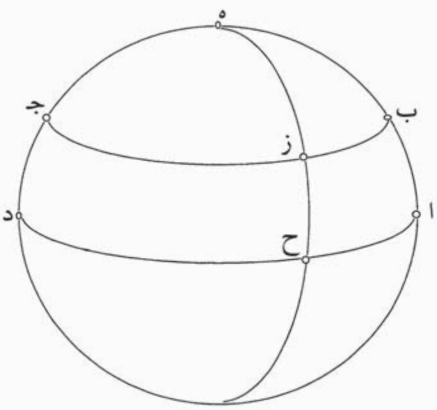


برهانه: أنا نصل خط ب ك جـ، ونخرج من نقطتي د ك عمودين د ح ك ط، فهما يقطعان زاويتي ه د ب ز ك ب، لأن زاويتي ه د ا ز ك جـ حادتان؛ وذلك لأنهما مساويتان لزاويتي ب ا جـ ب جـ ا الحادتين، لأن كل واحد من قوسي ا ب جـ ب أصغر من نصف دائرة. فخطا د ح ك ط يقطعان

7 الوتر: القطر – 15 يقطعان: يتقاطعان / ز ك جـ: أعاد كتابتها في الهامش – 17 ا ب: ب.

قوسي ب ه ب ز، وخط ا د مثل د ب ود ح عمود، فقوس ب ح مثل قوس ح ا، فقوس ب ه أعظم من قوس ه ا. وكذلك قوس ب ط مثل قوس ط جـ، / فقوس ب ز أعظم من قوس ز جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. و-١٥٣

<ح> إذا كـانـت دائرة ا ب جـ من دوائـر نصف النهـار، وقـوس ا ح د نصف دائرة الأفق، وكانت نقطة ز على سطح الكرة وأخرج منها سطح موازٍ للأفق يقطع دائرة نصف النهـار على نقطة جـ؛ فأقول: إن قوس جـ د هو ارتفاع نقطة ز.

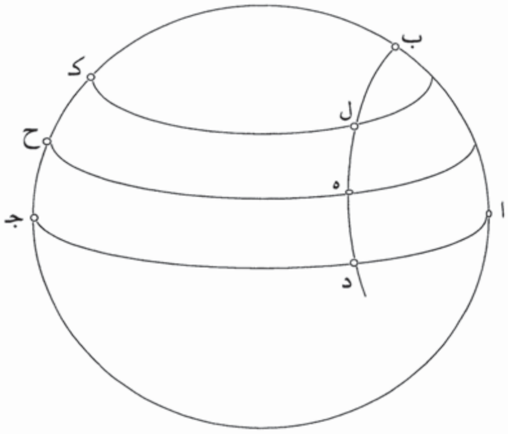


برهانه: أنا نخرج من سمت الرأس، وليكن ه، إلى نقطة ز قوسًا من دائرة عظيمة، ولتكن قوس ه ز، ولتلق الأفق على نقطة ح. فلأن دائرة ا ب جـ دائرة نصف النهار ودائرة ا ح د دائرة الأفق، تكون دائرة ا ب جـ د قائمة على دائرة ا ح د على زوايا قائمة، ونقطة ه وسط قوس ب ه جـ، فنقطة ه قطب دائرة ا ح د، والقسي التي تخرج من نقطة ه إلى قوس ا ح د متساوية. ولأن السطح الذي خرج من نقطة ز موازٍ للأفق، فهو يحدث دائرة موازية لدائرة الأفق، وتكون نقطة ه قطبها، وتكون القسي التي تخرج من نقطة ه إلى محيط دائرة ب ز جـ متساوية. فقوسا ه ح ه د متساويان لأنهما خارجان من القطب إلى محيط دائرة الأفق، وقوسا ه ز ه جـ متساويان لأنهما خارجان من قطب دائرة ب ز جـ إلى محيطها، فتبقى قوس ز ح

2 فقوس: وقوس – 5 وكانت: فكانت – 10 ا ح د: ا ح جـ – 11 ا ح د: ا ح جـ – 12 ا ح د: ا ح جـ – 16 وقوسا: وقوس.

مساوية لقوس جـ د وهي ارتفاع نقطة ز، لأنها قوس من دائرة الارتفاع فيما بين نقطة ز وبين الأفق، فقوس جـ د هي ارتفاع نقطة ز عن الأفق. وإن كانت النقطة على محيط دائرة نصف النهار مثل نقطة جـ، فيتبين أن قوس جـ د هي ارتفاع نقطة جـ، لأن دائرة نصف النهار هي أحد دوائر الارتفاع، لأنها تخرج من سمت الرأس وتنتهي إلى الأفق. وإذا كانت تمرّ بنقطة جـ، كانت قوس جـ د ارتفاع نقطة جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<ط> إذا كانت دائرة ا ب جـ دائرة من دوائر نصف النهار، وكان ا د جـ أفقًا لتلك الدائرة، وكانت قوس ب د من الدوائر الزمانية، <و>فصل منها قوس ل ه وأخرج من ل وه سطحان موازيان للأفق، فقطعا دائرة نصف النهار على نقطتي كـ ح؛ فأقول: إن قوس كـ ح هي ارتفاع زمان ل ه.

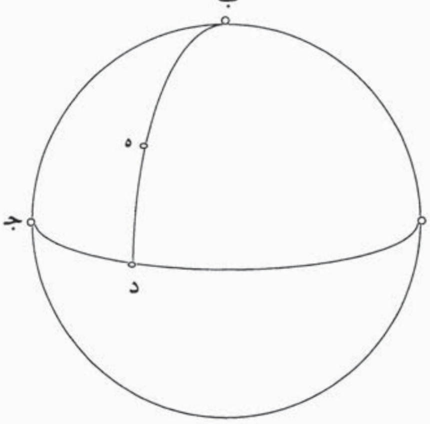


برهان ذلك: أن قوس ح جـ هي اتفاع زمان ه د لما تبين في الشكل الذي قبل هذا. وقوس كـ جـ هي ارتفاع زمان د ل. وفضل ارتفاع كـ جـ على ارتفاع ح جـ هو ارتفاع كـ ح. فارتفاع كـ ح هو ارتفاع زمان ه ل؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<ي> كل نقطة تتحرك على دائرة معدل النهار في الكرة المستقيمة، فإنها ترتفع في الأزمنة المتساوية ارتفاعات متساوية.

2 ارتفاع: الارتفاع / عن: وبين – 8 أفقًا لتلك: أفق تلك / وكانت: فكانت – 9 موازيان: متوازيين – 13 ه ل: ل ح – 15 فإنها: كتب قبلها «فإنها تتحركت» ثم ضرب عليها بالقلم.

فلتكن دائرة ا ب جـ نصف النهار في الكرة المستقيمة، ودائرة ا د جـ أفقًا أو موازية للأفق، وقوس ب د قوسًا من ‹دائرة› معدل النهار وزمان د ه مثل زمان ه ب؛ فأقول: إن النقطة التي تتحرك على قوس د ب ترتفع في زمان د ه مثل ما ترتفع في زمان ه ب.



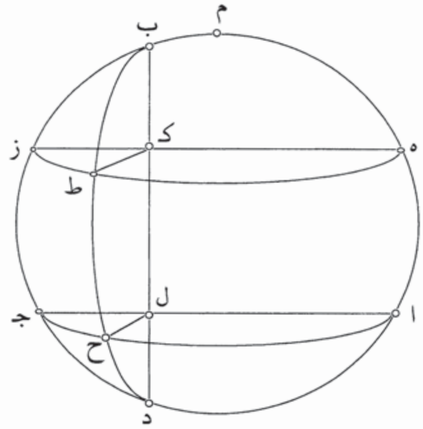
برهانه: أن دائرة ا ب جـ دائرة نصف النهار في الكرة المستقيمة، وقوس د ب من دائرة معدل النهار، فنقطة ب سمت الرأس في الكرة المستقيمة؛ وخرج منها قوس ب جـ، فهي من دائرة عظيمة. وقوس ب د من ‹دائرة من› دوائر الارتفاع، فارتفاع نقطة ه هي قوس ه د وارتفاع نقطة ب هي قوس ب د، فارتفاع زمان د ه هو قوس د ه وارتفاع زمان ه ب هو قوس ه ب؛ وهما متساويان، فالأزمنة المتساوية في دائرة معدل النهار ارتفاعاتها متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹يا› كل نقطة تتحرك في الكرة المستقيمة على دائرة موازية لدائرة معدل النهار وتنتهي إلى دائرة نصف النهار، ويُقسم قوس زمانها بقسمين متساويين، فإن ارتفاع الزمان الأول أعظم من ارتفاع الزمان الثاني. /

فلتكن دائرة ا ب جـ د دائرة نصف النهار في الكرة المستقيمة، ولتكن ١٥٣-ظ
قوس ب ح من الدوائر الزمانية الموازية لمعدل النهار، ولتتحرك عليها نقطة

1 أفقًا: أفق – 2 أو: و / قوسًا: قوس – 9 هو (الأولى): فهو – 10 ارتفاعاتها: ارتفاعها.

ط، فتقطع زمان ح ب، وليكن زمان ب ط مثل زمان ط ح؛ فأقول: إن ارتفاع زمان ح ط أعظم من ارتفاع زمان ب ط.



برهانه: أنا نجيز على نقطتي ط ح سطحين موازيين للأفق، وليقطعا دائرة نصف النهار على نقط ه ز ا جـ، وليكن فصلهما المشترك بينهما وبين دائرة نصف النهار ه ز ا جـ، وليكن الفصل المشترك لدائرة د ح ب ولدائرة نصف النهار خط ب ك ل د، والفصلان المشتركان لهذه الدائرة ولدائرتي ا ح جـ ه ط ز خطي ح ل ط ك، ولتكن نقطة م سمت الرأس. فلأن دائرة ا ب جـ د نصف النهار ودائرة ب ح د دائرة موازية لمعدل النهار، يكون قوس ب ح د نصف دائرة وخط ب د قطرها. ولأن دائرة ا ب جـ د قامت على الأفق على زوايا قائمة – لأنها دائرة نصف النهار – يكون الأفق قائمًا على هذه الدائرة على زوايا قائمة، فتكون السطوح الموازية للأفق قائمة على هذه الدائرة على زوايا قائمة، فسطحا ه ط ز ا ح جـ قائمان على دائرة ا ب جـ د على زوايا قائمة. ودائرة ب ح د أيضًا قائمة على دائرة ا ب جـ د على زوايا قائمة، وهي مقاطعة لسطحي ه ط ز ا ح جـ. وكل سطحين قائمين على سطح على زوايا قائمة ويكونان متقاطعين، فإن فصلهما المشترك عمود على ذلك السطح؛ فخطا ح ل ط ك عمودان على خط ب د، وخط ب د هو قطر دائرة ب ح د، وقوسا ب ط ط ح متساويتان، وقد تبين فيما تقدّم أنه إذا كان في

1 فتقطع: فيقطع – 3 وليقطعا: وليقطع – 4 نقط: نقطة / فصلهما المشترك: يأخذ بهذه الصيغة، ويعني فصل كل واحد من السطحين، ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 6 والفصلان المشتركان: والفصلين المشتركين – 12 ا ح جـ قائمان: ا ه جـ قائمتين – 13 أيضًا قائمة: مكررة – 14 ا ح جـ: ا ح د – 15 متقاطعين: مقطعين – 17 متساويتان: متساويتين.

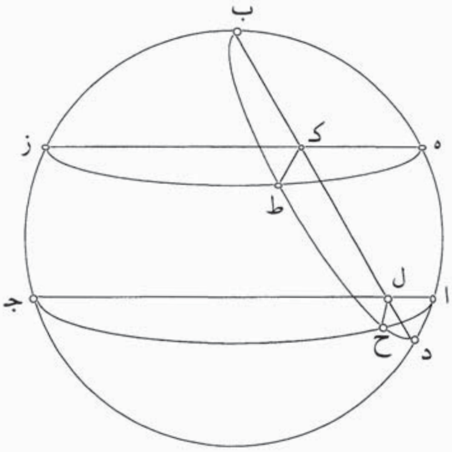
دائرة قطر، وفُصل من المحيط قوسان متساويان، وأخرج منهما عمودان على القطر، فإنهما يقسمان القطر بأقسام يكون ضرب القسمين اللذين يفصلهما العمود الأول أحدهما في الآخر ربع السطح الذي يحيط به القطر كله والخط الذي يفصله العمود الثاني؛ فضرب د ب في ب ل أربعة أمثال ضرب د كـ في كـ ب.

وأيضًا، لأن دائرة ب ح د من الدوائر الموازية لمعدل النهار في الكرة المستقيمة، تكون قائمة على الأفق ‹و›على جميع السطوح الموازية للأفق على زوايا قائمة، فدائرة ب ح د قائمة على سطح دائرة ا ح جـ على زوايا قائمة. وكذلك دائرة ا ب جـ د أيضًا قائمة على سطح ا ح جـ، فخط ب ل عمود على سطح ا ح جـ، فـ ب ل عمود على ا جـ، وكذلك أيضًا هو عمود على ز كـ ه الموازي لـ جـ ا. ولأن دائرة ا ب جـ د دائرة نصف النهار ونقطة م سمت الرأس، تكون نقطة م قطب دائرة الأفق وقطبَ جميع الدوائر الموازية له، فقوس م ا مثل قوس م جـ، فقوس ا ب أعظم من قوس ب جـ. وقد خرج ب ل د عمودًا على ا جـ، يكون قوس ب جـ د أقل من نصف دائرة. وضرب د ب في ب ل أربعة أمثال ضرب د كـ في كـ ب، وكـ ز ل جـ عمودان، يكون قوس ز جـ أعظم من قوس ب ز كما في الشكل الثالث. ولأن سطحي ه ط ز ا ح جـ موازيان للأفق، يكون قوس ز جـ ارتفاع زمان ط ح وقوس ب ز ارتفاع زمان ط ب، لما تبين في الشكل التاسع. وقوس ز جـ أعظم من قوس ب ز، فارتفاع زمان ح ط أعظم من ارتفاع زمان ب ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹يب› كل نقطة تتحرك في الكرة المائلة على دائرة من الدوائر الزمانية وتكون مارة على سمت الرأس، وتنتهي النقطة بحركتها إلى سمت الرأس، ويقسم قوس زمانها بقسمين متساويين، فإن ارتفاع ‹الزمان› الأول أصغر من ارتفاع الزمان الثاني.

1 قوسان متساويان: قوسين متساويين / منهما: منها – 15 عمودان: عمودين – 17 موازيان: موازيين / ارتفاع: مكررة – 18 ط ب: د ط ح.

فلتكن دائرة ا ب جـ د دائرة نصف النهـار في الكرة المائلة، ونقطة ب سمت الرأس، ودائرة ب ح د من الدوائر الزمانية، ولتتحرك عليها نقطة، فتقطع زمان ح ب، وليكن زمـان ب ط مثل زمان ط ح ؛ فأقول: إن ارتفاع زمان ط ح أصغر من ارتفاع ‹زمان› ب ط.



برهان ذلك: أنا نخرج من نقطتي ط ح سطحين موازيين للأفق، وليكونا ه ط ز ا ح جـ، وليكن فصلهما المشترك ه ز ا جـ. والفصل المشترك لدائرتي ا ب جـ د ‹ب ح د› خط د ل ك ب، والفصلان المشتركان لدائرة ب ح د ودائرتي ه ط ز ا ح جـ خطا ط ك ل ح. فلأن دوائر ب ح د ه ط ز ا ح جـ قائمة على سطح دائرة ا ب جـ د على زوايا / قائمة، يكون خطا ط ك ح ل ١٥٤-و عمودين على سطح الدائرة، فهما عمودان على خط ب د. وخط ب د قطر دائرة ب ح د، وقوس ب ط مثل قوس ط ح، فضرب د ب في ب ل أربعة أمثال ضرب د ك في ك ب. ولأن نقطة ب سمت الرأس ودائرة ا ح جـ موازية للأفق، تكون قوس ا ب مثل قوس ب جـ. ولأن الكرة مائلة، تكون دائرة ب ح د مائلة على السطوح الموازية للأفق، ويكون خط ب ل يحيط مع خط ا ل جـ بزاوية حادّة.

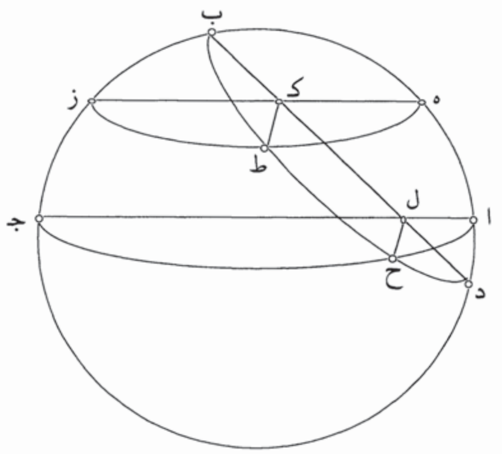
ولأن قوس ا ب جـ ليست بأعظم من نصف دائرة وقوسَ ا ب مثل قوس ب جـ وخطَّ ب ل يحيط مع خط ل جـ بزاوية حادة وضربَ د ب في ب ل

7 د ل ك ب: د ك ا ح – 8 خطا: خطي – 11 ب ل: د ل.

أربعة أمثال ضرب د ك في ك ب وخطّ ك ز موازٍ لخط ا جـ، فقوس ز جـ أصغر من قوس ب ز كما تبين في الشكل الرابع. ولكنّ قوس ز جـ هو ارتفاع زمان ط ح، وقوس ب ز هو ارتفاع زمان ب ط، فارتفاع زمان ط ح أصغر من ارتفاع زمان ب ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

〈يجـ〉 كل نقطة تتحرك في الكر المائلة على دائرة من الدوائر الزمانية، إما دائرة معدل النهار أو دائرة موازية لها مما يلي جهة الميل، وتنتهي في حركتها إلى دائرة نصف النهار، ويقسم قوس زمانها بقسمين متساويين، فإن ارتفاع الزمان الأول 〈أعظم〉 من ارتفاع الزمان الثاني.

فلتكن دائرة ا ب جـ د دائرة نصف النهار في الكرة المائلة، ودائرة ب ح د من الدوائر الزمانية، ولتكن إما دائرة معدل النهار أو دائرة موازية لها مما يلي الميل؛ ولتتحرك عليها نقطة تقطع زمان ح ب، وليكن زمان ب ط مثل زمان ط ح؛ فأقول: إن ارتفاع زمان ط ح أعظم من ارتفاع زمان ب ط.



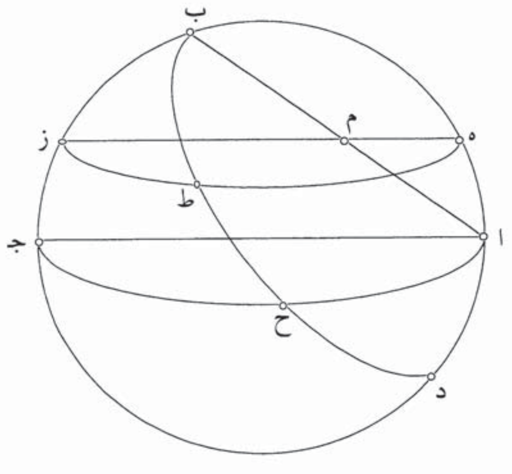
برهان ذلك: أنا نخرج من نقطتي ط ح سطحين موازيين للأفق. فلأن الكرة مائلة ودائرة ب ح د من الدوائر الزمانية ودائرة ا ح جـ موازية للأفق، تكون دائرة ب ح د مائلة على سطح ا ح جـ، ويكون خط ب ل يحيط مع خط ا ل جـ بزاوية حادة، ولتكن زاوية ب ل جـ. ولأن دائرة ب ح د إما دائرة معدل النهار أو موازية لها مما يلي الميل، يكون قوس ب جـ أصغر من قوس ا ب. ويكون قوس ب ه د ليست بأعظم من نصف دائرة، ود ب قطر

6 جهة: مكررة – 15 ب ح د: ب ح جـ – 18 ب ه د: ب ح د.

دائـرة ب ح د ، وقــوس ب ط مــثل قــوس ط ح ، وسطحـا ا ح جـ ه ط ز متوازيان وقائمان على دائرة ا ب جـ د على زوايا قائمة ، يكون ضرب د ب في ب ل أربعة أمثال ضرب د ك في ك ب كما تبين قبل هذا . وقوس ا ب جـ ليست بأعظم من نصف دائرة ، وقـوس ا ب أعظم من قـوس ب جـ ، وزاوية ب ل جـ حادة ، وقوس ب ح د ليست بأعظم من نصف دائرة ، وضرب د ب في د ل أربعة أمثال ضرب د ك في ك ب ، وك ز مـواز لـ جـ ا ، فقوس ز جـ أعظم من قوس ز ب ، كما تبين في الشكل الخامس [والسادس] . وقوس ز جـ هو ارتفـاع زمان ح ط وقـوس ب ز هو ارتفـاع زمـان ب ط ، فارتفاع زمان ح ط أعظم من ارتفاع ‹زمان› ب ط ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

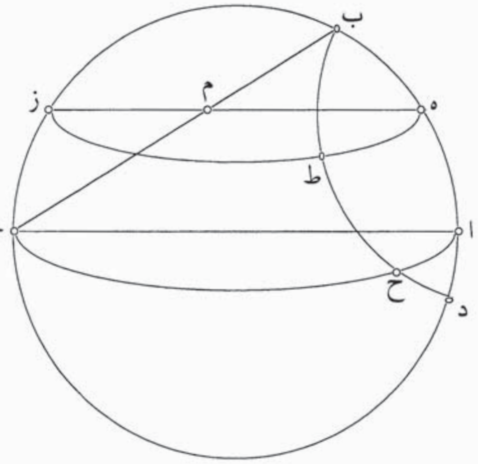
‹يد› كل نقطة تتحرك في الكرة المائلة على دائرة من الدوائر الزمانية موازية لمعدل النهار في جهة القطب / الظاهر ، وتنتهي بحركتها من الأفق إلى ظ-١٥٤ دائرة نصف النهار ، ويقسم قوس زمانها بقسمين متساويين ، فإن ارتفاع الزمان الأول ربما كان مساويًا لارتفاع الزمان الثاني ، وربما كان أصغر من ارتفاعه وربما كان أعظم.

فلتكن دائرة ا ب جـ د نصف النهـار في الكرة المائلة ، ودائرة ب ح د موازية لمعدل النهار مما يلي جهة القطب الظاهر ، ودائرة ا ح جـ أفقًا ، وليكن زمان ب ط مساويًا لزمان ح ط ؛ فأقول : إن ارتفـاع ‹زمان› ط ح ربما كـان مـساويًا لارتفـاع زمـان ط ب ، وربما كـان أصـغـر وربما كـان أعظم.



برهانه : أنا نوتر أعظم قوسي ا ب ب جـ ، وليكن في الصورة الأولى خط ا م ب وفي الصورة الثانية خط ب م جـ ، ونجيز على نقطة ط سطحًا موازيًا للأفق ، وليكن فصله المشترك خط ه م ز .

3 وقوس : فقوس – 5 ب ل جـ : جـ ل ح / وقوس : فقوس – 19 أفقًا : أفق .

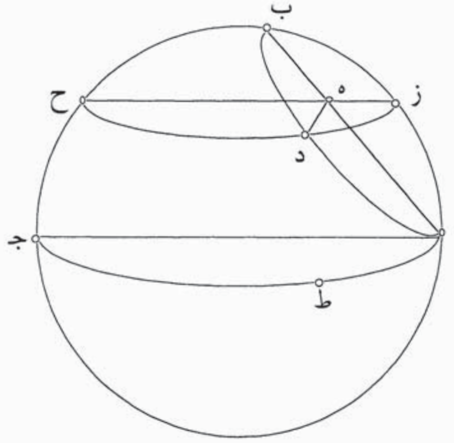


فخط م ا، أو جـ م، إما أن يكون مساويًا لنصف قطر الدائرة، وإما أن يكون أعظم، وإما أن يكون أصغر. فلأن قوس ا ب جـ نصف دائرة وفيها وتر ا ب، أو ب جـ، وم ز موازٍ للقطر، يكون – متى كان خط ا م، أو م جـ، مثل نصف قطر دائرة ا ب جـ د – قوس ا ه، أو جـ ز، مساويًا لقوس ‹ه ب أو› ز ب، وإن كان الخط أصغر من نصف القطر فإن القوس أصغر من القوس. وإن كان الخط أعظم ‹كان القوس أعظم من القوس›، كما تبين في الشكين و [وح]. وقوس جـ ز، أو ا ه، هو ارتفاع زمان ح ط، وقوس ز ب ‹أو ه ب›، هو ارتفاع زمان ط ب. فإن كان خط ا م، أو جـ م، مساويًا لنصف القطر، فإن ارتفاع الزمان الأول مساوٍ لارتفاع الزمان الثاني. وإن كان أصغر، فإن ارتفاع الزمان الأول أصغر؛ وإن كان أعظم، فإن ارتفاع الزمان الأول أعظم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹يه› كل نقطة تتحرك في الكرة المائلة على دائرة من الدوائر الزمانية الموازية لمعدل النهار فيما يلي القطب الظاهر، ويكون جميع الدائرة ظاهراً على الأفق مماسًا له، وتنتهي النقطة بحركتها إلى دائرة نصف النهار، ويقسم قوس الزمان بنصفين، فإن ارتفاع الزمان الأول أصغر من ارتفاع الزمان الثاني.

5 القوس: القطر – 13 ظاهراً: ظاهر – 14 مماسًا: مماسة.

فلتكن دائرة ا ب جـ دائرة نصف النهار في الكرة المائلة، ودائرة ا ط جـ دائرة الأفق، ودائرة ب د ا الدائرة الزمانية التي تحركت عليها النقطة ‹آ›؛ ولتكن قوس ا د مثل قوس د ب؛ فأقول: إن ارتفاع زمان ا د أصغر من ارتفاع زمان د ب.



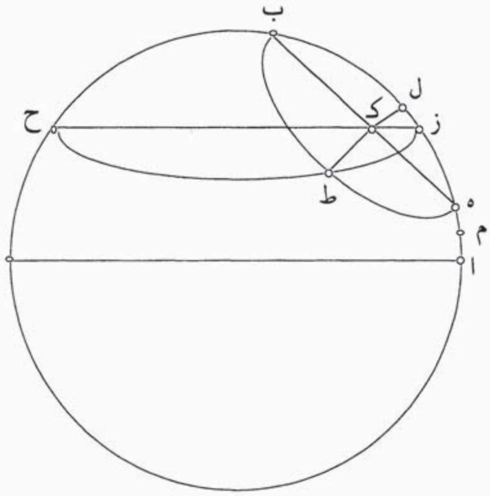
برهانه: أنا نجيز على نقطة د سطحًا موازيًا للأفق، وليقطع دائرة ا ب جـ على خط ز ه ح، ولتقطع دائرة ا د ب دائرة ا جـ ب على خط ا ه ب، وليكن د ه الفصل المشترك بين دائرتي ا د ب ز د ح. فلأن دائرتي ا د ب ز د ح قائمتان على دائرة ا ب جـ على زوايا قائمة، يكون فصلهما المشترك عمودًا على الدائرة. فخط د ه عمود على دائرة ا ب جـ، فهو عمود على خط ا ب. ولأن قوس ا د مثل قوس د ب ود ه عمود، يكون خط ا ه مثل خط ه ب. ولأن ا ه مثل ه ب وخط ز ه ح موازٍ لخط ا جـ، يكون قوس جـ ح أصغر من قوس ح ب، وقوس ا ز أصغر من قوس ز ب، كما تبين في الشكل ز. فإن كان قوس جـ ب ليس بأعظم من قوس ا ب، كان قوس ح جـ ارتفاع زمان ا د وقوس ح ب ارتفاع زمان د ب.

فإن كان قوس ا ب أصغر من قوس ب جـ، كان قوس ا ز ارتفاع زمان ا د وقوس ز ب ارتفاع زمان د ب. وقوسا ا ز ح جـ أصغر من قوسي ح ب ز ب. فارتفاع زمان ا د أصغر من ارتفاع زمان د ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

13 جـ ب: د ح – 16 ح ب ز ب: جـ د ز د، الأفضل ز ب ح ب – 17 فارتفاع: وارتفاع.

〈يو〉 كل نقطة تتحرك في الكرة المائلة على دائرة من الدوائر الزمانية الموازية لمعدل النهار مما يلي القطب الظاهر، ويكون جميعها ظاهراً على الأفق مرتفعًا فيه، وتنتهي [إلى] النقطة في حركتها إلى دائرة نصف النهار، ويقسم 〈قوس〉 زمانها بنصفين، فإن ارتفاع الزمان الأول ربما كان مساويًا لارتفاع الزمان الثاني، وربما كان أصغر منه وربما كان أعظم.

فلتكن دائرة ا ب جـ دائرة نصف النهار في الكرة المائلة، ودائرة ا د جـ الأفق، ودائرة ب ط ه من الدوائر الزمانية، ولتكن مرتفعة على الأفق بمقدار قوس ا ه؛ وليكن ه ط مثل ط ب؛ فأقول: إن ارتفاع زمان ه ط ربما كان مساويًا لارتفاع زمان ط ب وربما كان أصغر وربما كان أعظم.



برهانه: أنا نجيز على نقطة [ه] ط سطحًا موازيًا للأفق، وليفصل دائرة ا ب جـ على خط ز كـ ح، وليكن الفصل المشترك / بين الدائرة الزمانية ١٥٥-و
ودائرة نصف النهار خط ب كـ ه والفصل 〈المشترك〉 بين الدائرة الزمانية وبين الدائرة الموازية للأفق 〈خط〉 ط كـ.

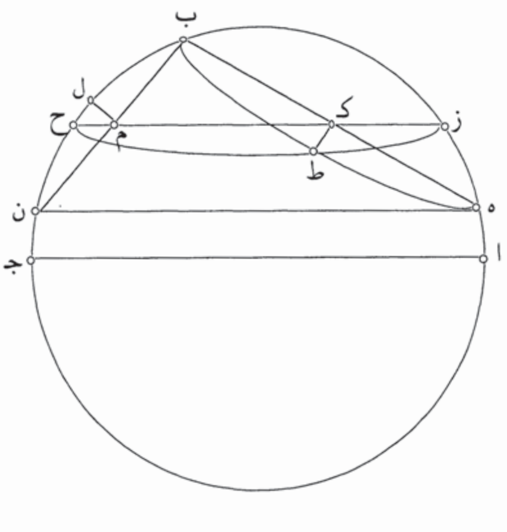
وقد تبين في الشكل الذي قبل هذا أن خط ب كـ مثل خط كـ ه. وليكن أولاً قوس ا ب أصغر من قوس ب جـ، ونخرج من نقطة كـ خط كـ ل على زوايا قائمة، فتكون قوس ه ل مثل قوس ل ب. وقوس ا ه إما أن تكون

3 مرتفعًا: مرتفعة.

ضعف قوس ز ل، وإما أن تكون أقل من ضعفها، وإما أن تكون أعظم. ونقسم قوس ا ه بنصفين على م، فإن كانت ‹قوس› ا ه ضعف قوس ز ل، كان قوس م ه مثل قوس ز ل. وقوس ز ه مشتركة، فقوس م ز مثل قوس ه ل، وه ل مثل ل ب، فـ م ز مثل ل ب. وا م مثل ز ل، فـ ا ز مثل ز ب. وا ز هو ارتفاع زمان ه ط، وز ب هو ارتفاع زمان ط ب، فيكون ارتفاع زمان ه ط مساوياً لارتفاع زمان ط ب.

وإن كان قوس ا ه أقل من ضعف قوس ز ل، كان قوس م ه أصغر من قوس ز ل. وه ز مشترك، فـ م ز أصغر من ه ل. وه ل مثل ل ب، فـ م ز أصغر من ل ب. وا م أصغر من ز ل، فـ ا ز أصغر من ز ب، فارتفاع زمان ه ط يكون أصغر من ارتفاع زمان ط ب.

وكذلك إن كان ا ه أعظم من ضعف ز ل، كان ارتفاع زمان ه ط أعظم من ارتفاع زمان ط ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وأيضاً، فليكن قوس ب جـ أصغر من قوس ا ب، ونخرج من نقطة ه خط ه ن موازياً لخط ا جـ ونصل ب م ن، ونخرج م ل على زاوية قائمة. فلأن خط ه ك مثل ك ب، يكون خط ب م مثل ‹خط› م ن، وقوس ب ل مثل قوس ل ن. وقوس جـ ن إما أن يكون ضعف قوس ل ح، وإما أن يكون أصغر، وإما أن يكون أعظم.

فإن كان ضعفه كان قوس جـ ح مثل قوس ح ب. وإن كان أصغر من ضعفه، كان ⟨قوس⟩ جـ ح أصغر من ⟨قوس⟩ ح ب، وإن كان أعظم، كان أعظم لما تبين في الصورة الأولى. وقوس جـ ح هو ارتفاع زمان ه ط، وقوس ح ب هو ارتفاع زمان ب ط، ربما كان مساوياً لارتفاع زمان ط ب، وربما كان أصغر، وربما كان أعظم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تم القول في ارتفاعات الكواكب
والحمد لله رب العالمين.

القسم الثاني

الآلات والرياضيات

خطوط الساعات، الرخامات الأفقية، بركار الدوائر العظام

مقدّمة

لقد شهد البحث في علم الفلك خلال حكم الخليفة المأمون (٨١٣-٨٣٣) ازدهاراً وتنشيطاً لم يسبق لهما مثيل بعد القرن الثاني في الإسكندرية. إنَّ إحدى ميزات هذه الانطلاقة الجديدة هي أنَّها قد حدثت في الفلكيّات الرياضيّة وفي الفلكيّات الرَّصدِيّة في آن واحد. ولقد اشتهرت في بدايات هذه الفترة أسماء كثيرة من بينها الفزاري ويحيى بن أبي منصور والفرغاني وحبش. وهذا ما يُشكِّل واقعة تاريخية معروفة وموصوفة من قِبَل المؤرِّخين. ولكن لم يُلْفَت الانتباه بشكل كافٍ إلى أنَّ هذا النشاط الكبير كان حافزاً لأنشطة أخرى، من بينها البحث في الآلات وخاصة في تلك التي كان بإمكان الفلكيين أن يستخدموها. إنَّ شهادة كاتب السِّيَر القديم النديم بليغة في هذا المضمار. وذلك أنَّ قراءة مقالات "الفهرست" المكرَّسة للفلكيين بداية من القرن التاسع تـُبيِّن بالفعل أنَّ الغالبية العظمى منهم قد درست الإسطرلابات والرخامات الشمسية والأكر المُحلـَّقَة أو بعض هذه الآلات. ولقد أكـّد النديم نفسه العلاقة القوية بين تقدُّم البحوث في الفلك، وخاصَّة في الأرصاد الفلكية، ودراسة الآلات الفلكية وصناعتها. وهو يكتب:

> واتسع للصناع العمل في الدولة العباسية منذ أيام المأمون إلى وقتنا هذا، فإنَّ المأمون لما أراد الرصد تقدم إلى بن خلف المروروذي فعمل له ذات الحلق، وهي بعينها عند بعض علماء بلدنا هذا؛ وقد عمل المروروذي الأسطرلاب[1].

إنَّ قائمةَ الفلكيين الرياضيين الذين كتبوا في هذا الموضوع، بدءاً من الفزاري، طويلة. نجدها في كتاب "الفهرست" وفي مؤلـَّفات كُتَّاب السِّيَر القدامى، وفي مؤلـَّفات كـُتـَّاب السِّيَر المتأخـِّرين الذين اقتبسوا عن القدامى[2]. يكفي أن نقول هنا إنـَّهم كانوا يشكـِّلون تقليداً حقيقيّاً. ولكن يُمكن التحقـُّقُ من وجود تقليد آخر ملازم للتقليد الأول، بواسطة أسماء المؤلـِّفين وعناوين كتبهم. ولقد ميَّز النديم هذا التقليد بعنوان خاص: "الكلام على الآلات وصنـّاعها"؛ إذ إنـَّه رمز بهذا العنوان إلى تقليد متكامل من صنـَّاع الآلات العلمية، حتى أنـَّه استخدم عبارة

---

[1] النديم، "كتاب الفهرست"، نشر ر. تجدُّد (طهران ١٩٧١)، ص. ٣٤٢.

[2] انظر: *C. Brockelmann, Geschichte der arabischen Literatur, 2^{e} éd. (Leyde, 1937-1942)*،
وانظر كذلك:
F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. V (Leyde, 1976), vol. VI (1978).

"الإسطرلابيّين" لتسمية صنـّاع الإسطرلاب، لأنَّ مهنتهم الجديدة هذه كانت موجودة بشكل مستقل. إنَّ تاريخ هذا التقليد في صناعة الآلات العلمية لم يُكتب بعد.

أما الآن، فإنَّ العناوين والدراسات تساعدنا على إبراز بعض التوجُّهات. تُعالج بعض الكتب فنَّ صناعة الآلة العلمية واستخدامها؛ وتصف كتبٌ أخرى طريقة استعمالها، مع شرح مُسهب أو مُقتضَب لقواعد اشتغالها؛ بينما يعالج بعضها الآخر نظرية الآلة، ويعرض البراهين الرياضيّة الضرورية لفهمها؛ أما البعض الآخر، فإنـَّه يغتنم الفرصة لبسط الآلات الرياضيّة نفسها. وهكذا ينتمي العديد من الكتب المكرَّسة للإسطرلاب إلى النوعين الأوَّلَيْن، بينما ينتمي كتاب "الكامل" للفرغاني إلى النوع الثالث، لأنَّ مؤلـّفه يبدأ بدراسة دقيقة - هي الأولى من نوعها وفقاً لما نعرفه - لتسطيح الكرة. أما النوع الأخير، فهو مُمَثـَّل بالقوهي وبابن سهل اللذين انطلقا من الإسطرلاب لبسط دراسة كاملة للإسقاطات، بما فيها تسطيح الكرة الذي هو إسقاط بين إسقاطات أخرى كثيرة. يظهر من هذا الوصف السريع أنَّ علاقة جدلية دقيقة قد تأسَّست بين البحث في الآلات والبحث الرياضي، وأنَّ من الخطأ أن يُهْمِلَها المؤرِّخُ في تاريخ العلوم.

إنَّ لدراسة الرُّخامات الشمسية قصة مماثلة لقصة الإسطرلابات. فلقد كتب في القرن التاسع، حول الرُّخامات الشمسية واستعمالها، علماءٌ بارزون كالخوارزمي وحبش الحاسب وبني الصبَّاح والفرغاني وثابت بن قرة، والماهاني فيما بعد. ولكنَّ كلَّ شيء يدلُّ على أنـَّه قد وَجَب انتظار إبراهيم بن سنان (٢٩٦/٩٠٩-٣٣٩/٩٤٦) قبل أن ترى النورَ كتابة مهمّة حول الرُّخامات. لقد أعدَّ ابن سنان، بالفعل، نظرية للرخامات الشمسية مرتكزة على قواعد هندسيّة متينة[٣]. ولقد شكـَّلت الدراسة الرياضيّة للرُّخامات، هي أيضاً كما حدث في حالة الإسطرلاب، فرعاً علمياً سُمِّيَ الاختصاصيون فيه "أصحابَ الأظلال"، وفقاً لعبارة ابن الهيثم، كما تمَّ الاعتِراف بخصوصيّة القائمين على صناعة الرُّخامات.

[٣] لقد شرحنا بالتفصيل، في مكان آخر، هذه الإسهام لابن سنان.

لقد كثُرت وتعدَّدت، في نهاية القرن التاسع وبداية القرن العاشر، الكتابات المكرَّسة للرُّخامات الشمسيّة، وخاصَّة مع كتاب ابن سنان[٤]. لقد شكَّلت هذه الكتابات، بالإضافة إلى صناعة الرُّخامات، نقطةَ الانطلاق لدراسة ابن الهيثم. لنلاحظ في البدء أنَّ ابن الهيثم، مثل كبار الرياضيّين في عصره، لم يأنَف من كتابة المؤلـَّفات المكرَّسة للتعليم والتطبيقات العملية. وهذه الخاصّة الثقافية تستحقُّ أن يُلفَتَ الانتباه إليها، لأنـَّها طَبعت النشاطَ العلميَّ في ذلك العصر. لنذكِّر مثلاً بأنَّ ثابت بن قرة كتب مؤلـَّفاً مُبسَّطاً، حول قياس المساحات والأحجام، مُخصَّصاً للمبتدئين؛ كما أنَّ حفيده ابن سنان كتب مؤلـَّفاً من دون براهين مخصّصاً لصُنـّاع الرُّخامات؛ ولقد كتب أبو الوفاء البوزجاني مؤلـَّفَيْن لنفس الغاية[٥]. والقائمة طويلة وغَنِيّة. وإذا قصرنا كلامنا على ابن الهيثم وحده، نقول إنـَّه قد ألـَّف كتاباً في الهندسة العمليّة مخصَّصاً للمسّاحين[٦].

لنلاحظ، من جهة أخرى، أنَّ ابن الهيثم، مثل ابن سنان ومثل عدد من أسلافه ومعاصريه (البيروني مثلاً)، قد اهتمّ بشكل خاصّ بدراسة الآلات الرياضيّة وبطرائق صناعتها أيضاً. ولقد ظهر في هذا السياق نوعٌ جديد من الكتابات، وهو الموجَزُ المخصَّص للصنـّاع والمكتوبُ بيدِ رياضيٍّ. كانت الفائدة منه مزدوجة: فدراسة الآلة تتطلـَّب إعدادَ نظرية رياضيّة، كما أنَّ المعرفة الرياضيّة تسمح باختراع الأداة التي يُمكن أن تكون فائدتها اجتماعية أيضاً. ونجد ابن الهيثم في هذين الميدانين في آن واحد.

لقد كرَّس ابن الهيثم، على أرجح الاحتمالات، بعد القوهي وابن سهل، مؤلـَّفاً من مقالتين لرسم القطوع المخروطية. وهذا المؤلـَّف مفقود اليوم، ومن المُحتَمَل أن يكون قد خصَّصه لدراسة آلة لرسم القطوع المخروطية، مثل البركار التام للقوهي[٧]. ويُشير ابن الهيثم ، من جهة أخرى، في كتابه "في المرايا المُحرِقة بالقطوع" إلى آلة مُشابهة لهذا البركار[٨].

---

[٤] انظر "في آلات الأظلال" في :

R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle* (Leyde, 2000)، الفصل الرابع.

[٥] انظر كتابه "فيما يحتاج إليه الصانع من أعمال الهندسة "، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٢٧٥٣، وكذلك كتابه : "فيما يحتاج إليه الصنّاع والعمّال من علم الحساب"، تحقيق أ. س. سعيدان في "علم الحساب العربي"، (عمان، ١٩٧١)؛ انظر أيضاً سيد علي رضا جَزبي: "الهندسة التطبيقية" (طهران ١٩٩١).

[٦] انظر: "في أصول المساحة"، ضمن المجلـّد الرابع من كتابنا هذا.

[٧] انظر :

R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* (Londres, 2005) ، الفصل الخامس.

[٨] انظر ابن الهيثم "مجموع الرسائل" منشورات المكتبة الشرقية العثمانية (حيدرآباد، ١٩٣٨-١٩٣٩)، ص. ١١ :" وقد بيَّنـّا نحن في مقالة نذكر فيها استخراج جميع الخطوط بطريق الآلة".

ولقد كتب أيضاً مؤلَّفاً صغيراً حول آلة أخرى هي بركار لرسم الدوائر العظام. وهذا النصُّ المُحقَّق هنا يتضمَّن في آن واحد دراسةً هندسيّة لهذا البركار ووصفاً لطرائق صناعته.

إنَّ لابن الهيثم أيضاً كتابين حول الرُّخامات الشمسيّة يستجيبان للفائدة المُزدوجة التي تحدّثنا عنها سابقاً. الكتابُ الأول "في الرُّخامات الأفقيّة" مخصَّصُ بشكل ظاهر لصنـّاع هذه الرُّخامات. ولقد حرَّره، خلافاً لعادته، بأسلوب أكثر وصفاً وأقلّ برهاناً. يهتمّ هذا الكتاب خصوصاً بطرائق صناعة الرُّخامات المرتكزة على معرفة أوَّلية بعلم الفلك. وهو يُعلن هدفه من تحرير هذا الكتاب قائلاً: "لكنَّ غرضنا في هذا القول ذكر الجمل والأصول التي يعتمد عليها في عمل الرُّخامات، والإشارة إلى كيفية العمل، ومواضع الحاجة إلى المعاني التي يتكرَّر ذكرها في كتب أصحاب الأظلال فقط"[٩]. وهو يَعِدُ في نهاية هذا الكتاب بتحرير كتاب ثانٍ حول آلات الأظلال: "وسنبتدئ من بعدها بكتاب لآلات الأظلال نستوفي فيه جميع المعاني والأغراض والأعمال التي تقتضيه هذه الصناعة "[١٠]. يتعلـّق الأمر إذاً بكتاب حول "آلات الأظلال"، وهو عنوان كتاب ابن سنان. ولكنَّ المشروع مُختلِفٌ، هذه المرة، لأنَّ مثل هذا الكتاب برهانيٌّ بالضرورة. وهذا ممّا يجعلنا نَظنُّ بأنَّ الأمر يتعلـّق بكتاب "في خطوط الساعات" الموجودِ بين يدينا.

[٩] انظر: "في الرخامات الأفقية"، ص. ٦٢٣، س ١-٣.
[١٠] انظر المرجع السابق، ص ٦٢٣، س ٤-٥.

الفصل الأول

خطوط الساعات

١ ـ مُقدّمة

يتابع ابن الهيثم في هذا الكتاب "في خطوط الساعات" تحقيق مشروع ابن سنان، الذي يهدف في أهمّ قسم منه إلى رفع نظرية الرُّخامات الشمسية إلى أعلى مستوى ممكن. إنَّ من الواضح أنَّ ابن الهيثم قد حرّر، في الواقع، هذا المؤلّف الثاني تبعاً لما حرَّره ابن سنان ولكن ضدَّه أيضاً. هذا المنهجُ العلمي الحقيقي الذي سلكه ابنَ الهيثم، قاده إلى التجديد في عدّة ميادين، من ضمنها حساب المثلثات. ولقد تناول ابن الهيثم من جديد إحدى النتائج المثلثاتية، التي حصل عليها هنا، في مؤلّفين أساسيَّين آخريْن في ميدانيْن مُختلفين: مؤلّفه في علم انكسار الضوء، وهو "في الكرة المُحرِقة"، ومؤلّفه في علم الفلك، وهو "هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"[١]. سنبدأ إذاً بهذا الكتاب "في خطوط الساعات" قبل أن نعود، وفقاً لمنهج تراجعي، إلى كتابه الأوَّل "في الرخامات".

ولكي نُدرك ماهية مشروع ابن الهيثم، ولكي نقدِّر أيضاً مدى ابتعاده عن ابن سنان، يجب أن نعود بسرعة إلى مؤلّف هذا الأخير "في آلات الأظلال". أراد ابن سنان أن يُحقّق فيه ثلاثة أهداف في آن واحد: تصوُّر الوسائل الهندسية لنظرية موحَّدة للرخامات، عدم التوقّف عند وصف الآلة، كما كان يفعل أسلافُه، بل برهنة مبادئ بناء الآلة ومبادئ استعمالها، وأخيراً استعراض الأخطاء التي ارتكبها الأسلاف. ولقد أخبرنا ابن سنان بنفسه كيف تصوَّر فعلاً هذه المهمَّة:

> "ويقال إن القدماء ومن أتى بعدهم إلى هذا الوقت كانوا يجعلون لكل سطح من السطوح رخامة مفردة، ويستخرجون خطوطها بطريق خاصّ لها، فحقّقتُ والتمستُ طريقاً كلياً عاماً لكل سطح ببرهان واحد وأَثبَتهُ"[٢].

وهذا يعني، بعبارة أخرى أنَّ لكل مكان L نَتخِذَه، يوجد عددٌ من السطوح يُمكن أن نختار سطحاً منها: سطح الأفق، أو سطح نصف النهار، أو أي سطح يكون له ارتفاع معلوم وخط تقاطع معلوم مع الأفق. إنَّ الفكرة التي سمحت لابن سنان بإعداد نظرية موَحَّدة هي التالية:

---

[١] انظر القسم الأوَّل ، الفصل الأوَّل

[٢] انظر: "في آلات الأظلال" ضمن الكتاب:
R. Rashed et H. Bellosta, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle (Leyde, 2000)، ص. ٣٤٣، س. ١-٣.

كلُّ سطح مأخوذ في مكان ما L يكون موازياً لمستوي الأفق لمكان آخر L' يُحَدَّدُ على نصف الكرة الشمالي (وهو نصف الكرة الوحيد الذي تناوله ابن سنان).

هل كان ابن سنان أوّل من تَصوَّر هذا المشروع؟ كل شيء يوحي بذلك. يُطالب ابن سنان بأسبقيَّته بلا مواربة:

"فمن ينسب جميع ما استخرجناه من ذلك إلينا، فقد أنصف. ومن ينسبنا إلى الاستعانة بما عمله من تقدَّمنا، فيما لهم فيه من أعمال، فلنا من الزيادة عليهم الجمع لما تفرّق من أعمالهم وإقامة البرهان على جميعها؛ فما علمت أنَّ أحداً منهم أقام برهاناً على أكثر ما عملوه، وإنما كان يقال إنهم يصفون أعمال الرخامات صفة فقط، ولنا بعد ذلك من الزيادة الأشياء الغريبة التي لم يتقدمنا إليها أحدٌ أصلاً."[٣]

لا شيء، وفقاً لمعرفتنا، يجعلنا نشكُّ بهذه الأقوال.

إنَّ المقطع الذي وصل إلينا من الكتاب الثاني لابن سنان يحتوي على جدول بالمواضيع التي عالجها فيه. ونعلم من هذا الجدول أنَّ هذا الكتاب الثاني يتألّف من سبعة عشر فصلاً؛ عنوان الفصل الأول منها هو: "في أنَّ ما استعمله من كان قبلنا من أصحاب التعاليم في رسم خطوط الساعات ليس بصواب."[٤] يريد ابن سنان أن يُبيِّن في هذا الفصل أنَّ الأسلاف قد أخطأوا عندما أكّدوا أنَّ النقاط، التي تخصُّ ساعة مُعيَّنة h على الرخامة لكل أيام السنة، موجودة على خطٍّ مُستقيم. نجد هذا الانتقاد قبل ابن سنان بقلم جدِّه ثابت بن قرّة في مؤلّفه "في الرخامات":

"الرخامات الموضوعة في سطح الأفق لا بدّ من أن تنقص ساعاتها من أوّل النهار شيئاً ومن آخره شيئاً فلا تخطّ فيها، وتحتاج فيها إلى معرفة الظلّ والسمت للساعات أو للساعات وأجزائها إما الزمانية وإما الاعتدالية[٥]، أيّ ذلك قدرت أن تخطّه في الرخامة، وأن تعمل ذلك لأوّل الجدي ولأوّل السرطان، ثم تخطّ ما بينها من خطوط الساعات على استقامة، أو تعمل ذلك أيضاً للبروج الأخَر فتقع خطوط الساعات أصحّ ولا تكون مستقيمة."[٦]

كل شيء يجري وكأن ابن سنان كان يريد التدقيق في نص جدِّه وأن يبرهن أنَّ الخطوط ليست مستقيمة. ولكن من هم هؤلاء الأسلاف الذين كانوا موضع انتقاد ابن سنان؟ هل هم الماهاني وأبو سعيد الضرير وآخرون، مثل الكِندي أو ديودورس (*Diodore*) أيضاً؟

---

[٣] انظر المرجع السابق، ص. ٣٤١، ٢٣-٢٨.
[٤] انظر المرجع السابق، ص. ٤١٥، ٨-٩.
[٥] الساعة الاعتدالية تُمثّل الزمن الذي تدور الكرة السماوية خلاله بمقدار ١٥°. أما الساعة الزمانية فليس لها مقدار ثابت، وهي تُمثّل جزءاً من اثني عشر جزءاً من النهار، أو جزءاً من اثني عشر جزءاً من الليل. والساعات الزمانية ليست متساوية، فهي تتغيَّر بتغيُّر الأيام.
[٦] انظر: "في آلات الساعات التي تُسمَّى الرخامات" ضمن:
Régis Morelon : Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie Paris (1987)، ص. ١٣٤، ١١-١٦.

أردنا أن نُذكِّر بهذا لكي نتمكّن من تحديد مكان كتاب ابن الهيثم بين الكتب الأخرى. لقد استند ابن الهيثم إلى كتاب ابن سنان لِيُطَوِّر نظرية للرخامة يُمكن العمل بها في كل مكان. وكان يريد أن يذهب إلى أبعد مما ذهب إليه سلفه، وأن يُبَلِّغ عن الخطأ الذي ارتكبه في برهان قضية وردت في الكتاب الثاني. ولقد اعترض، في النهاية، على الانتقاد الذي وجَّهه ابن سنان إلى أسلافه.

إننا نتحقّق، في هذا المنهج المنظَّم الذي اتبعه ابن الهيثم، من وجود خاصّة كنا قد أشرنا إليها في أعماله العلميّة، سواء كان الأمر يتعلّق ببحوثه في هندسة اللامتناهيات في الصغر أو في هندسة القطوع المخروطية أو في دراساته في التحليل والتركيب... إلخ. لقد أراد متابعة هذا التقليد، في البحث، الذي كان ينتمي إليه، إلى أبعد حد ممكن لاستنفاد كل الإمكانيات المَنْطِقِيَّة فيه، وإذا أمكن، لإيصاله إلى غايته ولإتمامه. يرجع هذا التقليد إلى ابن سنان، وقبل هذا الأخير إلى رياضيّي القرن التاسع. وهكذا يتعلّق الأمر بتقليد كان ابن سنان قد أعاد صياغته.

٢- الشرح الرياضيّ

لنرجع الآن إلى مؤلّف ابن الهيثم. إنه يتألّف من إحدى عشرة قضية تنقسم إلى مجموعتين مُختلفتين. **المجموعة الأولى** من القضايا الهندسية والمثلّثاتية تحتلُّ أقلَّ بقليل من نصف المؤلّف. وهي تتضمَّن مُقَدِّمات، أو قضايا تمهيدية، لازمة لبرهان القضايا الخمس التي تتألّف منها **المجموعة الثانية** التي يعرض فيها نظريته الخاصّة بالرخامات. لنقرأ ما يقوله ابن الهيثم، لكي نُدرك بشكل أفضل المكان الذي تحتلّه المجموعة الأولى من المقدّمات الستّ:

"ونحن نقدّم لهذه المقالة مقدّمات هي في نفسها علوم مستفادة لم يذكرها على ما ظهر لنا أحد ممن تقدّمنا، ومع ذلك ينكشف بها جميع المعاني التي بيّناها في هذه المقالة[٧]."

إنَّ هذا النصّ، المهمّ بالتأكيد، يُخبرنا أنَّ هذه المقدِّمات هي من ابتكار ابن الهيثم الخاصّ، وأنَّها تشكّل بحدِّ ذاتها مؤلّفاً، ضمن المؤلّف "في خطوط الساعات"، يضمُّ المعلومات الضرورية لتأسيس نظرية الرخامات. سنشرح بالتفصيل هذه المقدِّمات فيما بعد. أما الآن

---

[٧] انظر "في خطوط الساعات"، ص. ٥٥٥، س ٢٣-٢٥

فلنذكّر فقط بأنَّ بعضها يُعالج تغيُّر الدوالّ المثلّثاتية، إذا استخدمنا مصطلحات لم تكن معروفة في ذلك العصر.

تأتي، بعد هذه المقدِّمات الست، القضايا الخمس المُرقّمة من ٧ إلى ١١. لقد عرض وبرهن ابن سنان القضية ٧. فأثبت بالفعل أنَّ أوضاع الشمس الثلاثة، الخاصّة بساعة زمانية h على مُعدِّل النهار وعلى دائرتين موازيتين لمعدِّل النهار متناظرتين بالنسبة إليه، تنتمي إلى دائرة عظمى. فيوافق هذه الأوضاع الثلاثة إذاً ثلاث نقاط على نفس الخط Δ في مستوي الرُّخامة.

يختلف برهان ابن الهيثم عن ذلك الذي قدَّمه ابن سنان. سنشرحه فيما بعد، كما نشرح ما يُبعد هذا البرهان عن برهان سلفه.

القضية الثامنة هي القضية التي لم يُثبتها ابن سنان لكل خطوط الساعات، وفقاً لقول ابن الهيثم (إنَّ نصّ ابن سنان مفقود): "وهذا المعنى هو الذي رام إبراهيم بن سنان تبيينه، ولم يقدر على تبيينه في كل واحد من خطوط الساعات"[٨]. يتناول ابن الهيثم دائرة زمانية، لتكن Γ، بين دائرة السرطان ومعدِّل النهار، ويُبيِّن أنَّ ظل النقطة E التي هي رأس المقياس لا يوجَد على الخطّ Δ عندما تكون الشمس في V ، حيث تكون V نقطة Γ المُرفَقة بالساعة الزمانية h في القضية ٧.

لنأخذ الدوائر الموازية لمُعدِّل النهار المُرفَقة بالأطوال المحسوبة بالنسبة إلى فلك البروج والمتتالية درجةً درجةً من $0°$ إلى $90°$ فيكون عددها 91. فنحصل، لكل ساعةٍ زمانيةٍ h معلومةٍ، على نقطة على كل دائرة من هذه الدوائر. النقطة التي تمَّ الحصول عليها على مُعدِّل النهار وكل نقطة من النقاط التسعين الأخرى، تُحدِّد دائرة عظمى؛ يقطع مُسْتَوي هذه الدائرة مستويَ الأفق وفقاً للخط Δ. وهكذا يكون معنا 90 خطّاً لكل ساعة زمانية h معلومة: $\left(\Delta_{i,h}\right)_{i=1}^{90}$.

يُبيِّن ابن الهيثم في القضية التاسعة أنَّ الزاوية، التي يُشكِّلها الخطّ $\left(\Delta_{90,h}\right)$ - الخاص بالانقلابيْن - مع أيّ خطٍّ من الخطوط $\left(\Delta_{i,h}\right)$، لا تُقدَّر بالحسّ. ليس لهذا القول أي صفة نوعيّة لأنه يَحْسب في مكان يتميَّز عرضه بقوس النهار المعلومة في يوم الانقلاب الصيفي، أي

[٨] انظر "في خطوط الساعات"، ص. ٥٧٢، س ١٦-١٧.

210°، إذا أخذنا 24° لميل فلك البروج بالنسبة إلى مُعدِّل النهار، وَإذا أخذنا 60° لنصف قطر الكرة السماوية.

يأخذ ابن الهيثم في البداية $h = 1$ ويتفحَّص وضع الخطَّين الموازيين لـِ $(\Delta_{90,1})$ وَ $(\Delta_{i,1})$، أي الخطين EP وَ EJ الخارجين في مستوي الأفق من رأس المقياس E (انظر الشكلين٩-٥ و٩-٦ في الشرح). وهو يُحدِّد أوَّلاً وضع EP بالنسبة إلى خطّ نصف النهار EN فيحسب لأجل ذلك PN وَ EN. ثم يدرس النسبة $\frac{JP}{EP}$ ويُبيِّن أنَّ $\frac{JP}{EP} < \frac{1}{174}$ مهما كانت قيمة i، إذا كان $h = 1$.

يعيد ابن الهيثم بعد ذلك الحساب عندما يكون $h = 5$، ويُبيِّن أننا نحصل على نفس المتباينة مهما كانت قيمة i. ويُبَيِّن أخيراً أنَّ في العرض المعني بالأمر يكون معنا نفس المتباينة مهما كانت قيمة h. فنستخلص إذاً أنَّ JP لا تُقدَّر بالحسّ بالنسبة إلى EP.

وتؤدِّي طريقة الحساب هذه، إذا طَبَّقْناها على عرض اختياريّ، إلى نفس النتيجة. وهكذا يتوصَّل ابن الهيثم إلى نتيجة عامّة، ويحصل بالإضافة إلى ذلك على مُتباينة بين النسب تسمح بضبط قيمة التقريب.

تهتمُّ القضيّة العاشرة بحساب طول الظلّ الأقصى على رخامة أفقية.

يستنتج ابن الهيثم، في القضيتين الأخيرتين، إذا كانت النقطة Q ظلَّ رأس المقياس E في نهاية الساعة الأولى من أيّ يوم، فإنَّ المسافةَ، من النقطة Q إلى خطّ التقاطع بين مستوي الرخامة مع مستوي الدائرة العظمى التي تُحدِّد الساعة الأولى على مُعدِّل النهار وعلى دائرتي السرطان والجدي، أقلُّ من $\frac{1}{30}$ من طول المقياس، أي أنه، كما قال ابن الهيثم، "ليس له قدر يمكن الحسّ أن يُدركه"[٩]. إنَّ رسم الخطّ $(\Delta_{i,1})$ على مستوي الرخامة لا يُمكن، مهما كانت قيمة i، تمييزه عن الخطّ $(\Delta_{90,1})$. إنَّ هذين الخطّيْن المختلفين بوصفهما كائنين رياضيَّين ليسا مُختلفين كشيئين طبيعِيَّيْن.

يُقوم ابن الهيثم، في هذه القضيّة ١١ نفسها، باستدلال مُشابه لكل عرض غير معدوم ولكل ساعة. فتكون خطوط الساعة "خطوطاً محسوسة". أما الأماكن ذات العرض المعدوم، فإنَّ خطوط الساعات فيها مستقيمة ومتوازية.

[٩] انظر "في خطوط الساعات"، ص.٥٨٦، س ٢٣.

وهكذا نفهم مغزى الانتقادات التي وجهها ابن الهيثم إلى ابن سنان، عندما يكتب:

"وأيضاً ، فإنه لم يُبيِّن مقدار التفاضل الذي به تخرج أطراف أظلال الساعة الزمانية عن الخط المفروض لتلك الساعة. وقد يحتمل أن يكون خروج أطراف الأظلال عن الخطّ المستقيم المفروض لتلك الساعة خروجاً يسيراً، ليس له قدر محسوس. والبرهان إنما يقوم على الخطّ التعليميّ الذي هو طول لا عرض له، والخطّ المرسوم في سطح الرخامة هو خطّ له عرض محسوس، يحتمل أن يكون مشتملاً على تفاضل الأظلال، إذا كان التفاضل غير محسوس أو ينقص عنها بمقدار لا يُعتدُّ به[١٠]."

وهكذا يكون خطأ ابن سنان، في رأي ابن الهيثم، هو أنه لم يرَ في خطوط الأظلال سوى خطوط رياضية. إنَّ هذا الانتقاد يتركنا نستشفُّ بعض الأفكار الرئيسة في مشروع ابن الهيثم الذي كان رياضياً كبيراً كما كان فيزيائياً أيضاً. إنّ الفكرة الهادية في هذا المشروع هي بالفعل "التركيب بين الرياضيات والفيزياء" عندما تُدرس الأشياء الخاصة بالطبيعة. يجب بالتأكيد استخدام الرياضيات عند دراسة الفيزياء، ولكن لا يمكن أن نقتصر الظلّ على الخطّ المستقيم ولا أن نقتصر الشعاع الضوئي على الخطّ الذي ينبثُّ عليه الضوء. إنَّ هذا الفارق هو بالتحديد ما يقنعنا بقبول حقيقة تقريبية. إنَّ هذه المعرفة قد أثْبِتَتْ طبعاً بكلّ الدِّقَّة المطلوبة، ولكننا نقبل فيها بعض التقريب. فالمسألة، إذاً، هي في معرفة التحكّم في هذا التقريب وفي تصويب الأخطاء المُرتكبة. وهذا ما سعى إليه ابن الهيثم بالتحديد.

إنَّ ابن الهيثم، باختصار، يعرض في هذا الكتاب نظرية عامة للرُّخامة الشمسية وللخطوط الزمانيّة المرسومة عليها؛ إنه يُثبت أنَّ نفس الرخامة يُمكن أن تُستخدَم في أيّ مكان إذا قَبِلْنا بخطأ لا يُعتدُّ به. تستعين هذه النظرية بوسيلة رئيسية وهي مبرهنات من حساب المثلّثات حول تغيُّر بعض الدوالّ مثل الدالة $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$، ومبرهنات من الهندسة الكروية تُعطي بعض المتباينات بين بعض النِسب؛ وتُستخدَم هذه المبرهنات بالتحديد لتقييم الحد الأعلى للخطأ المرتكب عند القبول بالقيَم التقريبية. يبدو هذا الاهتمام بالتحكّم بالأخطاء غيرَ مسبوق. وهذا ما جعل المُكتَسَبات النظرية والرياضيّة وكذلك المعرفية وافرة جداً.

سنُحلّل الآن ونشرح بالتتابع قضايا هذا الكتاب.

[١٠] انظر "في خطوط الساعات"، ص.٥٥٤، س ١١-١٧.

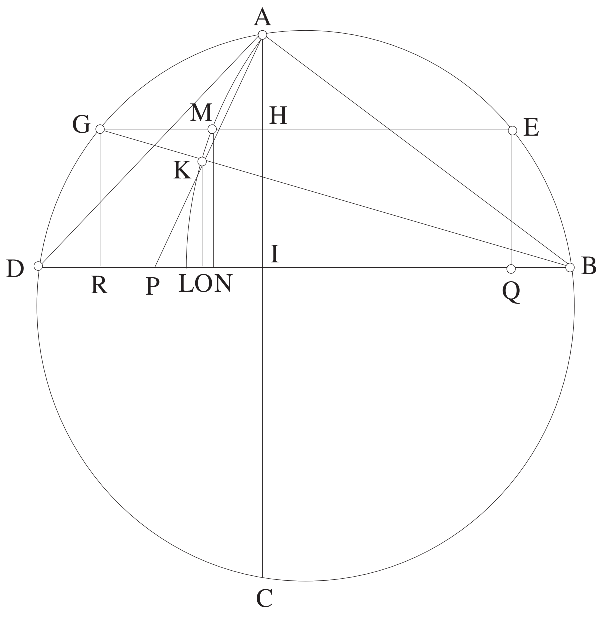
المقدّمة ١- ليكن معنا وتران متوازيان GE وَ DB في دائرة، من جهة واحدة بالنسبة إلى المركز مع $\widehat{EG} < \widehat{BD} < \pi$. لنأخذ عموداً على هذين الوترين يقطع القوس $\widehat{GE}$ على النقطة A، والوتر GE على النقطة H والوتر DB على النقطة I؛ فيكون حينئذ:

$$\frac{AI}{IH} < \frac{\widehat{AD}}{\widehat{DG}} \qquad (1)$$

وَ

$$\frac{AI}{AH} > \frac{\widehat{AD}}{\widehat{AG}} \,. \qquad (2)$$

إنَّ لدينا $BA < BG$ وَ $BG < BD$. الدائرة (B, BA) تقطع BG على النقطة K، وتقطع BD على النقطة L، وتقطع GE على النقطة M، حيث تكون M بين A وَ K.



الشكل ١

تقبل القوس $\widehat{AL}$ الزاوية المركزية $\widehat{ABL}$؛ وهذه الزاوية مُحاطة بالدائرة الأولى وتُوتِّر القوس $\widehat{AD}$؛ وكذلك تقبل القوس $\widehat{KL}$ الزاوية المركزية $\widehat{GBD}$ المُحاطة بالدائرة الأولى وتُوتر القوس $\widehat{GD}$، فيكون إذاً $\frac{\widehat{AL}}{\widehat{KL}} = \frac{\widehat{AD}}{\widehat{DG}}$. تقطع KA الوترَ DB على النقطة P. فيكون معنا:

$$\frac{tr.(BAK)}{tr.(BKP)} < \frac{sec.(BAK)}{sec.(BKL)}$$

فيكون إذاً: $\frac{AK}{KP} > \frac{\overset{\frown}{AK}}{\overset{\frown}{KL}}$ ، فنستخرج $\frac{AP}{KP} > \frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{LK}}$ وَ $\frac{AI}{MN} > \frac{AI}{KO} > \frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{LK}}$ (MN وَ OK عموديّان على BD). فيكون معنا إذا: $\frac{AI}{IH} > \frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{LK}}$، وبالتالي:

(1) $$\frac{AI}{IH} > \frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{DG}}.$$

فنستنتج من ذلك:

(2) $$\frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{AG}} > \frac{AI}{AH}.$$

ونبيِّن أيضاً أنَّ: $\frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{AE}} > \frac{IA}{AH}$ وَ $\frac{IA}{IH} > \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BE}}$.

لازمة: لتكن C نقطة تقاطع IA مع الدائرة:

١) إذا كانـت القـوس $\widehat{ABC}$ تحقّـق $\pi \geq \widehat{ABC}$، وَإذا كـان $DB \perp EQ$ ، يكـون حينئـذ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BE}} > \frac{IB}{BQ}$.

٢) إذا كانـت القـوس $\widehat{ADC}$ تحقِّق $\pi \geq \widehat{ADC}$، وَإذا كـان $DB \perp GR$ ، يكـون حينئـذ $\frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{DG}} > \frac{ID}{RD}$.

يكفـي لأجـل إثبـات هـذه اللازمـة أن نُبـدِّل دَوْرَيْ CA وَ DBعلـى الشـكل؛ فتقـوم Q (أو R ترتيباً) بدور H.

نريد هنا أن نبرهن أنَّ $\frac{AI}{IH} > \frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{LK}}$.

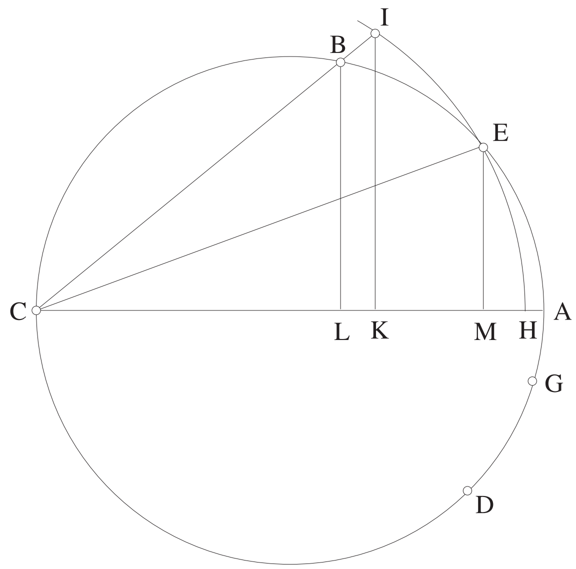
ولكنَّ $AB \sin \widehat{ABL} = AI$ وَ $GB \sin \widehat{KBL} = MN = IH$ ؛ فتحقّق النسبة $\frac{AI}{IH}$:

$$\frac{AI}{IH} = \frac{AB.\sin \widehat{ABL}}{BG.\sin \widehat{KBL}} > \frac{\sin \widehat{ABL}}{\sin \widehat{KBL}} > \frac{\widehat{ABL}}{\widehat{KBL}} = \frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{LK}}،$$

بفضل تناقصيّة الدالّة $\varphi \longrightarrow \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ في الفسحة $\frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0$ وبفضل $\frac{\pi}{2} > \widehat{ABL} > \widehat{KBL} > 0$، لأنَّ $\overset{\frown}{EG} < \overset{\frown}{BD} < \pi$. وننهي البرهان إذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $\frac{\overset{\frown}{AL}}{\overset{\frown}{KL}} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{DG}}$.

وهكذا نرى أنَّ هذه القضية ناتجة من تناقصيّة الدالّة $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ بالنسبة إلى المتغيِّر φ.

المقدِّمة ٢ـ نعطي القوسين $\overset{\frown}{BA}$ وَ $\overset{\frown}{AD}$ على دائرة بحيث يكون $\overset{\frown}{AD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ وَ $\overset{\frown}{AB}\leq\frac{\pi}{2}$. إذا كانت النقطتان E على القوس $\overset{\frown}{BA}$ وَ G على القوس $\overset{\frown}{AD}$ بحيث يكون $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AE}}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{AG}}$ ($AG=\frac{AE}{2}$)، يكون حينئذ $\frac{\sin\overset{\frown}{AB}}{\sin\overset{\frown}{AE}}>\frac{\sin\overset{\frown}{AD}}{\sin\overset{\frown}{AG}}$.



الشكل ٢

إذا افترضنا أنَّ $\alpha_1=\overset{\frown}{AD}$ وَ $\alpha_2=\overset{\frown}{AG}$، وإذا كان $\frac{\pi}{4}<\alpha_1<\alpha_2$، فإنَّ المتباينة السابقة تكتب كما يلي: $\frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2}>\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$،

فتعادل إذاً: $\cos\alpha_2>\cos\alpha_1$، أي أنها تعادل تناقصيّة $\cos\alpha$ في الفسحة $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}$ (وهذه التناقصية تبقى مُحقّقة في الفسحة $0\leq\alpha\leq\pi$).

ليكن AC القطر الخارج من A. القوس $\overset{\frown}{AE}$ تحقّق $\overset{\frown}{AE}<\overset{\frown}{AB}$ $\Leftarrow$ $BC<EC<AC$.

تقطع الدائرة (C, CE) القطر AC على النقطة H وتقطع BC على النقطة I. نرسم الخطوط BL، IK وَ EM العمودية على AC ؛ يكون معنا $IK>BL$ (لأنَّ $CI>CB$) وَ $ME<BL$ (لأنّ $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{AE}$)، فنستنتج أنَّ $\frac{BL}{EM}>\frac{IK}{EM}$، $\frac{IK}{EM}=\frac{\sin\overset{\frown}{HEI}}{\sin\overset{\frown}{HE}}$ ، $\frac{BL}{EM}=\frac{\sin\overset{\frown}{AB}}{\sin\overset{\frown}{AE}}$، فيكون إذاً $\frac{\sin\overset{\frown}{AB}}{\sin\overset{\frown}{AE}}>\frac{\sin\overset{\frown}{IH}}{\sin\overset{\frown}{HE}}$.

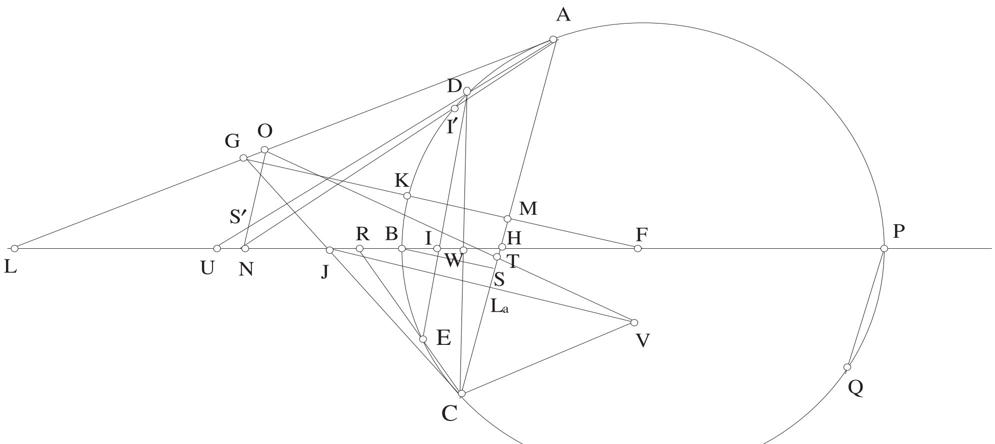
ولكنَّ القوس $\overset{\frown}{IEH}$ مُوَتَرَة بالزاوية المركزية $\widehat{ICH}$ التي هي محاطة بالدائرة المعطاة والتي تُوَتر القوس $\overset{\frown}{BA}$ من هذه الدائرة؛ فتكون $\overset{\frown}{IEH}$ مشابهة للقوس $(\frac{1}{2}\overset{\frown}{BA})$ المساوية للقوس $\overset{\frown}{AD}$؛ وكذلك تكون مشابهة للقوس $(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AE})$ التي هي مساوية للقوس $\overset{\frown}{AG}$، فيكون إذاً $\frac{\sin \overset{\frown}{IH}}{\sin \overset{\frown}{HE}} = \frac{\sin \overset{\frown}{AD}}{\sin \overset{\frown}{AG}}$، وبالتالي $\frac{\sin \overset{\frown}{DA}}{\sin \overset{\frown}{AG}} > \frac{\sin \overset{\frown}{BA}}{\sin \overset{\frown}{AE}}$.

المقدّمة ٣- لتكن معنا النقاط A، B وَ C على دائرة بحيث يكون $\frac{\pi}{2} \geq \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$، ولتكن D على $\overset{\frown}{BA}$ وَ E على $\overset{\frown}{BC}$ بحيث يكون $\frac{\overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{BE}} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{BC}}$، فيكون عندئذ $\frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{BE}} > \frac{\sin \overset{\frown}{BA}}{\sin \overset{\frown}{BC}}$.

تتوافق هذه المقدّمة مع القضية ٢ من مؤلّف "في هيئة حركات كل من الكواكب السبعة المتحيِّرة".

لتكن F مركز الدائرة؛ الخط BF يقطع AC على النقطة H، ويقطع ED على النقطة I ويقطع الدائرة على النقطة P. يتقاطع الخطّان، المُماسّان للدائرة في النقطتين A وَ C، على النقطة G، لأنَّ $\overset{\frown}{ABC} < \pi$. تكون معنا حالتان:

الحالة الأولى: لنفرض أنَّ $\overset{\frown}{AB} < \frac{\pi}{2}$ ، فيكون معنا $\overset{\frown}{AP} > \frac{\pi}{2}$.



الشكل ٣-١

لنرسم الخطّ GF الذي يقطع AC في وسطه M ويقطع $\overset{\frown}{AC}$ في وسطها K. يكون معنا $\overset{\frown}{CP} > \overset{\frown}{AP}$، لأنَّ $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB}$. لتكن Q بحيث يكون $\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{AP}$، فيكون حينئذ $PQ \parallel AC$ وَ $\widehat{BHC} = \widehat{BPQ}$. يكون معنا $\overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{AP} > \overset{\frown}{AB}$، فيكون $\overset{\frown}{QB} > \overset{\frown}{AC}$، وبالتالي $\widehat{GAC} < \widehat{BPQ}$

(وهما زاويتان محاطتان)؛ فيكون إذاً $\widehat{GAC}<\widehat{BHC}$، فيلتقي الخطّ GA، على النقطة L، بالخطّ BH الممدَّد على استقامة، ويقطع LH الخطّ CG على النقطة J. يكون معنا:

$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}}=\frac{AH}{HC}$ وَ $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}}=\frac{DI}{IE}$.

ولكن $\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}}>\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$. وذلك، أننا إذا تناولنا القوسين المضاعَفَتَيْن: $2\widehat{BA}=\widehat{BA'}$ وَ $2\widehat{BC}=\widehat{BC'}$، وإذا تناولنا وَتَرَيْهما، يكون معنا: $\pi>\widehat{BA'}>\widehat{BC'}$ وَ $\frac{BA'}{BC'}>\frac{\widehat{BA'}}{\widehat{BC'}}$.

لقد أُثْبِتَت هذه الخاصِّيَّة من قِبَل بطلميوس[١١].

فنستخرج من ذلك $\frac{AH}{HC}>\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$؛ ويكون معنا أيضاً $\frac{DI}{IE}>\frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}}$.

ليكن $BS\perp AC$ ، فيكون عندئذ $\frac{\widehat{KC}}{\widehat{BC}}>\frac{MC}{CS}$، وفقاً للمقدّمة ١(حيث تتوافق النقاط المسمّاة هنا C، B، K، M وَ S مع النقاط A، G، D، I وَH في المقدّمة ١)، فنستخرج:

$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}}>\frac{AC}{CS}$ وَ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}>\frac{AS}{CS}$.

فإذاً، تكون النقطة T، من الخطّ AC، التي تُحقّق $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}=\frac{AT}{TC}$، بين A وَ S.

لتكن JL_a بحيث يكون $JL_a\perp AC$ ؛ L_a هي بين S وَ C، فنستخرج $\frac{AT}{TC}>\frac{AS}{SC}>\frac{AL_a}{L_aC}$.

لتكن CV، بحيث يكون $GA\,//\,CV$ وَ V على JL_a ؛ يكون معنا $\widehat{ACG}=\widehat{GAC}=\widehat{ACV}$، فنستنتج أنَّ $L_aV=L_aJ$ وَ $CV=CJ$. يقطع الخطُّ TV الخطَّ GA على النقطة O؛ فيكون معنا $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}=\frac{AT}{TC}=\frac{AO}{CV}$، فنستنتج أنَّ:

$$\frac{AO}{CJ}=\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}=\frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}}=\frac{\widehat{AD}}{\widehat{CE}}\ .$$

يلتقي الخطّ الخارج من O، والموازي للخطّ AC، بالخطّ LF في النقطة N، ويكون $TC>AT$؛ فنستخرج $CJ>AO$. تكون النقطة N أبعد من النقطة J. يكون معنا: $\widehat{NAC}=\widehat{ANO}$ ، فتكون الزاوية $\widehat{ANO}$ حادّة، وينتج من ذلك أنّ الزاوية $\widehat{AON}$ منفرِجة.

لتكن I' نقطة التقاطع بين الخطّ NA والدائرة. تظهر لنا ثلاث حالات للنقطة D:

---

[١١] انظر:

Composition mathématique de Claude Ptolémée, trad. N. Halma, 2 vol. (Paris, 1813) ،
المجلد الأوّل، ص. ٣٤-٣٥.

أ) D بين A وَ I'.

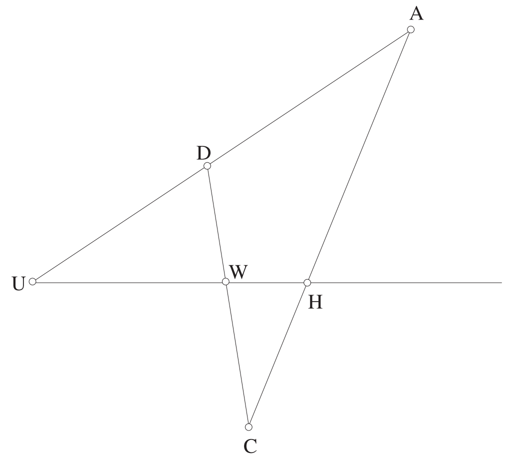
يقطع الخطّ DA الخطّ NO على النقطة S' ويقطع LF على النقطة U (انظر الشكل ٣-١).

يكون معنا: $AO < AS' < AU$ وَ $\frac{AO}{CJ} > \frac{AU}{CJ}$ ، فنستخرج $\frac{\widehat{AD}}{\widehat{CE}} > \frac{AU}{CJ}$.

يقطع الخطّ CE الخطّ FL على النقطة R؛ فتكون الزاوية $\widehat{CBH}$ حادّة، وينتج من ذلك أنَّ الزاوية $\widehat{CBR}$ منفرجة، وأنَّ الزاوية $\widehat{CRJ}$ منفرِجة ويكون: $CR < CJ$ ويكون أيضاً:

$$\frac{AD}{CE} > \frac{\widehat{AD}}{\widehat{CE}} > \frac{AU}{CJ} > \frac{AU}{CR} \Leftarrow \frac{CR}{CE} > \frac{AU}{AD} \Leftarrow \frac{RE}{CE} > \frac{UD}{AD} \Leftarrow \frac{ER}{RC} > \frac{DU}{UA}.$$

يقطع الخطّ DC الخطّ HB على النقطة W. إذا طبَّقنا مبرهنة منالاوس على المثلّث ADC وعلى الخطّ المستعرِض HWU نحصل على $\frac{HC}{HA}\cdot\frac{UA}{UD}\cdot\frac{WD}{WC} = 1$؛ ويُمكن أن نكتب $\frac{DU}{UA}\cdot\frac{CW}{WD} = \frac{CH}{HA}$ وَ $\frac{UA}{UD}\cdot\frac{CH}{HA} = \frac{CW}{WD}$.



الشكل ٣-٢

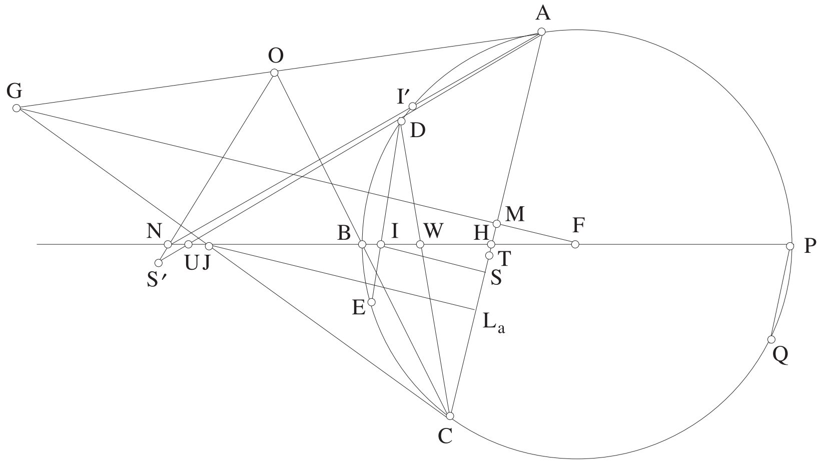
إذا طبَّقنا نفس المبرهنة على المثلّث CED وعلى الخطّ المستعرِض WIR، نحصل على $\frac{IE}{ID}\cdot\frac{RC}{RE}\cdot\frac{WD}{WC} = 1$؛ فنستخرِج $\frac{RC}{RE}\cdot\frac{IE}{ID} = \frac{WC}{WD}$ ، فيكون إذاً $\frac{DU}{UA}\cdot\frac{AH}{HC} = \frac{ER}{RC}\cdot\frac{ID}{IE}$.

ولكن $\frac{ER}{RC} > \frac{DU}{UA}$، فيكون $\frac{AH}{HC} > \frac{DI}{IE}$؛ وبالتالي $\frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}} > \frac{\sin \widehat{DB}}{\sin \widehat{BE}}$.

ب) D في النقطة I'.

يكون معنا في هذه الحالة $U = N = S'$ وَ $AN > AO$ ونقوم بالبرهان بنفس الطريقة.

ج) D بين B وَ I'.



الشكل ٣-٣

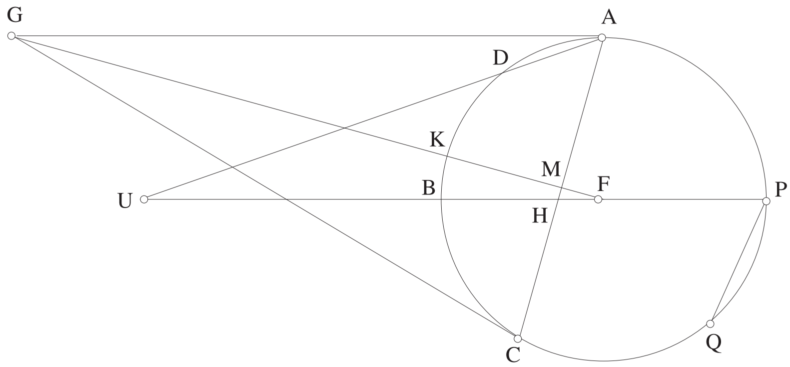
نبحث في هذه الحالة عن عدد صحيح n بحيث يكون $\widehat{BD'} = 2^n \widehat{BD}$، فتكون النقطة D' بين I' وَ A؛ نـُرفق بهذه النقطةِ النقطةَ E' بحيث يكون $\widehat{BE'} = 2^n \widehat{BE}$. ويُعطي الاستدلال السابق المُطبَّق على D' وَ E': $\frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}} > \frac{\sin \widehat{BD'}}{\sin \widehat{BE'}}$.

ولكن، بتطبيق المقدِّمة الثانية، يكون معنا:

$$\frac{\sin 2^n \widehat{BD}}{\sin 2^n \widehat{BE}} > ... > \frac{\sin 2\widehat{BD}}{\sin 2\widehat{BE}} > \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}}$$ ، فيكون إذاً $$\frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}} > \frac{\sin \widehat{BD'}}{\sin \widehat{BE'}} > \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}}.$$

الحالة الثانية : إذا كان $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$، يكون عندئذ $\widehat{AP} = \widehat{QC} = \frac{\pi}{2}$**.**

يكون الخطّ AG المماس للدائرة في A موازياً حينئذ للخطّ BF. أما الخطّ DA فإنه يلتقي، مهما كان وضع النقطة D، بالخطّ BF في النقطة U. ونقوم بالبرهان كما فعلنا سابقاً.



الشكل ٣-٤

هذا هو إذاً برهان ابن الهيثم للمقدّمة ٣. يُمكن أن نـُثبت، لكل نقطة D تُحقّق $\widehat{BA} < \widehat{BD}$، أنَّ: $\frac{UD}{UA} \cdot \frac{HA}{HC} = \frac{RE}{RC} \cdot \frac{ID}{IE}$.

ولكن، لكي نحصل على النتيجة، يجب أنْ نُبرهن أنَّ $\frac{RE}{RC} > \frac{UD}{UA}$.

يُميِّز ابن الهيثم عندئذ بين حالات ثلاث:

- $D \ni \widehat{AI'}$ ؛ يكون في هذه الحالة: $AU > AO$ ،
- $D = I'$ ؛ يكون معنا أيضاً في هذه الحالة: $AU > AO$ ،

ولذلك يُمكننا استخلاص النتيجة في هاتين الحالتين.

ولكن، إذا كان $D \ni BI'$، تكون النقطة S' على امتداد الخطّ NO وتكون U بين N وَ B؛ فيكون معنا $AN > AO$، ولكن $AU < AN$، فيمكن إذاً أن يكون معنا إذاً: $AU < AO$، $AU = AO$ أو $AU > AO$ ، فيكون الاستدلال الذي قمنا به في الحالة الأولى غير قابل للتطبيق. ولقد حاول ابن الهيثم التغلّب على هذه الصعوبة، كما نتحقّق من ذلك في القسم ج).

إنَّ وجود n يُثير، بالإضافة إلى ذلك، صعوبةً جديدة. وذلك أننا إذا وضعنا $\widehat{BA} = \alpha$، يكون عندئذ $\widehat{BI'} = \beta$ $\left(\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ وَ $\gamma = \widehat{BD}$. إذا كان $\gamma < \beta$، نبحث عن عدد صحيح n بحيث تـُحقّق $\gamma_n = \gamma . 2^n$ المتباينة المزدوجة: $\alpha > \gamma_n > \beta$ (مَقاس 2π).

إنَّ حلَّ هذه المسألة ليس ممكناً في جميع الظروف، خلافاً لما ظنَّ به ابن الهيثم. لنأخذ المثال $\gamma = 3°$ ؛ تعطي المتتالية $(\gamma_n)_{n\geq 0} = (3 \cdot 2^n)$: 3، 6، 12، 24، 48، 96، 192، 384 ...

يكون معنا: $\gamma_7 = 3 \cdot 2^7 = 24$ (مقاس 360)، فنستخرِجُ $\gamma_8 = 48$ (مَقاس 360). إذا سمّينا D_n النقطة المُرفقة بِـ γ_n، يكون معنا: $D_7 = D_3$ ، $D_4 = D_8$ ،...، $D_{n+4} = D_n$. وهكذا لا يكون بالتالي ممكناً أن نجد D_n بين I' وَ A، مهما كانت قيمة $\beta \ni]48, \alpha[$ مع $\alpha \leq 90°$ ؛ وهذه هي الحال مثلاً إذا كان $\beta = 50°$.

قد تُوضِّح هذه الصعوبات تلك التي لاقاها الفارسي في تحرير هذه القضيّة، وذلك وفقاً لقوله:

"ثمَّ لمّا كانت النسخة سقيمة جدّاً، لم أقدر على حلّها، فاكتفيت بإيراد الدعوى. وإن اتفق حلّها بعد، أضيفها محرَّرة إلى هذا المقام"[١٢].

وكان الفارسي نفسه قد توقّف في شرحه عند الشرط الذي صاغه ابن الهيثم في هذا المؤلّف "في خطوط الساعات"؛ ولكنَّ اللافِت للنظر هو أنه قد نسي هذا الشرط، وهو $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{AB} < \widehat{BC}$، في مؤلّفه "الكرة المُحْرِقة".

ولكن هذا الشرط ليس ضروريّاً؛ وإضافةً إلى ذلك، إنّ ابن الهيثم نفسه يُطبِّق المقدِّمة الثالثة في القضيتين ٣ وَ ٤ من "الكرة المحرقة" في الحالة التي يُمكن فيها للقوس $\widehat{TJ}$ المعنيّة بالأمر أن تكون أكبر من $\frac{\pi}{2}$ ، عندما تأخذ زاوية السقوط i بعضَ القِيَم، لأنَّ $\widehat{TJ} > 4d$ (d هي زاوية الانحراف) وهذا ما لم يَخفَ عليه.

لنتناول من جديد عرض القضية، فنضع $\widehat{BD} = \beta_1$، $\widehat{BE} = k\beta_1$، $\widehat{BA} = \alpha_1$، $\widehat{BC} = k\alpha_1$ مع $k < 1$ ؛ فيُكتب الشرط الذي وضعه ابن الهيثم كما يلي: $\beta_1 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$.

ولكن، يكفي أن نأخذ $\alpha_1 = 120°$ ، $\beta_1 = 90°$ وَ $k = \frac{1}{2}$ ، لنحصل على $\frac{\sin\beta_1}{\sin k\beta_1} = \sqrt{2}$ وَ $\frac{\sin\alpha_1}{\sin k\alpha_1} = 1$، فنرى أنَّ الشرطَ قَصْرِيٌّ.

ويُمكِن أن نـُبيِّن، من جهة أخرى، أنَّ القضية تبقى صحيحة إذا كان $\beta_1 < \alpha_1 < \pi$.

لنضع من أجل ذلك $f(x) = \frac{\sin x}{\sin kx}$، مع $k < 1$؛ ولنُبيِّن أن الدالّةَ f المعرَّفةَ في الفسحة $]0, \pi[$ تناقصيّة في هذه الفسحة. يكون معنا:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \sin kx - k\cos kx \cdot \sin x}{\sin^2 kx}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 kx}\left\{\sin(kx - x) + \frac{1-k}{2}\left[\sin(x + kx) + \sin(x - kx)\right]\right\}،$$

$$= \frac{1}{\sin^2 kx}\left[\frac{1+k}{2}\sin(kx - x) + \frac{1-k}{2}\sin(x + kx)\right]$$

---

[١٢] انظر "في الكرة المُحرِقة" ضمن الكتاب:

R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au Xe siècle : Ibn Sahl - al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993)، ص. ١٣٤، ١٣-١٤، و كذلك ضمن الترجمة الإنكليزيّة : *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* (Londres, 2005).

$$= \left[\frac{\sin x(1+k)}{1+k} - \frac{\sin x(1-k)}{1-k}\right]\frac{1-k^2}{2\sin^2 kx}.$$

لنضع:

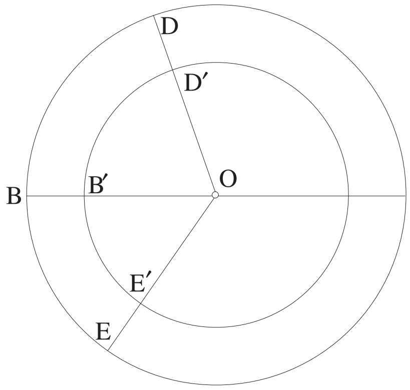
$$g(x) = \frac{\sin x(1+k)}{1+k} - \frac{\sin x(1-k)}{1-k}،$$

فيكون معنا: $g(0) = 0$ وَ $g'(x) = -2\sin x \cdot \sin kx$.

ولكنّ $x \in]0, \pi[$، وَ $k < 1$ ، فنستخرِج $k.x \in]0, \pi[$ وبالتالي يكون $g'(x) < 0$ على $]0, \pi[$ ؛ فتتناقص g ابتداء من $g(0) = 0$. يكون معنا إذاً $g(x) < 0$، فنستنتج من ذلك أنّ $f'(x) < 0$، وأنَّ f تكون بالتالي تناقصيّة على الفسحة $]0, \pi[$. وهكذا تكون المتباينة $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} > \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ مُحقّقة عندما يكون $\pi \leq \alpha_1 < \beta_1$، حيث نضع $k\alpha_1 = \alpha_2$ وَ $k\beta_1 = \beta_2$ $(0 < k < 1)$.

لنلاحِظ أخيراً أنَّ ابنَ الهيثم يُعمِّمُ، في هذا المؤلّف كما فعل في "هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"، القضيّةَ السابقة لقوسين متشابهتين في دائرتين مُختلفتين. ولكنـه لا يتنـاول من جديد هذا التعميم في مؤلّفه "في الكرة المُحرقة"، في حين أنَّ الفارسي يُذكّر بهذا التعميم في مؤلّفه.

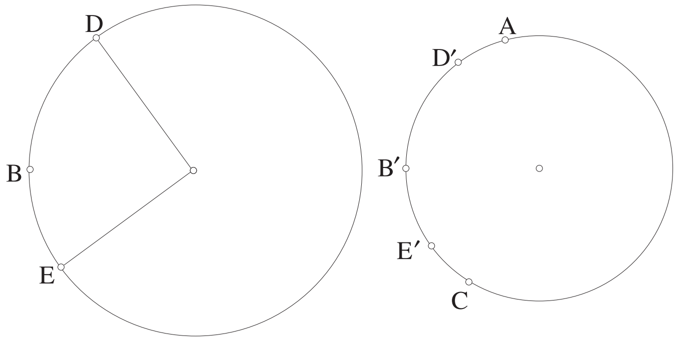
- قوسان متشابهتان في دائرتين مختلفتين: هما موترتان بزاويتين مركزيتين متساويتين:



الشكل ٣-٥

$$\frac{\sin\widehat{B'D'}}{\sin\widehat{B'E'}} = \frac{\sin\widehat{BD}}{\sin\widehat{BE}}.$$

- تعميم المقدّمة ٣ إلى حالة قوسين مأخوذتين في دائرتين مُختلفتين (حيث تكون كل من القوسين أصغر من ربع دائرة):



الشكل ٣-٦

$\widehat{B'A} > \widehat{B'D'}$، حيث تكون $\widehat{B'D'}$ مشابهة للقوس $\widehat{BD}$،

$\widehat{B'C} > \widehat{B'E'}$، حيث تكون $\widehat{B'E'}$ مشابهة للقوس $\widehat{BE}$،

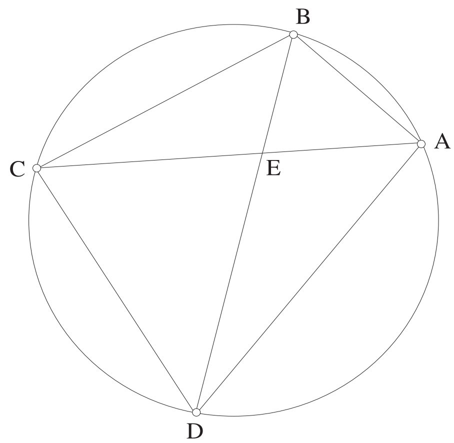
$$\frac{\widehat{B'A}}{\widehat{B'C}} = \frac{\widehat{B'D'}}{\widehat{B'E'}} \Leftarrow \frac{\widehat{B'A}}{\widehat{B'C}} = \frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}}$$

يكون معنا في الدائرة الثانية $\frac{\sin \widehat{B'A}}{\sin \widehat{B'C}} > \frac{\sin \widehat{B'D'}}{\sin \widehat{B'E'}}$، فينتج من ذلك $\frac{\sin \widehat{B'A}}{\sin \widehat{B'C}} > \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}}$.

لنلاحظ أنَّ البرهانَ، في المؤلّف "في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة"، قد أقيم مباشرة لقوسين متشابهتين في دائرتين مُختلفتين، وهذا ما قد يوحي بأنّ هذا المؤلّف الأخير قد حُرِّر بعد المؤلّف "في خطوط الساعات".

المقدِّمة ٤ - ليكن AC وَ DB وترين، من دائرة واحدة، يتقاطعان على نقطة E؛ إذا كان $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABC}} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{CDA}}$، يكون عندئذ $\frac{\widehat{AEB}}{180°} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{CDA}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABC}}$.

يكون معنا: $\frac{\widehat{ACB}}{\widehat{CAB}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ وَ $\frac{\widehat{CAD}}{\widehat{ACD}} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{DA}}$ ؛



الشكل ٤

ينتج من الفرضية : $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{DA}}$، ومن جهة أخرى $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ وَ $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}$ ، فينتج من ذلك

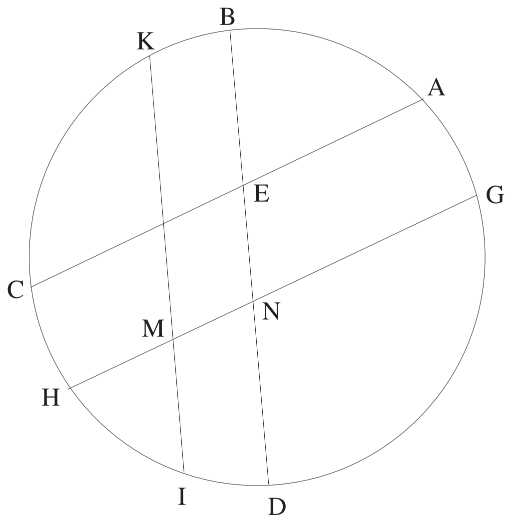
$$\frac{\widehat{AEB}}{\widehat{BEC}}=\frac{\widehat{CBD}+\widehat{ACB}}{\widehat{ABD}+\widehat{CAB}}=\frac{\widehat{CBD}}{\widehat{ABD}}=\frac{\widehat{ACB}}{\widehat{CAB}}،$$

فيكون: $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}=\frac{\widehat{AEB}}{\widehat{BEC}}$ وَ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}}=\frac{\widehat{AEB}}{\widehat{BEC}+\widehat{AEB}}$، فيكون $\frac{\widehat{AEB}}{180^\circ}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}$.

إذا كانت α وَ β زاويتين مركزيتين تـُوَتران القوسين $\overset{\frown}{AB}$ وَ $\overset{\frown}{BC}$ ، فإنّ الزاويتين اللتين تـُوتران القوسين وَ $\overset{\frown}{CD}$ وَ $\overset{\frown}{DA}$ ، هما حسب الترتيب $\frac{2\pi\alpha}{\alpha+\beta}-\alpha$ وَ $\frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}-\beta$، إذا أخذنا بعين الاعتبار الشرط: $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{CA}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}}$. تساوي الزاوية $\widehat{BEA}$، وفقاً لخلاصة المُقدِّمة، $\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}$ ، وهذه القيمة هي المُوسِّط بين α وَ $\frac{2\pi\alpha}{\alpha+\beta}-\alpha$. وهذا يعني بعبارة أخرى أنَّ: $\widehat{BEA}=\frac{\widehat{AOB}+\widehat{COD}}{2}$، حيث تكون O مركز الدائرة.

المقدِّمة ٥- ليكن معنا، كما كان في المقدِّمة ٤، وتران AC وَ DB متقاطعان بحيث يكون $\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{CDA}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}$؛ وليكن معنا وتر HG موازٍ للخطّ AC. لتكن I نقطة على القوس $\overset{\frown}{GDH}$ ولتكن K نقطة على القوس $\overset{\frown}{GBH}$ بحيث يكون $\frac{\overset{\frown}{DA}}{\overset{\frown}{ADC}}=\frac{\overset{\frown}{IG}}{\overset{\frown}{GIH}}$ وَ $\frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{CBA}}=\frac{\overset{\frown}{KH}}{\overset{\frown}{HKG}}$، فيكون الخطّ IK عندئذ موازياً للخطّ DB.

إنَّ الفرضيّة $\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{CDA}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}$ معادلة لـِ $\frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{ADC}}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{ABC}}$؛ فيكون معنا $\frac{\overset{\frown}{KH}}{\overset{\frown}{GKH}}=\frac{\overset{\frown}{IG}}{\overset{\frown}{GIH}}$؛ ويكون معنا بالتالي وفقاً للمقدِّمة ٤، إذا كانت M نقطة التقاطع بين GH وَ IK: $\frac{\overset{\frown}{KH}}{\overset{\frown}{GKH}}=\frac{\widehat{KMH}}{180^\circ}$،



الشكل ٥

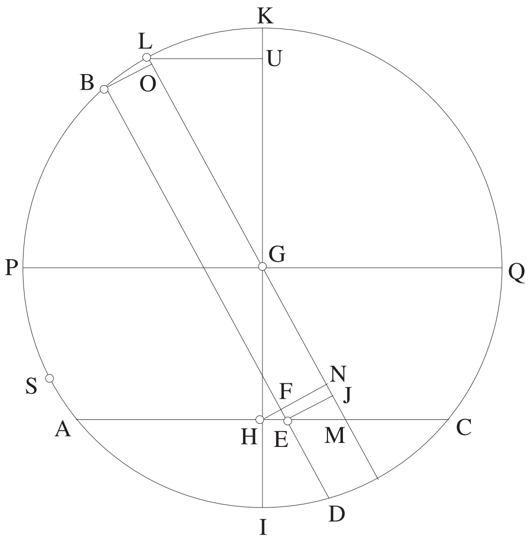
فينتج من ذلك: $\frac{\widehat{KMH}}{180^\circ} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{CBA}} = \frac{\widehat{BEC}}{180^\circ}$،

فيكون بالتالي: $\widehat{BEC} = \widehat{KMH}$.

يقطع الخطُّ DB الخطَّ GH على النقطة N (لأن $HG // CA$)، فيكون إذاً $\widehat{BEC} = \widehat{ENH}$، فينتج من ذلك $\widehat{ENH} = \widehat{KMH}$؛ فيكون الخطّان DB وَ IK متوازيين.

المقدّمة ٦- ليكن معنا، في دائرة ذات مركز G، وتران CA وَ BD يتقاطعان على النقطة E بحيث يكون $\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{CDA}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}$؛ وليكن KI القطر العموديّ على CA في وسطه H. إذا كان $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AK}$ [١٣]، تكون النقطة E عندئذ بين H و C، وتتقاطع DB وَ GH بين G وَ H.

[١٣] تجب إضافة هذا الشرط لكي تكون E بين H وَ C، كما يرد في نص المقدّمة. إذا كان $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AK}$، تكون E بين H وَ A، ولكن نقطة التقاطع بين DB وَ GH تكون أيضاً بين G و H.



الشكل ٦

ليكن PQ القطر الموازي للخطّ CA. يقطع الخطُّ LG ، الموازي للخطّ BD، الخطَّ CAعلى النقطة M. يكون معنا: $\widehat{AEB} = \widehat{AML} = \widehat{PGL}$.

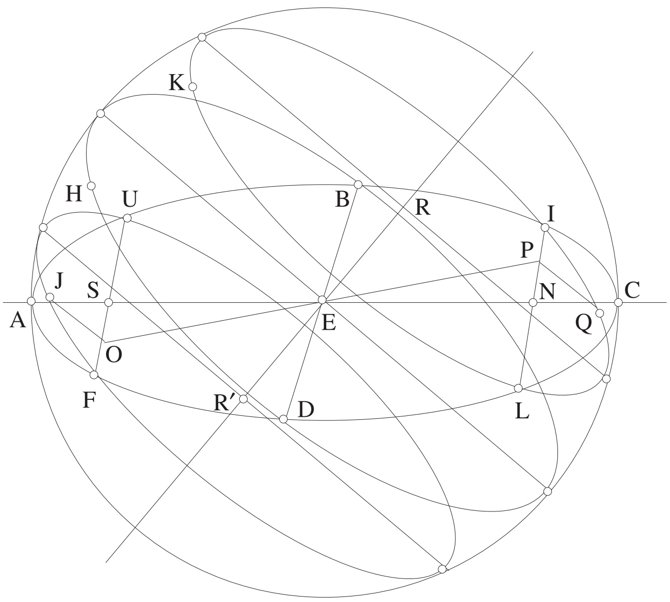
نحن نعلم، وِفقاً للمقدّمة ٤، أنّ $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABC}} = \frac{\widehat{AEB}}{180°}$، ولكن $\frac{\widehat{LP}}{\widehat{PLQ}} = \frac{\widehat{PGL}}{180°}$، فينتج من ذلك $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABC}} = \frac{\widehat{LP}}{\widehat{PLQ}}$، وبالتالي $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABK}} = \frac{\widehat{LP}}{\widehat{PLK}}$.

ليكن S على القوس $\widehat{AP}$ بحيث يكون $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABK}} = \frac{\widehat{LP}}{\widehat{PLK}} = \frac{\widehat{SP}}{\widehat{PA}}$، فيكون معنا حينئذ $\frac{\widehat{SL}}{\widehat{APK}} = \frac{\widehat{SP}+\widehat{LP}}{\widehat{AP}+\widehat{PLK}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABK}}$، فينتج من ذلك: $\widehat{SL} = \widehat{AB}$ وَ $\widehat{AS} = \widehat{BL}$. ولكن $\frac{\widehat{LP}}{\widehat{PK}} = \frac{\widehat{SP}}{\widehat{PA}}$ تعطي $\frac{\widehat{PK}}{\widehat{KL}} = \frac{\widehat{PA}}{\widehat{AS}}$، فينتج من ذلك: $\frac{\widehat{PA}}{\widehat{BL}} = \frac{\widehat{PK}}{\widehat{KL}}$؛ وبما أنّ $\widehat{PA} < \widehat{PK}$، يكون معنا: $\frac{\sin\widehat{PK}}{\sin\widehat{KL}} > \frac{\sin\widehat{PA}}{\sin\widehat{BL}}$، $\frac{HG}{BO} = \frac{\sin\widehat{PA}}{\sin\widehat{BL}}$، $\frac{GL}{LU} = \frac{GK}{LU} = \frac{\sin\widehat{PK}}{\sin\widehat{KL}}$ ، فينتج من ذلك $\frac{GL}{LU} > \frac{HG}{BO}$.

ولكنّ المثلّثين ULG وَ NHG متشابهان، فيكون $\frac{GH}{HN} = \frac{GL}{LU}$، وينتج من ذلك $\frac{GH}{HN} > \frac{HG}{BO}$، ويكون بالتالي $HN < BO$. يقطع الخطُّ DB، إذاً، الخطَّ HG بين G وَ H، ويقطع الخطَّ CA على النقطة E بين H وَ C.

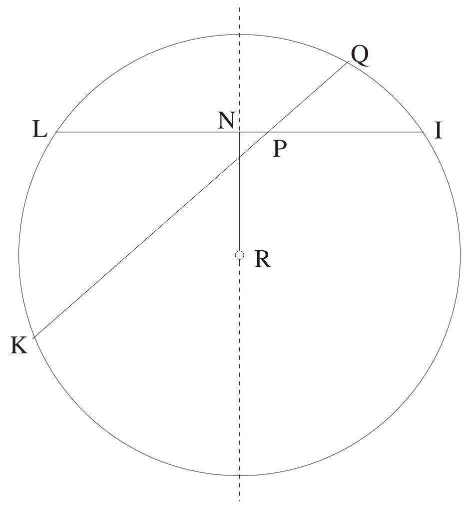
لـنلاحظ أنَّ المثلّثـين MHG وَ MJE متشـابهان، فينـتج مـن ذلـك $\frac{GM}{ME}=\frac{GH}{EJ}=\frac{GH}{BO}$ وَ $\frac{GM}{ME}=\frac{\sin\widehat{AP}}{\sin\widehat{BL}}=\frac{\sin\widehat{AP}}{\sin\widehat{AS}}$.

القضية ٧- ليكن $ACBD$ أفق المكان E، حيث تكون E نقطة من نصف الكرة الشمالي. يتقاطع الأفقُ مع مُعدِّلُ النهار وفقاً للخطّ DB، ويتقاطع مع مدار السرطان وفقاً للخطّ IL، كما يتقاطع مع مدار الجدْي وفقاً للخطّ UF. وهذه الخطوط الثلاثة متوازية. يقطع مستوي نصف النهار الخطوط DB، IL، و UF في أوساطها E وَ N و S الموجودة على خطّ نصف النهار AC (خط التقاطع بين مستوي الأفق ومستوي نصف النهار). وتكون مراكز هذه الدوائر الثلاثَ، أي E، R، وَ R'، على محور العالَم.



الشكل ٧-١

لتكن K نقطة من قوس النهار IL التي هي القوس الكبرى من دائرة السرطان، ولتكن Q نقطة من القوس الصغرى بحيث يكون $k=\frac{\widehat{KL}}{\widehat{LKI}}=\frac{\widehat{QI}}{\widehat{IQL}}$؛ عندئذ، وفقاً للمقدّمة ٦، إذا كان $\frac{1}{2}>k$، يقطع الخطّ QK الخطَّ IL على النقطة P بين N وَ I، كما يقطع الخطَّ NR بين R وَ N.



الشكل ٧-٢

يُبيِّن ابن الهيثم أنَّ النقطة P موجودة بين L وَ N ، عندما يكون $\frac{1}{2} < k < 1$،.

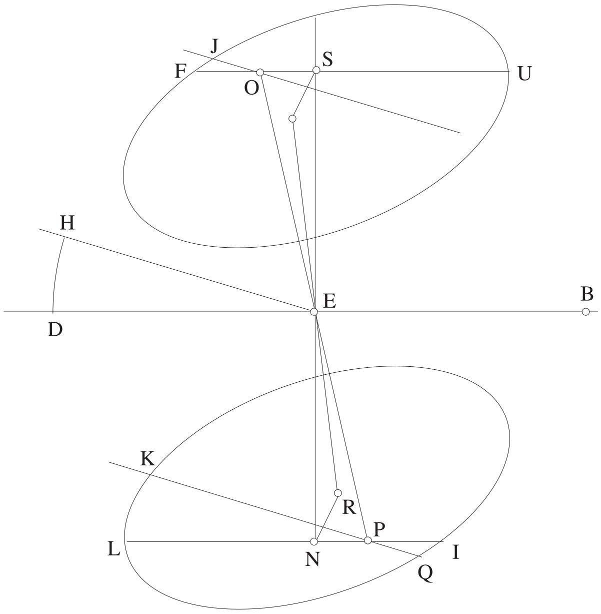
يرجِع منهج ابن الهيثم إلى اعتبار النقطة E كمركز للشكل المُكوَّن من مستوي الأفق $ACBD$ ومن الدائرتين الموازيتين لمُعدِّل النهار. وهكذا يكون معنا $EN = ES$ ، $IL \,//\, UF$ وَ $IL = UF$. ويقطع الخطُّ EP الخطَّ FU على النقطة O ، ويكون معنا $EO = EP$ ، $SO = NP$، وَ $OF = IP$. يحتوي المستوي OPK على مركز التناظر E ؛ فيقطع إذاً الدائرةَ FJU وفقاً للخطّ JO الموازي للخطّ PQ. والنقاطُ Q، P، I وَ L مماثلة، وفقاً للتناظر ذي المركز E وحسب الترتيب، للنقاط J، O، F، وَ U ، فينتج من ذلك المعادلات $\widehat{JOF} = \widehat{QPI}$ ، $\widehat{JF} = \widehat{QI}$ وَ $\widehat{FJU} = \widehat{IQL}$. فيكون معنا إذاً: $\frac{\widehat{JF}}{\widehat{FJU}} = \frac{\widehat{QI}}{\widehat{IQL}}$، فينتج من ذلك $\frac{\widehat{JF}}{\widehat{FJU}} = \frac{\widehat{KL}}{\widehat{LKI}}$.

والنقطتان J وَ K مُرفقتان بساعتين زمانيّتين متماثلتين.

المستوي OPK الذي يحتوي على مركز التناظر E هو مستوٍ قطريٌّ لكرة العالم. وهو يقطع مستوي مُعدِّل النهار وفقاً للخطّ HE وَ يكون معنا $EH \,//\, KP \,//\, JO$. ونحن نعلم من جهة أخرى أنَّ $ED \,//\, NL \,//\, SF$، فينتج من ذلك أنّ $\widehat{JOF} = \widehat{KPL} = \widehat{HED}$.

يكون معنا وفقاً للمقدِّمة ٤، $\frac{\widehat{KPL}}{180^\circ} = \frac{\widehat{KL}}{\widehat{LKI}}$ ؛ ويكون معنا، من جهة أخرى، $\frac{\widehat{HED}}{180^\circ} = \frac{\widehat{HD}}{\widehat{DHB}}$،

لأنّ $\widehat{DHB}$ نصف دائرة ، فيكون إذاً $\frac{\widehat{KL}}{\widehat{LKI}} = \frac{\widehat{HD}}{\widehat{DHB}}$.



الشكل ٧-٣

تتوافق النقاط الثلاث K، J، وَ H مع ثلاث ساعات زمانية متماثلة. وهي تنتمي إلى دائرة عظمى مركزها E؛ يقطع مستويُ هذه الدائرة مستويَ الأفق وفقاً للخطّ OEP، ويقطع كلَّ مستوٍ موازٍ للأفق وفقاً لخطّ موازٍ للخطّ PE.

إذا كان مستوي الرخامة الشمسية موازياً لأفق النقطة E، فإنَّ المستوي JHK يقطعه وفقاً للخطّ Δ الموازي للخطّ PE.

وعندما تكون الشمس في إحدى النقاط J، H وَ K، فإنَّ ظلَّ رأس المقياس على مستوي الرخامة يقع على الخطّ Δ.

ملاحظة: يُمكن أن نقارن برهان ابن الهيثم للقضية ٧ مع برهان ابن سنان[١٤]. لقد رأينا أعلاه كيف برهن ابن الهيثم أنَّ النقاط الثلاث، الموافقة لنفس الساعة الزمانية والمأخوذة على دوائر السرطان ومعدِّل النهار والجدي، تنتمي إلى نفس الدائرة العظمى. فقد أخذ ابن الهيثم نقطة اختيارية K على قوس النهار للسرطان، وعرَّف دائرة عظمى على الكرة السماوية مارَّة بالنقطة K، مستخدماً المقدمة ٤، وهي قضية خاصَّة بحساب المثلّثات. تقطع هذه الدائرةُ العظمى قوس النهار لمعدِّل النهار على النقطة H، وتقطع دائرة الجدي على النقطة J. ويُبيِّن

[١٤] انظر "في آلات الأظلال"، ضمن:
R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*، ص. ٤١٦ وما يليها.

أنّ النقاط الثلاث J ، K، وَ H تـُحقّق $\frac{\widehat{DH}}{\widehat{DHB}} = \frac{\widehat{FJ}}{\widehat{FJU}} = \frac{\widehat{LK}}{\widehat{LKI}}$؛ فهي تتوافق إذاً مع نفس الساعة الزمانية. إنَّ الدائرتين المشار إليهما هما دائرتا السرطان والجدي؛ ولكن هذا لا يدخل في البرهان الذي يبقى صالحاً لكل دائرتين موازيتين لمعدِّل النهار ومتناظرتين بالنسبة إلى هذا الأخير.

ولقد تبنى ابن سنان هذه الفرضية في القضية الأولى من كتابه الثاني. وأثبت في البداية مُقدِّمةً، تخصُّ حالة خاصّة للمساواة بين مثلّثين كرويّين مرسومين على نفس الكرة أو على كرتين متساويتين، ثمّ استخدمها ليُبيِّن أنه إذا أخذت ثلاث نقاط E، I، وَ K على مُعدِّل النهار وعلى الدائرتين الموازيتين له، بحيث توافق نفس الساعة الزمانية، فإنَّ هذه النقاط تنتمي إلى نفس الدائرة العظمى.

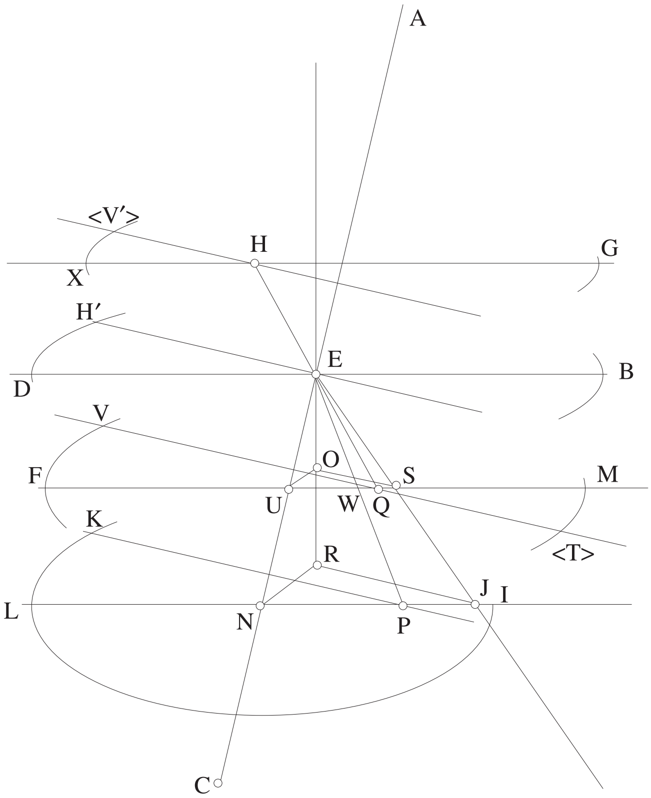
وهكذا نقول باختصار إنَّ ابن الهيثم يتبع في برهانه المسار التالي:

النقطة K والقضية ٤ ← الدائرة العظمى ← J وَ H الموافقتان لنفس ساعة K الزمانية،

في حين أنّ ابن سنان يتبع في برهانه المسار التالي:

النقاط E، I، وَ K الموافقة لنفس الساعة الزمانية مع مقدِّمة (في المثلّثات الكروية) ← توجَد دائرة عظمى تمرُّ بالنقاط E، I، وَ K.

القضية ٨- لتكن FVM دائرة زمانية موجودة بين دائرة السرطان ودائرة الجدي وقاطعة لمستوي الأفق وفقاً للخطّ FM. يكون O مركز هذه الدائرة على الخطّ RE محور العالم؛ ويكون U وسط FM على NE ويكون معنا $OU \perp MF$؛ ويقطع الخطُّ PE الخطَّ FM على النقطة W. نُعرِّف النقطة V بالمعادلة $\frac{\widehat{LK}}{\widehat{LKI}} = \frac{\widehat{FV}}{\widehat{FVM}}$. وإذا كانت T نقطة من القوس التي تُكمِّل القوس $\widehat{FVM}$ وتُحقّق $\frac{\widehat{FV}}{\widehat{FVM}} = \frac{\widehat{MT}}{\widehat{MTF}}$، فإنَّ الخطّ TV يقطع FM على النقطة Q بين U وَ M ويكون معنا: $\widehat{VQF} = \widehat{KPL}$، فيكون إذاً $QV \parallel PK$.



الشكل ٨

لتكن J على IN بحيث يكون $PK // JR$ [15]، فيكون $RJ // VQ$ ، ويقطع JE الخطّ FM على النقطة S ويكون معنا $SO // RJ // QV$. والقوس $\widehat{FVM}$ ، وفقاً للفرضية، أصغر من القوس المشابهة لِـ $\widehat{LKI}$، ويكون: قياس $(\widehat{FVM})$ $<$ قياس$(\widehat{LKI})$.

ليكن α جزءاً من $\widehat{VF}$ مُعرَّفاً بواسطة المعادلة $\frac{\widehat{LK}}{\frac{1}{2}\widehat{LKI}} = \frac{\alpha}{\widehat{VF}}$، وليكن β جزءاً من $\widehat{KL}$ بحيث يكون $\frac{\beta}{\widehat{LK}} = \frac{\alpha}{\widehat{VF}}$، فيكون عندئذ: قياس$(\widehat{VF} - \alpha)$ $<$ قياس$(\widehat{KL} - \beta)$.

ولكن $\frac{OS}{SQ} = \frac{\sin\widehat{VF}}{\sin(\widehat{VF} - \alpha)}$ وَ $\frac{RJ}{JP} = \frac{\sin\widehat{KL}}{\sin(\widehat{KL} - \beta)}$ (وِفقاً لنهاية القضية ٦)، فينتج من ذلك: $\frac{RJ}{JP} > \frac{OS}{SQ}$.

[15] سنرى لاحقاً أنه إذا كانت قوس النهار $\widehat{LKI}$ مساوية لِـ ٢١٠°، فإنَّ النقطة J تتطابق مع النقطة I. أما هنا فلم نفرض أيّ شرط على القوس $\widehat{LKI}$.

والمثلّثان: USO وَ NJR هما من جهة أخرى متشابهان، فيكون $\frac{RJ}{JN}=\frac{OS}{SU}$. يكون معنا إذاً: $\frac{JN}{JP}>\frac{US}{SQ}$، فيكون $\frac{SU}{UQ}>\frac{JN}{NP}$، أو إذا بدّلنا: $\frac{NP}{UQ}>\frac{JN}{SU}$.

ولكن $\frac{NP}{UW}=\frac{EN}{EU}=\frac{RN}{OU}=\frac{JN}{SU}$، فيكون إذاً $\frac{NP}{UQ}>\frac{NP}{UW}$، وبالتالي $QU>WU$؛ فلا تكون النقطة Q على EP. وهكذا نرى في مستوي الأفق أنَّ الخطَّ EP ، الذي هو الخطّ المرفَق بالساعة الزمانية الموافقة للنقطة K، مُختلفٌ عن الخطّ EQ المرفَق بالنقطة V.

إنّ مُستويَ الدائرة الزمانية المتناظرة مع الدائرة FVM بالنسبة إلى لنقطة E، مقطوعٌ بمستوي الأفق وفقاً للخطّ XG، ومقطوعٌ بالمستوي EQV وفقاً للخطّ $V'H$ الموازي للخطّ QV والمارّ بالنقطة H ، أيْ نقطة التقاطع بين EQ وَ XG. يقطع مستويُ EQV كرةَ العالَم وِفقاً لدائرة عظمى يمرُّ مُحيطُها بالنقاط V، H'، وَ V' الموجودة حسب الترتيب على الدوائر FVM، $BH'D$، وَ $GV'X$؛ وتخصُّ هذه النقاط نفس الساعة الزمانية للأيّام المحدَّدة بهذه الدوائر الثلاث.

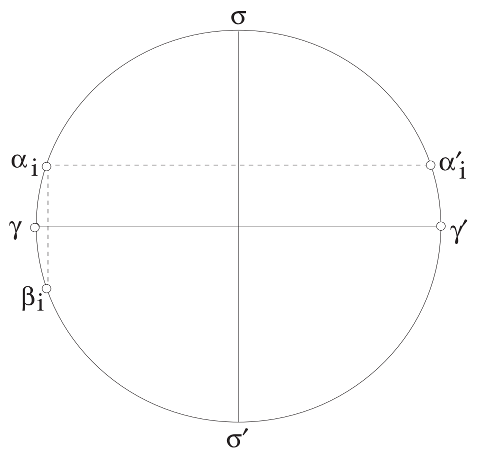
يتقاطع المستويان EQV وَ EPK، المارّان حسب الترتيب بالخطّين المتوازيين QV وَ PK، على خطٍّ موازٍ لهذين الخطّين، وهو الخطّ EH' الموجود في مستوي مُعدِّل النهار.

والخلاصة هي أنه، إذا توافقت مع نفس الساعة الزمانية h، من جهة: النقاطُ K، H، وَ J الموجودة على الشكل الأوّل ، ومن جهة أخرى: النقاطُ V، $H=H'$ وَ V' الموجودة على الشكل الثاني، فإنَّ النقاط K ، H ، وَ J تكون مرفقة بالخطّ EP ، وتكون النقاطُ V، H' وَ V' مرفقة بالخطّ EQ المختلف عن الخطّ EP.

القضية ٩- لنأخذ على فلك البروج الأقواس الأربع المفصولة بنقطتيْ الاعتدال γ وَ γ'، وبنقطتيْ الانقلاب σ وَ σ'. فإذا أرفقنا لكلّ درجة i من 0 إلى 90 على القوس $\widehat{\sigma\gamma}$ نقطة α_i مع $\gamma=\alpha_0$ وَ $\sigma=\alpha_{90}$ ، يكون لكل نقطة α_i دائرة زمانية.

وهكذا يكون لكلّ ساعة معلومة h، مأخوذةٍ على كلٍّ واحدة من الدوائر الزمانية الواحدة والتسعين، ٩١ نقطة تُشَكِّل أظلال رأس المقياس على مستوي الرخامة؛ ولتكن $w_{0\cdot h}$ النقطة المُرفَقة لـِ $i = 0$.

يكون لكل نقطتين α_i وَ α'_i متناظرتين بالنسبة إلى الخطّ $\sigma\sigma'$ نفسُ الدائرة الزمانية؛ وترسم الشمس هذه الدائرة مرّتين في السنة.



الشكل ٩-١

تكون الدائرتان الزمانيتان C_{α_i} وَ C_{β_i} ، لكل نقطتين α_i وَ β_i متناظرتين بالنسبة إلى الخطّ $\gamma\gamma'$ ، متناظرتين بالنسبة إلى مستوي مُعدِّل النهار.

وعندما تكون $i \neq 0$، فإنَّ للنقاط الأربع β'_i، β_i، α'_i، وَ α_i على فلك البروج، دائرتين زمانيتين C_{α_i} وَ C_{β_i}، ، ويكون لكل ساعة h معلومة على هاتين الدائرتين خطٌّ وحيد $\Delta_{i\cdot h}$ في مستوي الرخامة.

وعندما تأخذ i كلّ قِيمة بين 0 إلى 90، تُرفق بكل ساعة h النقطة $w_{0\cdot h}$ وتسعون خطّاً $(\Delta_{i\cdot h})_{i=1}^{90}$؛ وتمرُّ هذه الخطوط كلّها بالنقطة $w_{0\cdot h}$.

وتتوافق النقطة $w_{0\cdot h}$، لكلّ ساعة معلومة h مع يومين هما يومَا الاعتدال، كما يتوافق الخطُّ $\Delta_{90\cdot h}$ مع يومين أيضاً وهما يومَا الانقلاب؛ ويتوافق كلّ خطٍّ آخر $\Delta_{i\cdot h}$ مع أربعة أيام بحيث يكون كلّ يوم منها في أحد الفصول.

يبقى علينا أن نبرهن أنّ الزاويةَ التي يُشكِّلها الخطّ $\Delta_{90\cdot h}$ مع أيٍّ من الخطوط $\Delta_{i\cdot h}$ لا يُعتدُّ بها، لكلّ ساعة معلومة h.

يرجع ابن الهيثم إلى الشكل الخاصّ بدراسة الساعة الأولى h =١ على دائرة السرطان لكي يُحدِّد موضع النقطة P. ويَفترض أنّ القوس $\widehat{LKJ}$ تساوي °210، ويُسمّيها قوس الأربع عشرة ساعة؛ وهذا يعني أنَّ كلّ ساعة توافق °15 مثل الساعة المستوية: $14 \times \frac{180°}{12} = 210°$.

ولكنَّ ابن الهيثم يأخذ بعد ذلك قوس ساعة $\widehat{KL} = \frac{210°}{12} =$ 17°,5.

وتسمح القوس المعلومة $\widehat{LKJ} = 210°$ بحساب عرض المكان[١٦]. نجعل لأجل ذلك الزاوية بين مستوي البروج ومستوي معدِّل النهار مساوية لـِ α = '27°23. يقول ابن الهيثم، بعد ذلك (انظر ص. ٥٤٦)، إنَّ عرض هذا المكان هو °30.

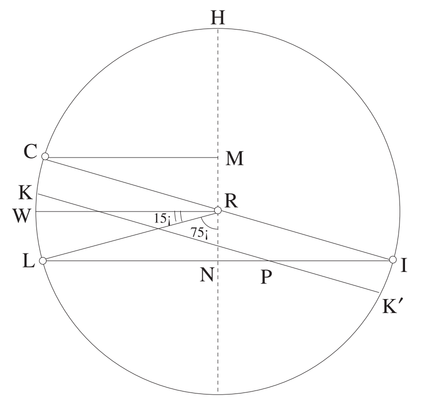
---

[١٦] حساب العرض λ لمكان الراصد: تُساوي قوسُ دائرة السرطان الموجودةُ فوق الأفق °210، فيكون: $\widehat{HRL}$ =°105 وَ $\widehat{NRL}$ = °75،

(١) $RN = RH \cos 75°$.

ليكن α ميل فلك البروج بالنسبة إلى معدِّل النهار.

- إذا كان $r = EH$ هو نصف قطر كرة العالَم ، يكون معنا :



الشكل ٩-٢

$r \sin \alpha = ER$ ، $r \sin \alpha \operatorname{tg} \lambda = ER \operatorname{tg} \lambda = RN$.

(٢) $r \cos \alpha = RH$.

(1) وَ (2) $\Leftarrow \operatorname{tg} \lambda = \frac{\cos 75°}{\operatorname{tg} \alpha}$.

يأخذ ابن الهيثم في الحسابات التالية: $\alpha = 24°$ لميل فلك البروج بالنسبة إلى معدّل النهار.

لنضع $r = EH$ (الشكل 9-3). إذا أخذنا $r = 60$، يكون معنا:

$$ER = r \sin\alpha = 60 \times 0{,}4069366 = 24{,}4022 = 24.24.15$$

$$RH = RI = r\cos\alpha = 60 \times 0{,}91354545 = 54{,}812727 = 54.48.46$$ ،

$$RN = RI \sin 15° = 14{,}186577 = 14.11.11$$.*

يكون معنا:

$$\widehat{LC} = 30°\text{، } \widehat{LW} = \frac{1}{2}(210° - 180°) = 15°\text{،}$$

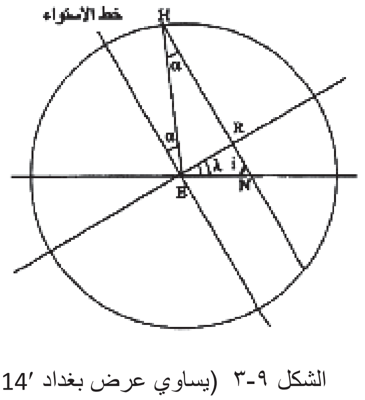
$$\widehat{LK} = 17°{,}5\text{،}$$

$$\widehat{KC} = \widehat{LW} - \frac{1}{6}\widehat{LW} = 15 - 2{,}5 = 12°5\text{،}$$

فيكون الخطّ WR منصِّفاً للزاويـة $\widehat{CRL}$، فيكون $LI // WR$ ، فيمرُّ الخطّ RC إذاً بالنقطـة I.

موضع P:

إذا كانت النقطة K' معرَّفة بالمعادلة: $\frac{\widehat{IK'}}{150} = \frac{\widehat{LK}}{210}$، يقطع الخطّ KK'، وفقاً لما سبق، الخطّ LI على النقطة P.



الشكل ٩-٣ (يساوي عرض بغداد ′33°14)

- إذا كان α=′23°27 ، يكون معنا: $\text{tg}\,\lambda = \frac{\cos 75°}{\text{tg}\, 23°27'} = \frac{0.258819}{0.433775} = 0.59666$، أيْ أنَّ λ ="30°49′43 .
- إذا كان $\alpha = 24°$، يكون $\text{tg}\, 24° = 0{,}445228$ ، ويكون $\text{tg}\,\lambda = 0{,}58131788$ ، أي λ= ″33°18′25 .

*يعطي النصّ: 14.10.10.

إنَّ لدينا: $\widehat{IK'} = \frac{17,5\times5}{7} = 12,5$، فيكون إذاً $\widehat{KC} = \widehat{IK'}$، فينتج من ذلك $CI//K'K$، ويكون

معنا $\widehat{KPL} = \widehat{CRW}$ وَ $\frac{\widehat{KC}}{\widehat{LK}} = \frac{5}{7}$.

إذا كان $CM \perp RH$ ، يكون معنا $RN = RM$ وَ $CM = IN$.

حساب CM:

$CM = IN$ ، $CM = RH \sin 75° = RI \sin 75° = 0,96592\times RI$

$= 54,812727 \times 0,96592 = 52,94471 = 52.56.40$.

حساب PI :

إنَّ لدينا، وفقاً للقضية ٦: $0,836259 = \frac{0,216439}{0,258819} = \frac{\sin 12°,5}{\sin 15°} = \frac{\sin\widehat{KC}}{\sin\widehat{LW}} = \frac{IP}{IR}$،

$IP = RI \times 0,836259 = 54,812727 \times 0,836259 = 45,8371 = 45.50.13$

$PN = IP - NI = 45.50.13 - 52.56.40 = 7.6.27$.

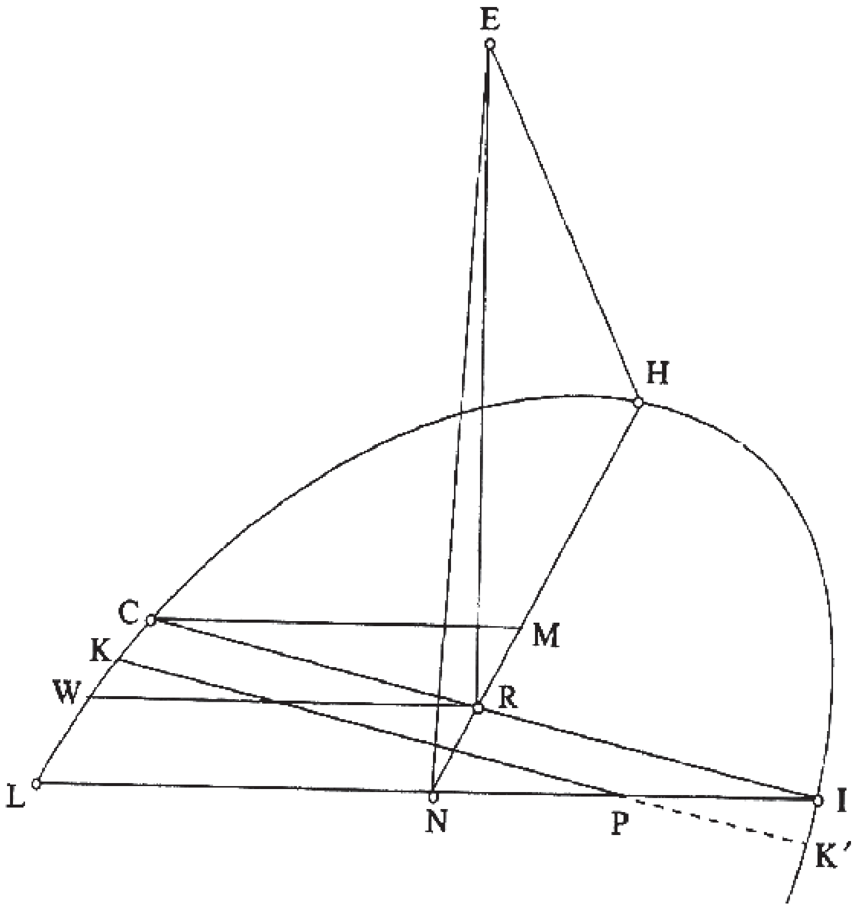
ملاحظة:

إنّ لدينا: $\frac{IP}{IR} = 0,836259 > \frac{5}{6} = 0,8333$، فينتج من ذلك: $\frac{5}{6} < \frac{IP}{IR}$؛ وهذا ما أثبته ابن الهيثم كما سنرى لاحقاً.

حساب NE:

إنّ لدينا: $EN^2 = RN^2 + ER^2 = (14,186577)^2 + (24,4042)^2$

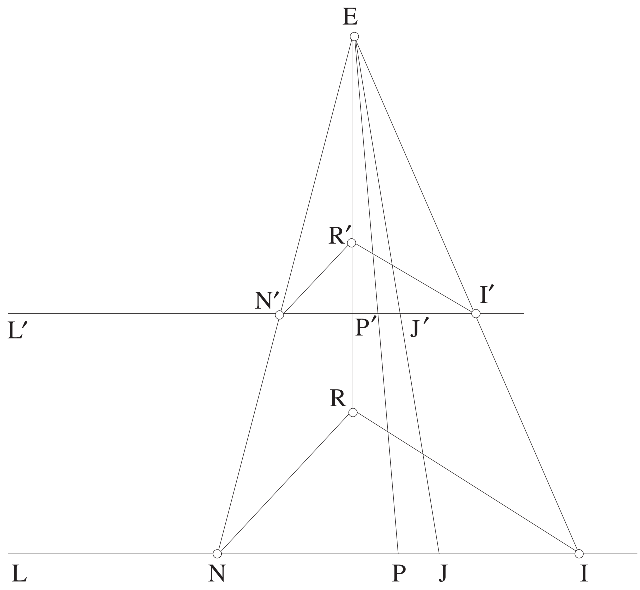
$= 201,2632 + 595,5650 = 796,8282$ ، أيْ أنّ : $EN = 28, 228$.



الشكل ٩-٤

لنأخذ أي دائرة زمانية، ذات مركز R'، موجودة بين دائرة السرطان ذات المركز R ودائرة مُعدِّل النهار ذات المركز E؛ تكون النقاط E ، R وَ R' على نفس الخطّ المستقيم. يقطع المستويُ ILE مستويَ الدائرة الزمانية ذات المركز R' وفقاً للخطّ $I'L'$، وتقطع الخطوطُ IE ، PE، وَ NE الخطَّ $I'L'$ حسب الترتيب على النقاط I' ، P'، وَ N'. المثلّثان INE وَ $I'N'E$ متشابهان وكذلك هما المثلّثان IPE وَ $I'P'E$. والمثلّثان INR وَ $I'N'R'$ هما أيضاً متشابهان.

يكون معنا: $\frac{EI'}{EI} = \frac{EP'}{EP} = \frac{ER'}{ER} = \frac{EN'}{EN}$ وَ $\frac{R'I'}{I'N'} = \frac{RI}{IN}$ و $\frac{R'I'}{I'P'} = \frac{RI}{IP}$.



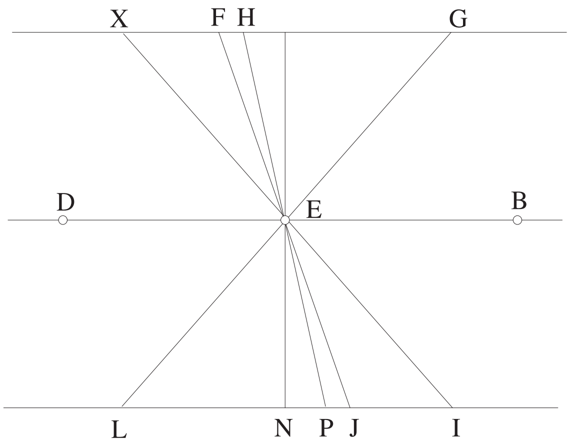
الشكل ٩-٥

ولكن $\frac{\sin \widehat{LW}}{\sin \widehat{KC}} = \frac{RI}{IP}$، فيكون معنا: $\widehat{LW} = 15°$ وَ $\widehat{KC} = 12°,5$ ، $\left(1+\frac{1}{5}\right) \widehat{KC} = \widehat{LW}$، فينتج من ذلك $1+\frac{1}{5} = \frac{\widehat{LW}}{\widehat{KC}}$ وَ $1+\frac{1}{5} > \frac{\sin \widehat{LW}}{\sin \widehat{KC}} = \frac{RI}{IP}$ ، فيكون $RI < \left(1+\frac{1}{5}\right) IP$ أو $IP > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) RI$.

وهذه النتيجة تبقى صحيحة مهما كان اختيار الدائرة الزمانية.

لقد كان معنا $IP > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) RI$. ليكن J على NI بحيث يكون $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) RI = IJ$ ؛ يكون معنا $IJ < IP$. يقطع الخطُّ JE كلَّ خطٍّ $I'P'$ مماثلٍ للخطّ IP على نقطةٍ J' ويكون معنا: $I'J' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) R'I'$ (الشكل ٩-٥).

كلُّ دائرة من الدوائر الزمانية المرفقة بالساعة الزمانية الأولى تقطع مستويَ الأفق وفقاً لخطٍّ موجود بين PE وَ JE للدوائر الزمانية الموجودة بين دائرتيْ السرطان ومعدّل النهار، كما تقطع مستويَ الأفق وفقاً لخطٍّ موجود بين HE وَ FE للدوائر الزمانية الموجودة بين دائرتيْ معدِّل النهار والجدي.



الشكل ٩-٦

حساب النسبة $\frac{PJ}{PE}$:

يكون معنا، إذا استخدمنا النظام العشري: $RI = 54,8127$ ، $IJ = 45,6773$ وَ $IP = 45,8371$ ، فينتج من ذلك: $JP = 0,1598$ ، $JP < \frac{1}{6}$ ، $PN = NI - IP = 7,1076$[١٧] ، فنستخرج:

$$PN^2 = 50,5180 \text{ ، } EN^2 = 796,8282 \cong 797 \text{ ،}$$

$$EP^2 = PN^2 + EN^2 = 847,3462 \text{ ، } EP = 29,10938 \quad (EP > 29)\text{،}$$

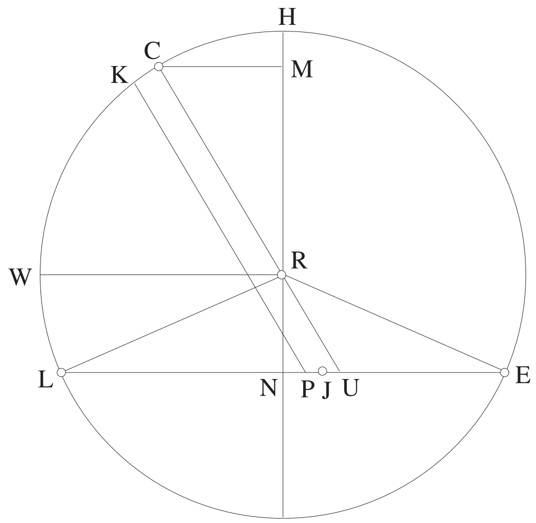
فنحصل على: $\frac{JP}{EP} < \frac{1}{29\times 6}$ أي $\frac{JP}{EP} < \frac{1}{174}$.

ملاحظة: إنَّ النقطة P، الموافقة لنهاية الساعة الأولى، تُحقّق إذاً: $PN \cong 7$ وَ $EN \cong 30$،

$\frac{PN}{EN} \cong \frac{7}{30}$ ؛ ويكون EN خطّ نصف النهار ويكون معنا: $(tg\ \widehat{NEP})_1 \cong \frac{7}{30}$.

يأخذ ابن الهيثم بعد ذلك النقطة K على مدار السرطان بحيث تكون القوسُ $\widehat{KL}$ قوسَ الساعة الخامسة.

[١٧] يعطي ابن الهيثم $PN = 7.6.54$, أيْ $7,11944$ ، فيكون $PN^2 = 50,686 \cong 50$ وَ $\frac{2}{3}$.



الشكل ٩-٧

$\widehat{LH} = 105°$، $\widehat{LW} = 15°$، $\widehat{WC} = 75°$ ، $\widehat{CH} = 15°$ ، $\widehat{LK} = 5$ ساعات $= 5\times 17°,5 = 87°,5$

$\widehat{WK} = 72°,5$ ، فيكون: $\widehat{KC} = 2°,5$.

يكون معنا:

$RH = CR = 54,812727$ ،

$CM = RN = CR \sin 15° = 14.11.10$ وَ $MR = CR \sin 75° =$ (57.57.20) ،

$$\frac{CR}{RU} = \frac{MR}{RN} = \frac{\sin 75°}{\sin 15°} = \frac{0,965926}{0,258819} = 3,732052$$ ،

فنستنتج، بما أنّ: $CR = 54,812727$ ، أنَّ :

$$RU = \frac{54,812727}{3,732052} = 14,687029 = 14.41.13$$ ، $CM = CR \times 0,258819$ ، وَ

$$\frac{CR}{RU} = \frac{CM}{NU} \Rightarrow NU = RU \times 0,258819$$ ، $NU = 14,687029 \times 0,258819 = 3,801282 = 3.48.6$.

$$\frac{\sin \widehat{LW}}{\sin \widehat{KC}} = \frac{RU}{UP} = \frac{\sin 15°}{\sin 2°,5} = \frac{0,258819}{0,043619} = 5,933629$$ ،

$$UP = \frac{RU}{5,933629} = \frac{14,687029}{5,933629} = 2,475218 = 2.28.30$$.

فينتج من ذلك أنَّ: $PN = 2.38.30 - 3.48.6 = 1.19.34 = 1,326$ ، $UJ = RU\frac{1}{6} = \frac{14.41.13}{6} = 2.27$

$JP = UP - UJ = 2.28.30 - 2.27 = 0.1.30 < 2'$.

نحن نعلم أنَّ $EN^2 \cong 798$ ، وأنَّ $PN^2 < 2$، فيكون $EP^2 \cong 800$، $EP = 28,284...$ ،

يعطي ابن الهيثم $EP = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + 28$، أي 28,264، ويحسب هذا العدد بالدقائق: $EP \cong 1700$،

فيكون $\frac{JP}{EP} > \frac{2}{1700}$، أيْ $\frac{JP}{EP} > \frac{1}{850}$.

وهكذا تكون النسبة $\frac{JP}{EP}$، المحسوبة للساعة الخامسة، أصغر من $\frac{1}{174}$ التي هي النسبة المرفقة بالساعة الأولى.

إنَّ هذه الطريقة قابلة للتطبيق لكلٍّ من الساعات الأخرى، فيكون لنا إذاً، للعرض المعني بالأمر ولكل ساعة من ساعات النهار $\frac{JP}{EP} < \frac{1}{174}$.

وإذا طبَّقنا نفس الطريقة لكلّ أفقٍ آخر، أيْ لكلّ عرض، نحصل على قيمة صغيرة للنسبة $\frac{JP}{EP}$، فتكون للخطّ JP قيمة لا يُعتدُّ بها بالنسبة إلى قيمة PE.

ملاحظتان:

١) يكون معنا $2 < PN^2$، $EN^2 \cong 800$، $\frac{1}{400} > \frac{PN^2}{EN^2}$، $\frac{1}{20} > \frac{PN}{EN}$؛ وتخصُّ هذه النتيجة النقطة P المرفقة بنهاية الساعة الخامسة؛ فيكون معنا حينئذ: $\frac{1}{20} > (tg\,\widehat{NEP})_5$.

٢) تكون النقطة C من دائرة الجدي على النقطة H في نهاية الساعة السادسة، فتكون إذاً في مستوي نصف النهار. وكذلك تكون النقطة المماثلة للنقطة C، لكل الدوائر الزمانية. كلُّ هذه النقاط تؤدّي إذاً إلى نفس الخطّ PE المتطابق مع الخطّ NE، فيكون $(tg\,\widehat{NEP})_6 = 0$.

وهكذا تكون كلُّ ساعة h مُرفقة بخطٍّ مُختلف.

القضية ١٠- حساب الطول الأقصى للظلّ على مستوي الرخامة.

يكون قوس النهار من مدار الجدي، للأفق $ABCD$ الذي تناولناه سابقاً، مساوياً لـِ $150°$، فتكون الساعة الزمانية مساوية لـِ $12°,5$.

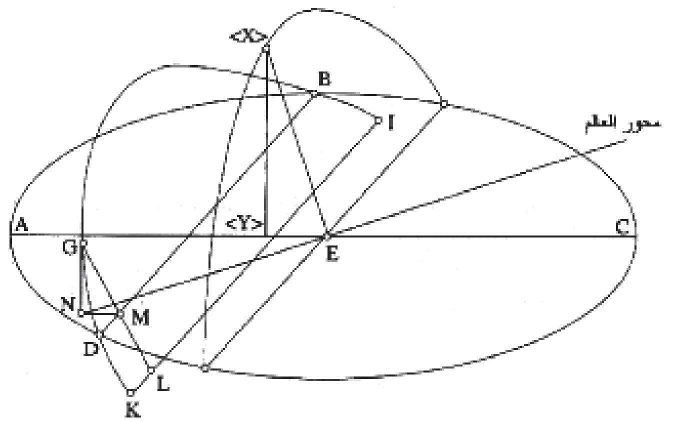
يكون معنا إذاً $\widehat{DGB} = 150°$، وإذا كانت القوسُ $\widehat{DG}$ الساعةَ الزمانية الأولى، وإذا كان IK القطر الموازي للخطّ DB، يكون معنا: $\widehat{DG} = 12°,5$، $\widehat{BI} = 15°$ $\widehat{DK}$، فينتج من ذلك $\widehat{GK} = 27°,5$.

ليكن LG مع $LG \perp IK$؛ تقطع LG الخطّ DB على النقطة M، فيكون معنا إذا كان r نصف قطر دائرة الجدي:

- $GL = r \sin 27°,5 = r \times 0,46174861$ ، مع $r = 60$ ،فيكون معنا $GL = 27.42.18$ ؛
- $ML = r \sin 15° = r \times 0,258819$ ، مع $r = 60$ ، فيكون معنا $ML = 15.31.45$.

فنستخرج من ذلك أنّ $GM = 12.10.33$ (أو $GM = r \times 0,20293$).

ليكن الخطّ NG عمودياً على $(ABCD)$؛ يكون NG موازياً للعمود المارّ بالنقطة E، والمستوي NEG يمرُّ إذاً بسمت الرأس للنقطة E.



الشكل ١٠

يكون معنا $GN \perp (ABCD)$ وَ $GM \perp BD$ ، فيكون $MN \perp BD$. يكون المستوي GMN موازياً لمستوي نصف النهار المُحدَّد بالخطّ CA وبالنقطة X التي هي موضع الشمس الذي له الميل الأقصى بالنسبة إلى مُعدِّل النهار، أيْ أنه المستوي YXE [$XY \perp (ABCD)$]. يكون معنا: $\widehat{MGN} = \widehat{EXY}$ وهذه الزاوية هي عرض المكان E. إذا كان العرض مساوياً لـِ 30°، يكون معنا $MN = \frac{1}{2} MG$.

إذا كان $r = 60$ ، $GM = 12,1758$ ، $GM^2 = 148,2501$ ، $GN^2 = \frac{3}{4} GM^2 = 111,1875$ ،

وَ $GN = 10,5445 \cong 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

ولكن $r \neq 60$ ، $r = 54.48.16 = 54,812727$[١٨] ، فينتج من ذلك أنَّ:

$$\frac{GN}{54,812727} = \frac{10,5445}{60} \Leftarrow GN = 9,6328 \cong 9 + \frac{2}{3}.$$

الخطُّ GE هو نصف قطر كرة العالَم، $GE = 60$، فيكون $GE^2 = 3600$؛ ولكن

$GN^2 = \left(9 + \frac{2}{3}\right)^2 = 93,32$، فيكون $EN^2 = 3506,68$ وَ $EN = 59,22 \cong 59 + \frac{1}{4}$،

$\frac{GN}{NE} = \frac{9 + \frac{2}{3}}{59 + \frac{1}{4}} = \frac{116}{711} = \frac{1}{6,13}$، فيكون إذاً: $GN < \frac{1}{6} NE$.

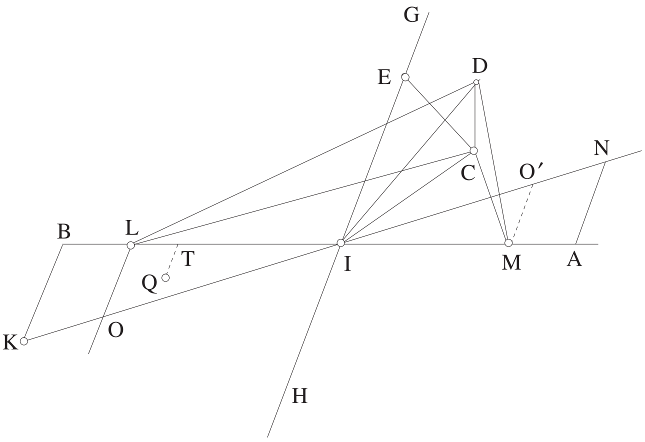
النسبة $\frac{GN}{NE}$ تساوي نسبة الارتفاع h لمقياس رخامة أفقية إلى l طول ظلّ المقياس، عندما تكون الشمس في الموضع G، أيْ في الساعة الأولى من دائرة الجدي. ويكون $\frac{h}{l} = \frac{1}{6,13} < \frac{1}{6}$، $l > 6h$.

لنلاحظ أنّ النسبة $\frac{h}{l}$ هي ظلّ الزاوية التي يُشكّلها شعاع الشمس GE مع مستوي الأفق.

القضية ١١- خلاصة القضيتين ٩ وَ ١٠.

ليكن معنا رُخامة أفقية مع مقياسها DC وخطّ التقاطع BA بين مستوي الرخامة والدائرة العظمى التي تُحدِّد الساعة الأولى على معدِّل النهار وعلى دائرتي السرطان والجدي؛ وليكن GEH الخطّ الذي يرسمه ظلُّ رأس المقياس D في يوميْ الاعتدالين، أي في اليومين اللذين ترسم فيهما الشمس دائرة مُعدِّل النهار. وتوافق النقطة I، نقطة التقاطع بين AB وَ EH، نهاية الساعة الأولى ليومي الاعتدال. ليكن L وَ M ظِلا النقطة D في نهاية الساعة الأولى على دائرتي السرطان والجدي حسب الترتيب. فتكون ظِلال المقياس DC إذاً: LC، IC، وَ MC للساعة الأولى في كلٍّ من اليومين المعنيين. ولقد رأينا أنّ LC هو الأطول وأنّ $CL \cong 6\ CD$.

[١٨] أثبت ابن الهيثم هذه النتيجة في القضية ٩ متبنياً °24 لميل فلك البروج بالنسبة إلى معدِّل النهار، وَ °60 لنصف قطر الكرة السماوية.



الشكل ١١

إذا استندنا إلى النتائج المُثبَتة في القضية ٩ (الشكل ٩-٣)، نـُخرِج من النقطـة I الخطَّ KN بحيث يكون $\widehat{LIK} = \widehat{JEP}$ و $\widehat{IBK} = \widehat{IAN} = \widehat{EPJ}$ [١٩].

يكون معنا: $\frac{1}{174} \cong \frac{PJ}{PE} = \frac{BK}{BI}$.

يتوافق الخطّ AB مع الخطّ HEP من الشكل ٩-٣ ، كما يتوافق الخطّ NIK مع الخطّ JEF.

ونستخرِج من النتائج المُثبَتة في القضية ٩ أنّ الدوائر العظام، التي تُحدِّد الساعة الزمانية الأولى للأيّام الأخرى من السنة، تقطع مستوي الرخامة على الخطوط التي تمرُّ بالنقطة I والتي توجَد بين الخطّين AB وَ NK.

الخطُّ GH الخاصّ بالاعتدالين يتوافق مع الخطّ DB من القضية ٩ ، فيكون $\widehat{BIE} > 90°$، وبالأحرى $\widehat{BIC} > 90°$، فيكون $CL > LI$.

إذا كان $LO \parallel BK$ ، يكون معنا: $\frac{1}{174} \cong \frac{BK}{BI} = \frac{OL}{LI}$.

إنّ لدينا من جهة أخرى $\frac{1}{6}CL \cong CD$، فيكون معنا إذاً: $CD > \frac{1}{6}LI$، $\frac{OL}{CD} < \frac{6 \cdot OL}{LI} < \frac{6}{174}$، وَ $\frac{6}{174} < \frac{1}{30}$، فينتج من ذلك: $OL < \frac{1}{30}CD$.

إذا كانت النقطة Q ظلَّ رأس المقياس في الساعة الأولى من يومٍ من أيام السنة، فإنّ النقطة Q تكون داخلَ أحد المثلّثين LIO أو IMO'؛ فإذا أخرجنا من Q الخطَّ TQ الموازي للخطّ KB، يكون حينئذ : $LO > TQ$ ، فنحصل على $\frac{1}{30} > \frac{QT}{CD}$.

[١٩] يتعلّق الأمر بالزاويتين $\widehat{JEP}$ وَ $\widehat{EPJ}$ من القضية ٩.

إذا كـان $CD=3$ أصـابع، يكـون $TQ < \frac{1}{10}$ إصـبع. وإذا كـان $CD = 18$ شـعيرة، يكـون $TQ < \frac{3}{5}$ شعيرة.

وهكذا لا تبتعد النقطة Q، التي هي ظِلُّ الرأس D، بشكل محسوس عن الخطّ ML، أيْ عن الخطّ AB الخاصّ بالساعة الأولى على دوائر معدِّل النهار والسرطان والجدي.

والبرهان الذي قمنا به للخطّ AB والخاصّ بالساعة الأولى يُمكن أن يُعاد بنفس الطريقة لأيّة ساعة أخرى، فنحصل على النتيجة: إذا أخذنا "أفقاً مائلاً"، أيْ مكاناً ذا عرض غير معدوم، فإنَّ خطوط الساعات على الرخامة تكون مستقيمة بالنسبة إلى الحسّ؛ أي إذا أخذنا كخطّ لساعة h ،على كل الدوائر الزمانية $C\alpha_i$، الخطَّ $\Delta_{90\cdot h}$ المُحدَّدَ بالساعة h على دوائر معدِّل النهار والسرطان والجدي، فإنّ الخطأ الذي نرتكبه حينئذ لا يُعتدُّ بقيمته؛ وكلُّ خطٍّ $\Delta_{i\cdot h}$ يُمكن اعتبارُه إذاً منطبقاً على $\Delta_{90\cdot h}$.

إذا كان عرض المكان معدوماً، أي في كلّ نقطة من مُعدِّل النهار الأرضي، يكون محور العالَم في مستوي الأفق؛ فتكون أقواسُ النهار إذاً أنصافَ دوائرٍ؛ والدائرة العظمى التي تُحدِّد ساعة h على معدِّل النهار السماوي، تُحدِّد نفسَ الساعة h على كلِّ دائرة زمانية. تَقطعُ هذه الدائرةُ العظمى الأفقَ وفقاً لخطّ نصف النهار، ويوافقها على مستوي الرخامة خطٌّ موازٍ لخطّ نصف النهار. ويكون الأمر كذلك لكلِّ ساعة من ساعات النهار. وتكون خطوط الساعات في هذه الأمكنة خطوطاً متوازية.

وهكذا طوَّر ابن الهيثم نظرية عامة للرخامة الشمسية وللخطوط الزمنية المرسومة عليها؛ وأثبت في هذه النظرية أنَّ نفس الرخامة يُمكن أن تَصْلُحَ في كل مكان، إذا قَبِلنا خطأً لا يُعتدُّ بقيمته.

إنَّ الأداةَ الرئيسية التي تستخدمها هذه النظريةُ هي مجموعة من المبرهنات في حساب المثلّثات تَخُصُّ تغيُّرَ دالاتٍ مثل $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$، ومن المبرهنات في الهندسة الكروية التي تُفضي إلى بعض المتباينات بين نِسَبٍ مُعيَّنةٍ، بحيث تسمح هذه المتباينات بتحديدٍ من أعلى لقيمة الخطأ المُرتكَب خلال الحساب التقريبي.

ويبدو هذا الاهتمام بتقدير قِيَم الأخطاء جديداً بشكل تامّ.

٣ـ تاريخ النصّ

لقد ذُكِرَ هذا المؤلّفُ "في خطوط الساعات" من قِبَل المُفَهرِسَيْن القديميْن: القفطي وابن أبي أصيبعة[٢٠]، في القائمة التي أوردها كلٌّ منهما؛ وهي تتضمَّن عناوينَ مؤلّفات ابن الهيثم السابقةَ لسنة ١٠٣٨. ونحن نعلم أيضاً أنّ ابن الهيثم تناول ثانية، في مؤلّفه "في الكرة المُحرِقة"، قضيَّةً مهمَّة من هذا المؤلّف الذي أشار إليه بنفسه. ولقد تناول ثانية أيضاً، من جهة أخرى، قضيةً أخرى من هذا المؤلّف ، في كتابه "في هيئة حركات كلّ واحد من الكواكب السبعة "؛ وكنا قد أشرنا إلى ذلك.

يوجَد هذا المؤلّف في مخطوطتين:

١ـ مجموعة عسكري رقم ٣٠٢٥، الأوراق: ١ظ.ـ١٩ظ. في مكتبة المتحف العسكري (*Askari Müze*) إسطنبول.

٢ـ مجموعة عاطف رقم ١٧١٤، الأوراق: ٥٧وـ٧٦و ، في المكتبة السليمانية، إسطنبول.

ولقد شرحنا بالتفصيل تاريخ هاتين المجموعتين في المجلّد الثالث[٢١]، كما بيَّنا أنّ المجموعة الأولى هي جزء من مجموعة كبرى مقسومة إلى قسمين؛ يوجَد القسم الأوَّل منها (Oct. 2970) في مكتبة ستاتسبيبليوتك (*Staatsbibliothek*) في برلين. ولقد نُسِخت المجموعة الأصليّة، قبل أن تُفصَل إلى قسمين، من قِبَل الريّاضيّ قاضي زادة حوالي الثلاثينيات من القرن الخامس عشر. وهي تتضمَّن في أهم قسم منها مؤلّفات لابن الهيثم. ولقد أثبتنا أنَّ مجموعة عاطف ليست إلا نسخةً من هذه المجموعة الأصلية فقط؛ حتّى أنَّ ليس لها، بغض النظر عن قيمتها الذاتية، أي قيمة خاصَّة بشجرة المخطوطات. وهكذا يكون نصُّ "في خطوط الساعات" ضمن مجموعة عاطف، قد نُسِخ فقط عن نصّ مجموعة المتحف العسكري. ونحن نتحقّق فيه من وجود ٣١ نقصاً في الكلمات وخمسة نواقص في الجُمَل، في حين أنه لا ينقص شيءٌ في نصّ المتحف العسكري بالنسبة إلى نصّ عاطف.

[٢٠] انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٤٨٨ـ٤٨٩.
[٢١] انظر المجلّد الثالث من هذه الموسوعة، ص ٤٥٣ـ٤٦٢.

٤ ـ نصّ كتاب ابن الهيثم
"في خطوط الساعات"

ا-٥٧-ظ
ب-١-ظ

إنّا لّما نظرنا في كتـاب إبراهيم بن سنان المهندس *في آلات الأظلال*، وجدناه يطعن على رأي المتقدمين في فرضهم الخطوط التي تحدّ نهايات الساعات الزمانية في سطوح الرخامات خطوطًا مستقيمة، واعتقادهم أن الخطّ الواحد المستقيم عنده تكون نهاية ظلّ الشخص عند آخر الساعة الواحدة الزمانية بعينها وأوّل الساعة التي تليها في كل يوم من أيّام السنة. وذكر أن الخط الواحد المستقيم في سطح الرخامة الأفقية ليس يحدّ نهاية الساعة الواحدة الزمانية في أكثر من ثلاث دوائر من الدوائر الزمانية – أحدها معدّل النهار، ودائرتين أخريين عن جنبتي معدّل النهار متساويتي البعد عنها؛ وأن الخط المستقيم الذي في سطح الرخامة الأفقية الذي يحدّ نهاية الساعة الواحدة الزمانية في الدوائر الثلاث التي تقدم ذكرها، هو الفصل المشترك بين سطح الرخامة وبين سطح دائرة عظيمة تمرّ برأس الشخص وبالنقط التي هي نهايات الساعة الواحدة الزمانية من الدوائر الثلاث. وهذا قول صحيح لا شكّ فيه. ثم ذكر أن هذه الدائرة العظيمة ليس تفصل واحدة من الدوائر الزمانية الباقية على نقطة هي نهاية تلك الساعة الزمانية من تلك الدائرة. وهذا القول أيضًا قول صحيح، إلاّ أنه ما قَدَرَ على تبيينه لأنه لما أتى بالبرهان على ما ادّعاه، بيّن بيانًا صحيحًا أن الدائرة الواحدة العظيمة تفصل محيطات الدوائر الثلاث على ثلاث نقط هي نهايات ساعة واحدة بعينها زمانية. ثم رام أن يبيّن أن الدائرة العظيمة التي فصلت

1 البسملة: نجد بعدها «ربّ يسر وتمم بالخير والسعادة» [ب] – 5 تحدّ: يحدّ، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ا] – 11 أحدها: احدهما [ا] – 12 الذي (الثانية): التي [ا، ب] – 20 نهايات: نهاية.

من الدوائر الثلاث ساعة زمانية، ليس تفصل من واحدة من الدوائر الباقية الزمانية تلك الساعة الزمانية. فأتى ببرهان لا يدلّ على هذا المعنى. / ا-٥٨-و وذلك أنه فرض دائرتين عظيمتين تفصلان من الدوائر / ب-٢-و الثلاث ساعتين زمانيتين؛ ثم أخرج دائرة رابعة زمانية، وبيّن أن تينك الدائرتين العظيمتين تفصلان من الدائرة الرابعة قوسين مختلفتين، ولم يبين أنه ليس واحدة من القوسين المختلفتين ساعة زمانية؛ فصارت نتيجة برهانه غير صريح دعواه؛ ومع ذلك فإن نتيجة البرهان ليس تمنع أن يكون واحدة من القوسين المختلفتين ساعة زمانية. فكأنه ادّعى أنه ليس واحد من خطوط الساعات مستقيمًا، وبرهن على أنه ليس جميع خطوط الساعات مستقيمة. فصار كلامه في هذا المعنى مقصراً عن غرضه، ومع ذلك غير مفصح عن حقيقة المعنى.

وأيضًا، فإنه لم يبين مقدار التفاضل الذي به تخرج أطراف أظلال الساعة الزمانية عن الخط المفروض لتلك الساعة. وقد يحتمل أن يكون خروج أطراف الأظلال عن الخط المستقيم المفروض لتلك الساعة خروجًا يسيراً، ليس له قدر محسوس. والبرهان إنما يقوم على الخط التعليميّ الذي هو طول لا عرض له، والخط المرسوم في سطح الرخامة هو خط له عرض محسوس، يحتمل أن يكون مشتملاً على تفاضل الأظلال، إذا كان التفاضل غير محسوس أو ينقص عنها بمقدار لا يعتد به.

وأيضًا، فإن جميع الآلات المعمولة للشمس والكواكب إنما هي معمولة على التقريب لا على غاية التحقيق. فإن الأسطرلاب إنما تُقسم دوائره بثلاثمائة وستين جزءاً. فإذا أخذ به الارتفاع، فإنما تخرج الأجزاء الصحيحة، وليس يكون الارتفاع أبداً أجزاء صحيحة، بل قد يكون مع الأجزاء الصحيحة دقائق في أكثر الأوقات؛ ولا تظهر الدقائق في الأسطرلاب، وربما كانت الدقائق كثيرة ولا تظهر مع كثرتها. وأيضًا، فإن الخطوط التي تقسم بها دوائر الأسطرلاب لكل واحد منها عرض / ا-٥٨-ظ محسوس؛ وذلك العرض هو جزء من الدرجة التي يفصلها ذلك الخط وهو جزء له قدر، لأن أجزاء دائرة الأسطرلاب تكون صغاراً وخاصة إذا كان الأسطرلاب صغيراً. ومع / ب-٢-ظ ذلك فليس يعتد بعروض خطوط قسمة الأسطرلاب.

5 يبين: يتبين [ا] – 6 صريح: صحيح [ا] – 9 كلامه: كلام كلامه، و«كلام» فوق «فصار» [ا] – 10 عن: كررها في بداية السطر التالي وضرب عليها بالقلم [ا] – 11 يبين: يتبين [ا] – 16 تفاضل: تفاصيل [ا] / التفاضل: التفاصيل [ا] – 20 بثلاثمائة: كتب بعدها «جزءاً» [ا].

وهذه المعاني موجودة أيضًا في ذات الحلق وفي الربع – الذي ترصد به الشمس – وفي جميع الآلات التي ترصد بها الشمس والكواكب. فقد يجوز أن يكون المتقدّمون فرضوا خطوط الساعات خطوطًا مستقيمة، على علم منهم بما في ذلك من التفاوت، اعتماداً على أن قصدهم فيما فرضوه التقريب لا غاية التحقيق، كما قصدوا مثل ذلك في عمل الأسطرلاب وآلات الرصد. ولما وجدنا هذا المعنى ملتبساً لتقصير إبراهيم بن سنان عن إيضاح حقيقته؛ واحتمال جوازه على طريق التقريب، رأينا أن ننعم النظر في البحث عن حقيقة هذا المعنى، ونُجَوِّز القول فيه ونحقق حدود الساعات الزمانية في سطوح الرخامات الأفقية. فأعملنا الفكر في ذلك واستقصينا البحث إلى أن تنكشف حقيقته. فظهر أن المتقدمين أصابوا في فرضهم خطوط الساعات خطوطًا مستقيمة وأن ذلك هو على طريق التقريب وعلى نهاية التقريب، وأنه لا يمكن أن ترسم حدود الساعات في سطوح الرخامات على وجه غير ذلك.

وتبين مما بيناه أن إبراهيم بن سنان أصاب من وجه وأخطأ من وجه؛ وذلك أنه نظر نظراً تعليميًا ولم ينظر نظراً طبيعيًا؛ فأصاب من حيث التخيّل وأخطأ من حيث الحسّ، لأنه سلك في تبيين ما ادّعاه على أن الخطوط المرسومة في الرخامات خطوط متخيلة، أعني طولاً لا عرض له؛ والخطوط المرسومة في الرخامات هي ذوات عروض؛ فلم يميز بين الخط المتخيل والخط المحسوس، فتمّ عليه الغلط.

ولما وجدنا هذا المعنى على ما وصفناه، عملنا فيه هذه المقالة ليكون عذراً للمتقدمين فيما رأوه من ذلك وحجة على ما فرضوه، وإظهاراً / للموضع ا-٥٩-و الذي زلّ عنه إبراهيم بن سنان.

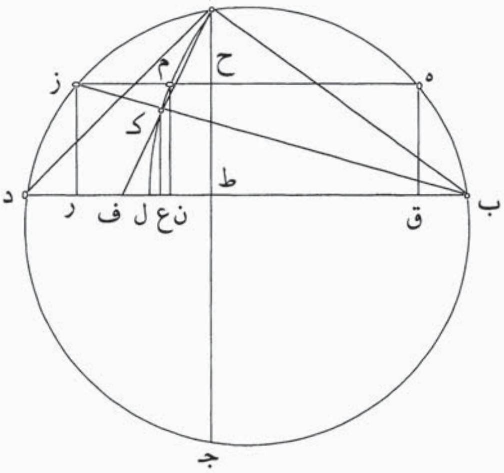
ونحن نقدّم لهذه المقالة مقدمات هي في نفسها علوم مستفادة لم يذكرها على ما ظهر لنا أحد ممّن تقدمنا،/ ومع ذلك ينكشف بها جميع ب-٣-و المعاني التي بينّاها في هذه المقالة. وهذا حين ابتدأ بالقول في ذلك، وبالله نستعين في جميع الأمور.

3 مستقيمة: مستقيما [ا] – 5 الرصد: غير واضحة، فأعاد كتابتها في الهامش [ب] – 6 إبراهيم: ابرهيم، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] – 10 تنكشف: انكشف [ب] – 14 وتبين: ويتبين [ا] – 15 حيث: حيث من [ا] – 17 خطوط: خطوطا [ا، ب]– 25 بيناها: بينا [ا].

⟨آ⟩ كل دائرة يخرج فيها وتران متوازيان يفصلان من الدائرة قوسين تكون أعظمهما ليست بأعظم من نصف دائرة، ونفرض على أصغر القوسين نقطة كيفما اتفق، ويخرج من النقطة عمود على الوترين، فإن نسبة جميع العمود إلى ما ينفصل منه في القوس الصغرى أعظم من نسبة ما ينفصل من القوس العظمى إلى ما ينفصل من القوس الصغرى، وإن نسبة ما ينفصل من القوس العظمى إلى ما ينفصل منها بين الوترين أعظم من نسبة العمود إلى ما ينفصل منه فيما بين الوترين.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د خرج فيها وترا ب د ه ز متوازيين، فكانت قوس ب ا د ليست بأعظم من نصف دائرة ا ب جـ د. وفرض على قوس ه ا ز نقطة آ كيفما اتفق، وخرج عمود ا ح ط.

فأقول إن: نسبة ط ا إلى ا ح أعظم من نسبة قوس د ا إلى قوس ا ز، وإن نسبة قوس ا د إلى قوس د ز أعظم من نسبة عمود ا ط إلى ط ح.



برهان ذلك: أنا نصل خطي ب ا ب ز، فيكون ب ا أصغر من ب ز وب ز أصغر من ب د؛ ونجعل ب مركزاً ونديز ببعد ب ا قوساً من دائرة، ولتكن

14 ب ا (الثانية): د ا، ونجد «ب ا» في الهامش [ا، ب].

قوس ا ك ل. فهذه القوس تقطع خط ه ز قبل أن يصل إلى خط ب ز، لأن خط ز ب تحت خط ه ز؛ فلتقطعه على نقطة م. ونخرج عمودي ك ع م ن. فلأن نقطة ب مركز قوس ا ك ل، وهي على محيط دائرة ا ب جـ د، تكون قوس ا ل شبيهة بنصف قوس ا د وتكون قوس ك ل شبيهة بنصف قوس ز د، فتكون نسبة / ا-٥٩-ظ قوس ا ل إلى قوس ل ك كنسبة قوس ا د إلى قوس د ز. ونصل ا ك وننفذه إلى ف. فتكون نسبة قطاع ب ا ك إلى قطاع ب ك ل أعظم من نسبة مثلث ب ا ك إلى مثلث ب ك ف، فتكون نسبة قوس ا ك إلى قوس ك ل أعظم من نسبة خط ا ك إلى خط ك ف. وتكون / ب-٣-ظ النسبة بالتركيب كذلك؛ ⟨فتكون نسبة قوس ا ل إلى قوس ل ك أعظم من نسبة خط ا ف إلى خط ك ف⟩، فتكون نسبة قوس ا ل إلى قوس ل ك أعظم من نسبة خط ا ط إلى خط ك ع. ونسبة ا ط إلى ك ع أعظم من نسبة ا ط إلى م ن، فنسبة قوس ا ل إلى قوس ل ك أعظم من نسبة ا ط إلى ط ح. فنسبة قوس ا د إلى قوس د ز أعظم من نسبة ا ط إلى ط ح. فنسبة ط ا إلى ا ح أعظم من نسبة قوس د ا إلى قوس ا ز.

وكذلك نبين أن نسبة ط ا إلى ا ح أعظم من نسبة قوس ب ا إلى قوس ا ه، وأن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ه أعظم من نسبة ا ط إلى ط ح.

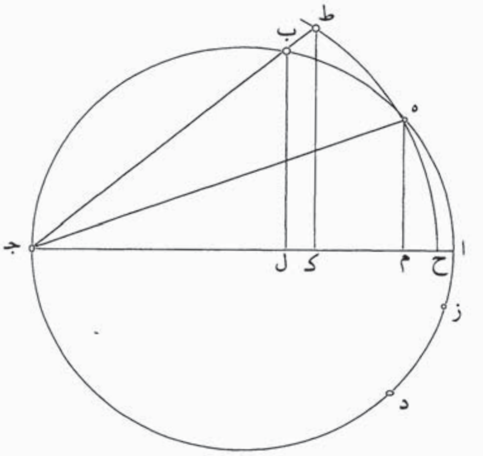
وإن أخرجنا من نقطة ه عموداً على خط ب د، كانت نسبة ط ب إلى ما يفصله العمود من خط ب د مما يلي نقطة ب أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ه، إذا كان عمود ا ط – إذا خرج حتى يقطع الدائرة – يفصل منها قوساً مما يلي نقطة ب ليست بأعظم من نصف دائرة. وإن أخرجنا من نقطة ز عموداً على خط ب د، كانت نسبة ط د إلى ما يفصله العمود من خط ب د مما يلي نقطة د أعظم من نسبة قوس ا د إلى قوس د ز، إذا كان عمود ا ط – إذا خرج حتى يقطع الدائرة – يفصل منها قوساً مما يلي نقطة د ليست بأعظم من نصف دائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

5 ل ك: ا د [ا، ب] – 6 وننفذه: ونبعده [ا] – 8 ك ف: ك ل [ا، ب] – 10 قوس (الأولى): قول [ا] – 15 وكذلك: مكررة [ا] – 19 عمود: عمودا [ا] / يفصل: نفصل [ا] / منها: منهما [ا] – 20 إن: ناقصة [ا] – 22 عمود: أثبتها تحت السطر [ا] – 23 الدائرة: ناقصة [ا] / يفصل: نفصل [ا] – 24 دائرة: دائرة ودائرة [ا] / ما أردنا: ناقصة [ا].

〈ب〉 كل دائرة نفصل منها قوسين مختلفتين، إحداهما نصف الأخرى، [ا-٦٠-و] أعظمهما ليست بأعظم من ربع دائرة، ثم نقسم القوسين على نسبة واحدة، فإن نسبة جيب القوس الصغرى إلى جيب قسمها أعظم من نسبة جيب القوس العظمى إلى جيب قسمها النظير لقسم القوس الصغرى.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د فصل منها / [ب-٤-و] قوسا ا ب ا د، وقوس ا د نصف قوس ا ب، وقوس ا ب ليست بأعظم من ربع دائرة؛ وجعل نسبة ب ا إلى ا ه كنسبة د ا إلى ا ز.

فأقول إن: نسبة جيب قوس د ا إلى جيب قوس ا ز أعظم من نسبة جيب قوس ب ا إلى جيب قوس ا ه.



برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ا قطراً لدائرة، وليكن ا جـ؛ ونصل خطي ب جـ جـ ه. فيكون خط ب جـ أصغر من خط ه جـ، وخط ه جـ أصغر من خط ا جـ. فنجعل نقطة جـ مركزاً وندير ببعد جـ ه قوساً من دائرة، فهذه القوس تقطع خط ا جـ في داخل الدائرة وتقطع خط ب جـ خارج الدائرة؛ فلتقطع خط ا جـ على نقطة ح ولتقطع خط ب جـ على نقطة ط. ونخرج أعمدة ط ك ب ل ه م، فيكون ط ك أعظم من ب ل وب ل أعظم من ه م، فتكون نسبة ط ك إلى ه م أعظم / [ا-٦٠-ظ] من نسبة ب ل إلى ه م. وط ك هو جيب قوس ط ه ح، وه م هو جيب قوس ه ح، وهو جيب قوس ه ا، وب ل هو جيب قوس ب ا لأن

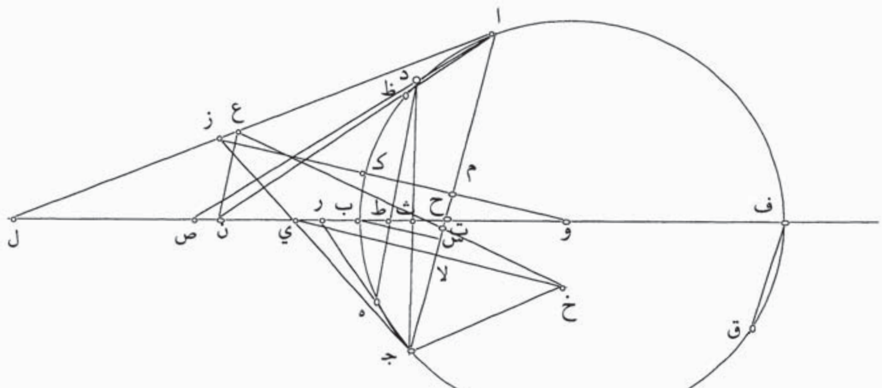
1 مختلفتين: مختلفين [ا، ب] – 2 أعظمهما: اعظمها [ا] / ليست: وليست [ا] – 5 فصل: ناقصة [ا] – 9 ب ا: د ا [ا، ب] – 14 ولتقطع: ويقطع [ا، ب].

خط ا جـ قطر مشترك للقوسين. فنسبة جيب قوس ط ح إلى جيب قوس ه ح أعظم من نسبة جيب قوس ب ا إلى جيب قوس ا ه. وقوس ط ه ح شبيهة بنصف قوس ب ا، لأن زاوية ا جـ ط على مركز دائرة ط ه ح وهي على محيط دائرة ا ب جـ. وكذلك قوس ه ح هي شبيهة بنصف قوس ه ا، فقوس ط ه ح شبيهة بقوس ا د؛ وقوس ه ح شبيهة بقوس ا ز، فنسبة جيب قوس ط ه ح إلى جيب قوس ه ح كنسبة جيب قوس د ا إلى جيب قوس ا ز، فنسبة جيب قوس د ا إلى جيب قوس ا ز أعظم من نسبة جيب قوس ب ا إلى جيب قوس ا ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹جـ› إذا فصل من / دائرة قوسان مختلفتان وقسم القوسان على نسبة واحدة، وكان القسم الأعظم من القوس العظمى ليس بأعظم من ربع دائرة، فإن نسبة جيب القسم الأعظم من القوس الصغرى إلى جيب القسم الأصغر منها أعظم من نسبة جيب القسم الأعظم من القوس العظمى إلى جيب القسم الأصغر منها. ب-٤-ظ

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ فصل منها قوس ا ب جـ، وقسمت على نقطة ب حتى / صار ا ب أعظم من ب جـ، وكانت قوس ا ب ليست بأعظم من ربع دائرة؛ وجعل نسبة د ب إلى ب ه كنسبة ا ب إلى ب جـ. ا-٦١-و

أقول: إن نسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ.



1 للقوسين: القوسين [ا] – 2 جيب (الثانية): ناقصة [ا] – 3 على (الثانية): ناقصة [ا] – 6 د ا: ا د [ا] – 9 مختلفتان: مختلفان [ا] – 13 القسم: القوس [ا] – 16 دائرة: الدائرة [ا].

برهان ذلك: أنا نحدّ مركز الدائرة، وليكن و؛ ونصل و ب، ونصل ا جـ د ه، ولينفصلا بخط و ب على نقطتي ح ط. ونخرج من نقطتي ا جـ خطين يماسان الدائرة؛ فهما يلتقيان لأن الزاويتين اللتين تحدثان عند نقطتي ا جـ تكونان حادّتين، لأن كل واحدة منهما هي التي توترها قوس ا ب جـ التي هي أقل من نصف دائرة، فليلتقيا على نقطة ز.

ولتكن قوس ا ب أوّلاً أقلّ من ربع دائرة. ونصل و ز، فهو يقطع ا جـ بنصفين ويكون عموداً عليه، ويقطع قوس ا ب جـ بنصفين؛ فليقطع القوس على نقطة ك ويقطع خط ا جـ على نقطة م. ونخرج ب و في جهة و، وليلق الدائرة على نقطة ف. فلأن قوس ا ب أعظم من قوس ب جـ، تكون قوس جـ ف أعظم من قوس ا ف. فنفصل قوس جـ ق مثل قوس ا ف، ونصل ف ق. فيكون ف ق موازياً لخط ا جـ، فتكون زاوية ب ح جـ مثل زاوية ب ف ق. ولأن قوس جـ ق مثل قوس ا ف، وقوس ا ف أعظم من ربع دائرة لأن قوس ا ب أقلّ من ربع دائرة، تكون قوس جـ ق أعظم من قوس ا ب، فقوس ق جـ ب أعظم من قوس ا ب جـ. وقوس ق جـ ب هي التي توتر زاوية ب ف ق، وقوس ا ب جـ هي التي توتر زاوية ز ا جـ، فزاوية ب ح جـ أعظم من زاوية ز ا جـ، فخط ا ز يلقى خط ح ب إذا خرجا على استقامة، فليخرجا وليلتقيا على نقطة / ل. وخط ح ل يقطع خط جـ ز، فليقطعه على نقطة ي. ب-٥-و

فلأن خط ف ب قطر الدائرة، تكون نسبة ا ح إلى ح جـ كنسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس / ب جـ، لأن الجيبين هما العمودان اللذان يقعان من نقطتي ا جـ على قطر ف ب. فيكونان متوازيين، ويكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ا ح إلى ح جـ. ا-٦١-ظ

وكذلك يتبين أن نسبة د ط إلى ط ه هي كنسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه. ونسبة القوس إلى القوس أعظم من نسبة الجيب إلى الجيب، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم من نسبة ا ح إلى ح جـ.

1 و ب: رب [ا] – 2 د ه: د ب [ا] / و ب: اوب [ا] – 5 ز: كتب «ب» وأثبت «ز» في الهامش [ب] – 8 ب و: ب د [ا، ب] – 10 جـ ق: جـ ف [ا، ب] – 11 ب ح جـ: ب حـ ح [ا] – 12 جـ ق: جـ ف [ا] / وقوس: قوس [ا] – 13 جـ ق: جـ ف [ا] – 14 ق جـ ب (الأولى والثانية): ف جـ ب [ا] – 16 ح ب: جـ ب [ا، ب] – 17 جـ ز: جـ ب [ا] – 20 فيكونان: ويكونان [ب].

ونخرج عمود ب س، فيكون نسبة م جـ إلى جـ س أعظم من نسبة قوس كـ جـ إلى قوس جـ ب، كما تبين في الشكل الأول من هذه المقالة. فيكون نسبة ا جـ إلى جـ س أعظم من نسبة قوس ا ب جـ إلى قوس جـ ب. فيكون نسبة ا س إلى س جـ أعظم من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، ونسبة ا ح إلى ح جـ أصغر من نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ. فالفصل الذي يقسم خط ا جـ على نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ يكون فيما بين نقطتي ح س، فليكن الفصل نقطة ت. ونخرج من نقطة ي عمود ي لا، فتكون نقطة لا فيما بين نقطتي س جـ، فيكون نسبة ا لا إلى لا جـ أعظم من نسبة ا ت إلى ت جـ بكثير. ونخرج من نقطة جـ خطًا موازيًا لخط ا ز المماس، وليكن جـ خ. فيكون زاوية ا جـ خ مثل زاوية ا جـ ز. ونخرج عمود ي لا، فهو يلقى خط جـ خ، فليلقه على نقطة خ. فيكون لا خ مثل لا ي وخ جـ مثل جـ ي. ونصل خ ت وننفذه على استقامة، فهو يلقى خط ا ل، فليلقه على نقطة ع. فيكون نسبة ا ع إلى جـ خ كنسبة ا ت إلى ت جـ التي هي نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، فيكون نسبة ا ع إلى جـ ي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ؛ ونسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ هي كنسبة قوس ا د إلى قوس جـ ه، لأنها كنسبة قوس د ب إلى قوس ب ه. فنسبة ا ع إلى جـ ي كنسبة قوس ا د إلى قوس جـ ه. ونخرج خط/ ع ن موازيًا لخط ا جـ، فهو ب-٥-ظ
يقطع خط ح ل، فليقطعه على نقطة ن. فلأن ا ت أعظم من ت جـ، يكون/ ا-٦٢-و
ا ع أعظم من جـ خ، فهو أعظم من جـ ي فهو يقطع خط جـ ي فوق نقطة ي، فهو يقطع خط ح ل فوق نقطة ي ويكون زاوية ا ن ع حادّة، لأنها مثل زاوية ن ا جـ الحادّة، فزاوية ا ع ن منفرجة. ونصل وتري ا د جـ ه ونصل ا ن فهو يقطع قوس ا ب، فليقطعه على نقطة ظ. فإن كانت نقطة د فيما بين نقطتي ا ظ، فإنا نخرج ا د على استقامة فهو يقطع ع ن فيما بين نقطتي ع ن، فليقطعه على نقطة ش. فنقطة ش فيما بين نقطتي ع ن وخط ا ش أعظم من خط ا ع. ونخرج ا ش فهو يلقى خط ح ل فيما بين نقطتي ل ن، فليلقه على نقطة ص. فيكون ا ص أعظم بكثير من خط ا ع. فنسبة ا ص إلى جـ ي أعظم

1 م جـ: م ح [ا] – 5 ح جـ: ح خـ [ا] – 7 ح: جـ [ا، ب] – 11 ي لا: لا [ا] – 12 خ ت: ح ب [ا] / وننفذه: ونبعده [ا] – 13 نسبة (الثانية): ناقصة [ا] – 15 ونسبة ... قوس ب جـ: ناقصة [ا] – 17 خط: ناقصة [ا] – 19 جـ ي (الثانية): ح ي [ا، ب] – 20 ح ل: خ ل [ب] / ا ن ع: ا ع ن [ا، ب].

بكثير من نسبة قوس ا د إلى قوس جـ ه. ونخرج جـ ه على استقامة، فهو يلقى خط ب ي، فليلقه على نقطة ر. ونصل جـ ب، فيكون زاوية جـ ب ح حادّة، فزاوية جـ ب ر منفرجة، فزاوية جـ ر ي منفرجة، فخط جـ ي أعظم من خط جـ ر، فنسبة ا ص إلى جـ ر أعظم بكثير من نسبة قوس ا د إلى قوس جـ ه. ونسبة قوس ا د إلى قوس جـ ه أعظم من نسبة وتر ا د إلى وتر جـ ه. وإذا بدلنا، كانت نسبة ص ا إلى ا د أعظم من نسبة ر جـ إلى جـ ه، فنسبة ص د إلى د ا أعظم من نسبة ر ه إلى جـ ه، فنسبة د ص إلى ص ا أعظم من نسبة ه ر إلى ر جـ. ونصل د جـ، وليقطع خط ب ح على نقطة ث، فيكون قد تقاطع فيما بين خطي ص ا ا جـ خطا جـ د ص ح على نقطة ث. فنسبة جـ ح إلى ح ا مؤلفة من نسبة جـ ث إلى ث د، ومن نسبة د ص إلى ص ا، فنسبة جـ ث الثالث إلى ث د الرابع مؤلفة من نسبة جـ ح الأول إلى ح ا الثاني ومن نسبة ا ص السادس إلى ص د الخامس. وذلك أنه إذا جعل بين الأول والثاني مقدار متوسط وجعل نسبة الأول إلى المتوسط كنسبة الثالث إلى الرابع، كانت نسبة / المتوسط إلى الثاني كنسبة الخامس / إلى السادس. فيكون نسبة الأول إلى المتوسط، التي هي نسبة الثالث إلى الرابع، مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ومن نسبة الثاني إلى المتوسط التي هي نسبة السادس إلى الخامس. فيكون نسبة الثالث إلى الرابع مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ومن نسبة السادس إلى الخامس. فنسبة جـ ث إلى ث د مؤلفة من نسبة جـ ح إلى ح ا، ومن نسبة ا ص إلى ص د. فإذا عكسنا كانت نسبة د ث إلى ث جـ مؤلفة من نسبة ا ح إلى ح جـ ومن نسبة د ص إلى ص ا.

ب-٦-و
ا-٦٢-ظ

وأيضًا، لأنه قد تقاطع فيما بين خطي د جـ جـ ر، خطا د ه ر ث على نقطة ط، فنسبة د ث إلى ث جـ مؤلفة من نسبة د ط إلى ط ه ومن نسبة ه ر إلى ر جـ. وقد كانت نسبة د ث إلى ث جـ مؤلفة من نسبة ا ح إلى ح جـ ومن نسبة د ص إلى ص ا، فالنسبة المؤلفة من نسبة د ط إلى ط ه ومن نسبة ه ر إلى ر جـ هي النسبة المؤلفة من نسبة ا ح إلى ح جـ ومن نسبة د ص إلى ص ا. لكن نسبة د ص إلى ص ا أعظم من نسبة ه ر إلى ر جـ، فنسبة د ط

3 جـ ب ر: جـ ب ه [ا، ب] – 6 كانت: كان [ا، ب] – 8 ب ح: ب جـ [ا] – 11 ح ا: جـ ا [ا، ب] – 18 جـ ث: جـ ب [ا] – 22 ث جـ: ب جـ [ا، ب] / ه ر: ه ب [ا، ب].

إلى ط ه أعظم من نسبة ا ح إلى ح جـ. ونسبة د ط إلى ط ه هي نسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه، ونسبة ا ح إلى ح جـ هي نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ، فنسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس د ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ.

وإن كانت نقطة د هي نقطة ظ، فنقطة ش هي نقطة ن، وخط ا ن أعظم من خط ا ع، وتمام البرهان على مثل ما تقدم.

وإن كانت نقطة د فيما بين نقطتي ظ ب، وذلك يكون إذا كانت قوس د ب في غاية الصغر، فإنا نضعف قوس د ب ونضعف ضعفها أبداً إلى أن يصير نهاية أضعافها من وراء نقطة ظ، ونضعف قوس ب ه مثل تلك الأضعاف. فتعود الصورة إلى الصورة التي قام عليها البرهان. فيكون نسبة جيب أضعاف قوس / [ا-٦٣-و] د ب إلى جيب أضعاف قوس ب ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ. وقد تبين في الشكل ب من هذه المقالة أن نسبة جيب كل قوس / [ب-٦-ظ] إلى جيب بعضها أعظم من نسبة جيب ضعف القوس إلى جيب ضعف البعض. فيكون نسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه أعظم من نسبة جيب أضعاف قوس د ب إلى جيب أضعاف قوس ب ه. ونسبة جيب أضعاف قوس د ب إلى جيب أضعاف قوس ب ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ، لأن صورة الأضعاف تكون على مثل الصورة التي في الشكل ب. فنسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ بأي مقدار كانت قوس د ه.

وإن كانت قوس ا ب ربع دائرة، فإن قوس ا ف تكون ربع دائرة. فيكون قوس ق جـ ربع دائرة، فيكون قوس ق جـ ب مثل قوس ا ب جـ، فيكون زاوية جـ ا ز مثل زاوية ب ف ق، فيكون زاوية جـ ا ز مثل زاوية جـ ح ب، فيكون خط ا ز موازياً لخط ح ب، فيكون ا د إذا خرج على استقامة، يلقى خط ح ب على جميع الأقسام التي تقدمت، فيكون البرهان هو البرهان الذي

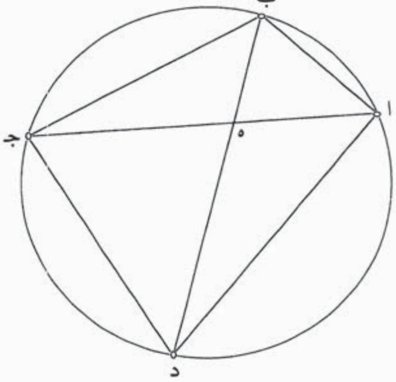
8 د ب (الأولى): د ه [ا، ب] – 12 ا ب: ب ه [ا] – 17 ب جـ: ب ه [ا، ب] – 18 جيب: ناقصة [ا] – 23 جـ ا ز (الأولى): جـ ا ب [ا] – 24 ح ب: ح ل [ا، ب] – 25 ح ب: ح ل [ا، ب] / على: مكررة [ا].

تقدم. فإذا كانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة قوس د ب إلى قوس ب ه، وكانت قوس ا ب ليست بأعظم من ربع دائرة، فإن نسبة جيب قوس د ب إلى جيب قوس ب ه أعظم من نسبة جيب قوس ا ب إلى جيب قوس ب جـ على تصاريف الأحوال وعلى جميع الأقسام.

ويلزم من هذه النسبة في القسي من الدوائر المختلفة أن كل قوسين مختلفتين من دائرة واحدة شبيهتين بقوسين من دائرة أخرى، فإن نسبة جيب إحدى القوسين / إلى جيب الأخرى من الدائرة الواحدة كنسبة جيب القوس ب-٧-و الشبيهة بالأخرى من الدائرة المقدمة إلى جيب / القوس الشبيهة بالثانية. ا-٦٣-ظ

فكل قوسين مختلفتين من دائرة تكون أعظمهما أصغر من ربع دائرة، فإن نسبة جيب أعظمهما إلى جيب أصغرهما أعظم من نسبة جيب كل قوس أعظم من الشبيهة بأعظم القوسين – إذا لم تكن أعظم من ربع دائرة – إلى جيب القوس النظيرة لأصغر القوسين إذا كانتا من دائرة واحدة وكانتا مناسبتين للقوسين الصغريين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

<د> كل دائرة يخرج فيها وتر فيقسمها بقسمين كيفما اتفقا، ثم تُقسم ا-٦٤-و القوسان على نسبة واحدة ويكون القسمان النظيران متبادلين، ثم يُوصل بين طرفي القوسين المتبادلتين بخط مستقيم، فإنه يلقى الوتر على زاوية يكون نسبتها إلى زاويتين قائمتين كنسبة كل واحدة من القوسين المتبادلتين إلى القوس التي هي فيها.



مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د خرج فيها وتر ا جـ، فقسمها بقسمين، وجعل نسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب جـ كنسبة قوس د جـ إلى قوس جـ د ا، ووصل ب د.

فأقول: إن نسبة زاوية ا ه ب إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب جـ التي هي كنسبة قوس د جـ إلى قوس جـ د ا.

6 مختلفتين: مختلفين [ا] / من: ناقصة [ا] / بقوسين: بقوس [ا، ب] – 8 بالثانية: بالثالثة [ا، ب] – 9 فكل: وكل [ا] / مختلفتين: مختلفين [ا] / أعظمهما: أعظمها [ا] – 12 كانتا (الأولى والثانية): كانا [ا، ب] – 14 فيقسمها: فقسمها [ب] – 21 ب ا: د ا [ا، ب] – 24 ب ا: ا ب [ا].

برهان ذلك: أن خط ب ه د يقطع خط ا جـ فيما بين نقطتي ا جـ، لأن نقطتي ب د عن جنبتي خط ا جـ، فليقطعه على نقطة ه. ونصل خطوط ا ب ب جـ ا د د جـ. فيكون نسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية جـ ا ب كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ. وكذلك يكون نسبة زاوية جـ ا د إلى زاوية ا جـ د كنسبة قوس جـ د إلى قوس د ا. ونسبة قوس جـ د إلى قوس د ا هي كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، وزاوية جـ ا د مثل زاوية د ب جـ وزاوية ا جـ د مثل زاوية ا ب د، فنسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية جـ ا ب كنسبة زاوية جـ ب ه / إلى زاوية ه ب ا وكنسبة الجميع – الذي هو زاوية ا ه ب – إلى الجميع الذي هو زاوية ب ه جـ، فنسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية جـ ا ب كنسبة زاوية ا ه ب إلى زاوية ب ه جـ. فنسبة زاوية ا ه ب إلى زاوية ب ه جـ كنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ. فنسبة زاوية ا ه ب إلى زاويتي ا ه ب ب ه جـ – اللتين هما مساويتان لقائمتين – كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب جـ، ويكون/ نسبة زاوية ب ه جـ إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ب جـ إلى قوس ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ب-٧-ظ

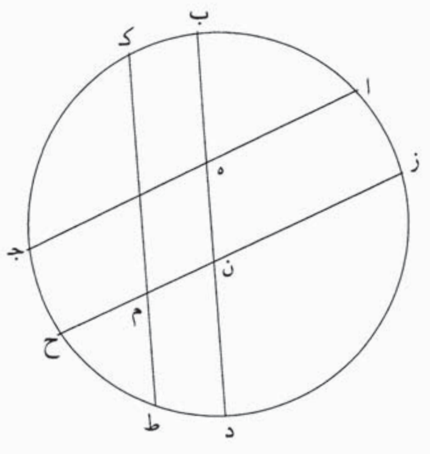
ا-٦٤-ظ

‹ه› وأيضًا، فلنعد الدائرة والقوسين، ونخرج ز ح موازيًا لوتر ا جـ ونجعل نسبة ط ز إلى ز ط ح كنسبة د ا إلى ا د جـ، ونجعل نسبة ك ح إلى ح ك ز كنسبة ب جـ إلى جـ ب ا، فيكون نسبة ط ز إلى ز ط ح كنسبة ك ح إلى ح ك ز. ونصل ك ط.

فأقول: إن خط ط ك موازٍ لخط ب د.

برهان ذلك: أن خط ط ك يقطع خط ز ح، فليقطعه على نقطة م. فيكون نسبة زاوية ك م ح إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ك ح إلى قوس ح ك ز، كما تبين في الشكل الذي قبل هذا. فيكون نسبة زاوية ك م ح إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس جـ ب إلى قوس جـ ب ا. وقد كانت نسبة قوس ب جـ إلى قوس جـ ب ا كنسبة زاوية ب ه جـ إلى زاويتين قائمتين،

2 ب د: جـ د، ثم أثبت الصواب في الهامش [ا، ب] – 6 ا جـ د: ا د جـ [ا، ب] – 14 ا ب جـ: ب جـ [ا، ب] – 16 د ا إلى ا د جـ: ك ا إلى ا ك جـ [ا، ب] – 19 موازٍ: موازي، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ا، ب] – 21 ك م ح: ك م ط [ا] – 22 ح ك ز: ك ح ر [ا، ب].



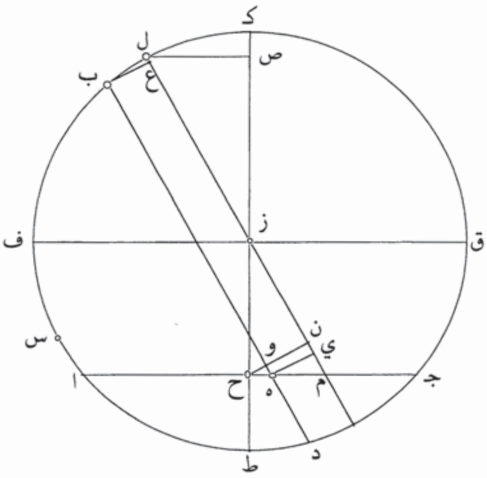
فنسبة زاوية كـ م ح إلى زاويتين قائمتين كنسبة زاوية ب ه جـ إلى زاويتين قائمتين، فزاوية كـ م ح مساوية لزاوية ب ه جـ، وخط ب د يقطع خط / ز ح لأنه يقطع خط ا جـ الموازي له. فليقطع خط ب د خط ز ح على نقطة ن، ب-٨-و
فيكون زاوية ب ه جـ مثل زاوية ه ن ح، كانت نقطة ن في داخل الدائرة أو كانت خارجة منها، فزاوية ه ن ح مساوية لزاوية ز م ط وهما متبادلتان، فخطا ط كـ ب د متوازيان؛ / وذلك ما أردنا أن نبيّن. ا-٦٥-و

⟨و⟩ وأيضاً، فلنعد الدائرة والقوسين وليكن مركز الدائرة نقطة ز، ونخرج من نقطة ز عموداً على خط ا جـ، وليكن ز ح، وننفذه في الجهتين إلى ط وإلى كـ.

فأقول: إن نقطة ه فيما بين نقطتي ح جـ، وإن خط ب د يقطع خط ز ح فيما بين نقطتي ز ح.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ز قطراً موازياً لخط ا جـ، وليكن ف ز ق، ونخرج من نقطة ز خطاً موازياً لخط ب د، وليلق قوس ف كـ ق على نقطة ل وليلق خط ا جـ على نقطة م. فيكون زاوية ف ز ل مثل زاوية ا م ل وزاوية ا م ل مثل زاوية ا ه ب، فزاوية ف ز ل مثل زاوية ا ه ب. ونسبة زاوية ا ه ب إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب جـ، فنسبة زاوية ف ز ل

2 كـ م ح: كـ ب ح [ا، ب] / لزاوية: ناقصة [ا] / ب د: ر د [ا] – 3 ا جـ: ا ب [ا، ب] – 5 ه ن ح: ه ر ح [ا، ب] / ز م ط: ر ح ط [ا، ب] – 6 فخطا: فخط [ا] – 8 وننفذه: ونبعده [ا].



إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب ج. ونسبة زاوية ف ز ل إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس ل ف إلى قوس ف ل ق، لأن نقطة ز مركز الدائرة وقوس ف ل ق نصف دائرة. فنسبة قوس ل ف إلى قوس ف ل ق كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب ج. فنسبة قوس ل ف إلى قوس ف ل ك كنسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب ك. ونجعل نسبة قوس س ف إلى قوس ف ا كنسبة قوس ل ف إلى قوس ف ل ك، فيكون نسبة قوس س ل إلى قوس ا ب ك هي نسبة قوس ل ف إلى قوس ف ك، التي هي نسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب ك. فنسبة قوس س ل إلى قوس ا ب ك هي نسبة قوس ب ا إلى قوس ا ب ك، فقوس س ل هي مثل / قوس ب ا. فقوس ا س هي ب-٨-ظ مثل قوس ب ل، ونسبة قوس ف ا إلى قوس ا س هي نسبة قوس ف ا إلى قوس ب ل، ونسبة قوس س ف إلى قوس ف ا هي كنسبة قوس ل ف إلى قوس ف ك، فنسبة قوس ف ك إلى قوس ك ل كنسبة/ قوس ف ا إلى قوس ا-٦٥-ظ ا س. فنسبة قوس ا ف إلى قوس ب ل كنسبة قوس ف ك إلى قوس ك ل، فنسبة جيب قوس ا ف إلى جيب قوس ب ل أعظم من نسبة جيب قوس ف ك إلى جيب قوس ك ل، لأن قوس ا ف أصغر من قوس ف ك.

ونخرج عمود ل ص وعمود ح ن وعمود ه ي وعمود ب ع، فيكون ل ص جيب قوس ل ك وز ك هو جيب قوس ف ك؛ وز ل مثل ز ك وح ز هو

13 ب ل: ب ك [ا، ب] – 17 هو (الثانية): فوق السطر [ب] ناقصة [ا].

مثل جيب قوس ا ف وب ع هو جيب قوس ل ب، فنسبة ز ح إلى ب ع أعظم من نسبة ز ل إلى ل ص. ونسبة ز ل إلى ل ص هي كنسبة ز م إلى م ح، ونسبة ز م إلى م ح هي كنسبة ز ح إلى ح ن، فنسبة ز ح إلى ب ع أعظم من نسبة ز ح إلى ح ن، فخط ب ع أصغر من خط ح ن. فخط ب ه د يقطع عمود ح ن فيما بين نقطتي ح ن، فليقطعه على نقطة و. وإذا كان يقطع عمود ح ن فيما بين نقطتي ح ن، فهو يقطع خط ز ح فيما بين نقطتي ز ح. وخط ب ه د يقطع خط ا جـ، وإذا كان يقطع خط ز ح فيما بين نقطتي ز ح وهو يقطع خط ا جـ، فهو يقطع خط ا جـ فيما بين نقطتي ح جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

وقد يتبيّن من هذا البيان أن نسبة ز م إلى م ه كنسبة جيب قوس ا ف / إلى جيب قوس ب ل لأن نسبة ز م إلى م ه هي نسبة ز ح إلى ه ي لتشابه مثلثي ز ح م ه ي م، وز ح هو جيب قوس ا ف وه ي هو جيب قوس ب ل، فنسبة ز م إلى م ه هي نسبة جيب قوس ا ف إلى جيب قوس ب ل.

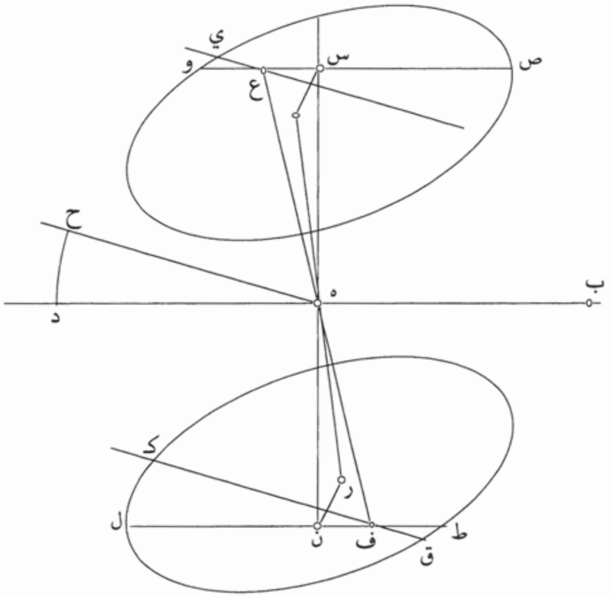
ا-٦٦-و
ب-٩-و

<ز> وإذ قد تبينت هذه المقدمات، فلنشرع الآن في تحديد خطوط الساعات.

وليكن دائرة ا ب جـ د أفقًا من الآفاق المائلة، وليكن ا جـ خط نصف النهار، وليكن ب ه د الفصل المشترك بين الأفق ودائرة معدل النهار. فيكون نقطة ه مركز العالم. وليكن قوس ب ح د نصف دائرة معدل النهار، وليكن قوس ط كـ ل قوس نهار رأس السرطان، فهي أعظم من نصف دائرة ومركزها فوق الأفق، فليكن مركزها نقطة ر. وليكن الفصل المشترك بينها وبين الأفق خط ط ل وليقطع خط ط ل خط ا جـ على نقطة ن؛ ونصل ر ن، فيكون عموداً على خط ط ل، لأن نقطتي ر ن هما في سطح دائرة نصف النهار وهما في سطح دائرة ط كـ ل؛ فخط ر ن هو الفصل المشترك بين دائرة نصف النهار وبين دائرة ط كـ ل. وكل واحدة من دائرتي ا ب جـ د ط كـ ل

4 ح ن (الأولى): ح ر [ا، ب] – 5 و: ف [ا، ب] – 6 بين (الأولى): ناقصة [ا] – 6-7 ز ح وخط: ناقصة [ا] – 7 ا جـ: ا د [ا] – 8 فهو يقطع خط ا جـ: ناقصة [ا] – 10 يتبين: تبين [ا] / جيب: أثبتها فوق السطر [ا] – 12 وه ي هو: إلى [ا] – 13 فنسبة ... ب ل: ناقصة [ا] – 17 ب ه د: ب ه ر [ا، ب].

قائمة على دائرة نصف النهار، فخط ط ن عمود على سطح دائرة نصف النهار، فخط ر ن عمود على خط ط ن ل. ونتمم دائرة ط ك ل وليكن تمامها قوس ط ق ل. وليكن نقطة ك نهاية لساعة من الساعات الزمانية، ونجعل نسبة قوس ق ط إلى قوس ط ق ل كنسبة قوس ك ل إلى قوس ل ك ط، ونصل ق ك، فهو يقطع خط ط ل، فليقطعه على نقطة ف، فنقطة ف هي فيما بين نقطتي ن ط وخط ك ف يقطع خط ر ن فيما بين نقطتي ر ن، كما تبيّن في المقدمات. / [ا-٦٦-ظ]



وليكن الفصل المشترك بين مدار الجدي وبين الأفق خط ص و، فيكون ص و مساوياً لخط ط ل، وليقطع خط ص و خط ا ج على نقطة س، وليكن قوس نهار رأس الجدي قوس ص ي و. ونصل ف ه وننفذه حتى يلقى خط ص و/ [ب-٩-ظ] وليلقه على نقطة ع، فيكون خط ع س مثل خط ف ن لأن ه ن مثل ه س. ونتوهّم السطح الذي فيه خطا ك ف ف ع يقطع سطح دائرة ص ي و وليكن الفصل المشترك بينهما خط ع ي، فيكون زاوية ي ع و مساوية

2 ط ن ل: ط ف ل [ا، ب] – 4 ق ط: ف ط [ا] / ط ق ل: ط ف ل [ا] – 5 ق ك: ف ك [ا] – 9 ص و (الثانية): ص ر [ا] – 10 ص ي و: كتب «ص و» في الهامش [ا، ب] / وننفذه: ونبعده [ا] – 12 ص ي و: ص ي ف [ا، ب].

لزاوية كـ ف ل، لأن خطي ي ع ع و موازيان لخطي كـ ف ف ل، لأن دائرتي ص ي و ق كـ ط متوازيتان، وقد قطعهما سطح الأفق وسطح خطي كـ ف ف ع. ولأن خط ص و مثل خط ط ل، يكون س و مثل ن ط وس ع مثل ن ف لأن ن ه مثل ه س، فخط ع و مثل خط ف ط وزاوية ي ع و مثل زاوية كـ ف ل. وزاوية كـ ف ل مثل زاوية ط ف ق، فزاوية ي ع و مثل زاوية ط ف ق، وخط ع و مثل خط ف ط وقوس و ي ص مثل قوس ط ق ل، وهما من دائرتين متساويتين، وقوس ي و مثل قوس ق ط، فنسبة قوس ي و إلى قوس و ي ص كنسبة قوس ق ط إلى قوس ط ق ل. ونسبة قوس ق ط إلى قوس ط ق ل هي كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط، فنسبة قوس ي و إلى قوس و ي ص كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط، فنقطة ي هي نهاية الساعة الزمانية النظيرة للساعة التي نهايتها نقطة كـ، وخط ي ع موازٍ لخط كـ ق، فهما في سطح واحد. وخط ع ه ف في سطحهما، فالخطوط الثلاثة في سطح واحد ونقطة ه، التي هي مركز العالم، هي في سطح هذه الخطوط. فسطح هذه / الخطوط يقطع العالم ويحدث فيه دائرة عظيمة تمرّ بنقطتي ي ا-٦٧-و كـ. فهذه الدائرة تقطع دائرة معدل النهار، فلتقطعها على خط ه ح. فيكون خط ه ح موازيًا لكل واحد من خطي كـ ف ي ع. وخط ه د موازٍ لكل واحد من خطي ن ل س و، فزاوية ح ه د مساوية لكل واحدة من زاويتي كـ ف ل ي ع و. ونسبة زاوية كـ ف ل إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط لما تبيّن في الشكل د من هذه المقالة، فنسبة زاوية / ح ه د ب-١٠٠-و إلى زاويتين قائمتين كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط. ونسبة زاوية ح ه د إلى زاويتين قائمتين هي كنسبة قوس ح د إلى قوس د ح ب. ولأن قوس د ح ب نصف دائرة ونقطة ه مركزها، فنسبة قوس ح د إلى قوس د ح ب كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط، فنقطة ح هي نهاية الساعة الزمانية النظيرة للساعة التي نهايتها نقطة كـ. ونقطة ح على محيط الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقطتي كـ ي، فنقط كـ ح ي يمرّ بها دائرة واحدة عظيمة

1 لزاوية: لزاوية راو [ا] / ع و: ع ف [ا، ب] – 2 ق كـ ط: ف كـ ط [ا] – 4 ع و: ع ف [ا، ب] – 5 ط ف ق: كـ ف ق [ا، ب] / ي ع و: ف ع و [ا، ب] – 6 ط ق ل: ط ف ل [ا] – 7 ق ط: و ط [ا] – 8 ق ط: ف ط [ا] / ط ق ل: ط ف ل [ا] – 9 ط ق ل: ط ف ل [ا] / إلى (الثانية): الا [ا] – 11 التي: ناقصة [ا] – 12 سطحهما: سطحها [ا] – 20 كـ ل إلى قوس: ناقصة [ا] – 25 كـ ح ي: كتب بعدها «م» [ا].

مركزها نقطة ه، فلتكن دائرة ي ح ك. فالفصول المشتركة بين هذه الدائرة وبين دوائر ص ي و ب ح د ط ك ل هي خطوط ي ع ح ه ك ف المتوازية، والفصل المشترك بين دائرة ي ح ك وبين الأفق هو خط ع ه ف، فدائرة ي ح ك تقطع كل سطح موازٍ للأفق. فإذا كان في الموضع الذي أفقه دائرة ا ب جـ د رخامة مسطحة موازية للأفق، فإن دائرة ي ح ك تقطع تلك الرخامة على خط مستقيم موازٍ لخط ف ع، فيكون أطراف أظلال الشخص الذي في الرخامة الذي رأسه نقطة ه، تقع على ذلك الخط المستقيم إذا كانت الشمس في سطح دائرة ي ح ك. فإذا كانت الشمس في نقطة ك كان الشعاع الذي يخرج من نقطة ك إلى نقطة ه يمتدّ / في سطح دائرة ي ح ك ا-٦٧-ظ على استقامة، فإذا انتهى إلى سطح الرخامة الموازي للأفق، كان طرف الشعاع الذي هو نهاية ظل الشخص على الفصل المشترك الذي هو الخط المستقيم الذي أحدثته دائرة ي ح ك في سطح الرخامة. وكذلك إذا كانت الشمس في نقطة ح، فإن شعاعها يمتدّ على خط ح ه وينتهي إلى ذلك الخط المستقيم الذي هو الفصل المشترك بين دائرة ي ح ك وبين سطح الرخامة. وكذلك إذا كانت الشمس في نقطة ي، فإن شعاعها يمتدّ إلى نقطة ه، ثم يمتدّ من نقطة ه إلى سطح الرخامة،/ وهو أبداً في سطح دائرة ي ح ك فهو ب-١٠-ظ ينتهي إلى ذلك الخط المستقيم الذي هو الفصل المشترك. فالخط المستقيم الذي هو الفصل المشترك بين سطح الرخامة وبين الدائرة العظيمة التي تمرّ بنقط ي ح ك / هو يحدّ الساعة الواحدة الزمانية في الأيام الثلاثة التي ا-٦٨-و تتحرك فيها الشمس على الدوائر الثلاث التي هي مدارات السرطان والحمل والجدي، إذا صارت الشمس على النقط من هذه الدوائر التي تحدّ تلك الساعة الواحدة بعينها من كل واحدة من الدوائر الثلاث؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهذا المعنى هو الذي بينّه إبراهيم بن سنان إلا أنه بيّنه بطريق غير هذا الطريق.

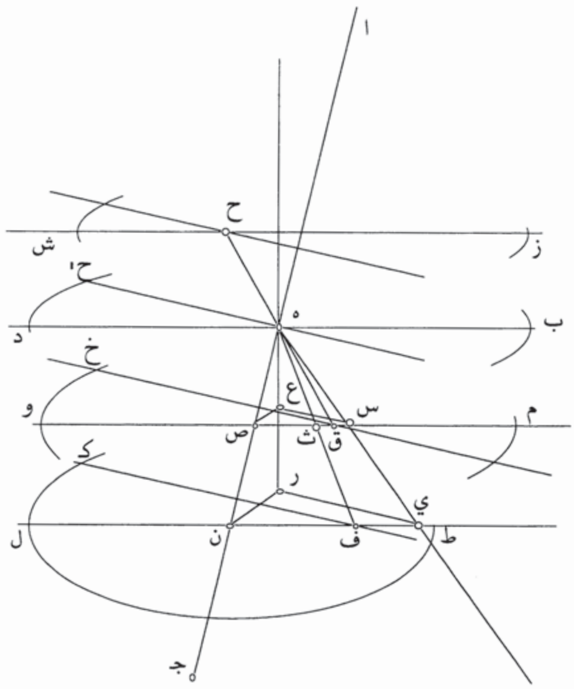
10 إلى: الا [ا] – 15 ه: ي [ا] – 19 الأيام: الاقسام [ا، ب] – 20 الثلاث: الثلاثة [ا، ب] – 22 واحدة: واحد [ا] – 24 هو: ناقصة [ا].

<ح> وإذ قد تبيّن ذلك فإنا نقول: إن الخط المستقيم الذي في سطح الرخامة الذي يحدّ الساعة الواحدة الزمانية بعينها في الأيام الثلاثة التي تتحرك الشمس فيها على مدارات السرطان والحمل والجدي، ليس يحدّ تلك الساعة في يوم غير تلك الأيام الثلاثة، أعني أن طرف ظلّ الشخص في نهاية الساعة النظيرة للساعة التي يحدّ نهايتها الخط المستقيم / الذي تقدمت ب-١١-و صفته، ليس يكون على ذلك الخط المستقيم في يوم غير الأيام الثلاثة التي تقدم ذكرها، وأن النقطة التي هي نهاية الساعة النظيرة للساعة التي يحدّها ذلك الخط المستقيم من كل دائرة زمانية غير الدوائر الثلاث التي تقدم ذكرها، ليس تكون على محيط الدائرة التي هي في المثال دائرة ي ح ك، بل تكون خارجة عنها: أما من الدوائر الزمانية التي بين مدار السرطان ودائرة معدل النهار، فيكون النقط التي هي نهايات تلك الساعة أقرب إلى دائرة نصف النهار من الدائرة النظيرة لدائرة ي ح ك؛ وأما من الدوائر الزمانية التي فيما بين دائرة معدل النهار ومدار الجدي، فيكون النقط التي هي <أطراف> تلك الساعة أقرب إلى <دائرة> الأفق من الدائرة النظيرة لدائرة ي ح ك.

وهذا المعنى هو الذي رام إبراهيم بن سنان تبيينه، ولم يقدر على تبيينه في كل واحد من خطوط الساعات، / كما قد بيناه نحن الآن في هذا ا-٦٨-ظ الموضع.

ولنعد الصورة سوى دائرة الجدي. ولنخرج قوس نهار دائرة من الدوائر الزمانية التي بين دائرة السرطان ودائرة معدل النهار، ولتكن قوس م خ و، فتكون قوس م خ و أصغر من الشبيهة بقوس ط ك ل. ونصل ه ر، فيكون خط ه ر محور العالم، فيكون مركز دائرة م خ و على خط ه ر، فليكن نقطة ع. ولنخرج الفصل المشترك بين دائرة الأفق ودائرة م خ و، وليكن م و، فهو يقطع خط ه جـ بنصفين، فليقطعه على نقطة ص. ونصل ع ص، فيكون عموداً على خط م و، ونصل ه ف، فهو يقطع خط م و، فليقطعه على نقطة ث. ونخرج من نقطة ر خطاً موازياً لخط ك ف، وليكن ر ي، ونجعل نسبة قوس خ و إلى قوس و خ م كنسبة قوس ك ل إلى قوس ل ك ط. فإذا تممنا دائرة

4 أن: ا [ا] – 7 تقدم: تقدمت [ا] – 8 ذلك: وذلك [ا] – 11 النقط: النقطة [ا، ب] / هي: بين [ا، ب] / نهايات: نهاية [ا، ب] – 14 النظيرة: ناقصة [ا] / لدائرة: أثبتها في الهامش مع «صح» [ب] – 17 نحن: ناقصة [ا] – 20 م خ و: م خ ف [ا، ب] كثيراً ما اختلطا الواو والفاء والقاف فلن نشير إلى مثلها فيما بعد – 24 بنصفين: كتب قبلها «ونقطة خط ه جـ» [ا، ب] – 26 ر: كتب «ب ن» في الهامش [ا، ب] / ر ي: ر ك [ا، ب].



م خ و وفصلنا من القوس، التي هي التمام، قوسًا مما يلي نقطة م، وجعلنا / نسبتها إلى تمام الدائرة كنسبة قوس خ و إلى قوس و خ م، ووصلنا بين ب-١١-ظ طرف القوس وبين نقطة خ بخط مستقيم، قطع ذلك الخط خط م ص على نقطة فيما بين نقطتي م ص، فلتكن تلك النقطة نقطة ق. ونصل خ ق، فيكون زاوية خ ق و مساوية لزاوية ك ف ل، لأن نسبة كل واحدة منهما إلى زاويتين قائمتين نسبة واحدة التي هي نسبة قوس ك ل إلى قوس ل ك ط، فـ خ ق موازٍ لخط ك ف، فهو موازٍ لخط ر ي. ونصل ه ي وليقطع خط م ص على نقطة س. ونصل ع س، فيكون موازيًا لخط ر ي، لأن ع س هو الفصل المشترك بين دائرة م خ و وبين سطح مثلث ه ي ر القاطع لدائرة م خ و ولمدار السرطان، فيكون ع س موازيًا لخط خ ق. فلأن قوس م خ و أصغر من الشبيهة / بقوس ط ك ل، يكون قوس خ و أصغر من الشبيهة بقوس ا-٦٩-و ك ل، ويكون القوس التي تفصل منها التي نسبتها إليها كنسبة ك ل إلى نصف ل ك ط أصغر من الشبيهة بالقوس النظيرة لها التي تفصل من قوس

3 الخط: ناقصة [ا] – 11 بقوس: بقس، وأثبت الصواب في الهامش [ب].

كـ ل، ويكون القوس الباقية منها أصغر من القوس الباقية من قوس كـ ل؛ ونسبة جيب قوس خ و إلى جيب القوس الباقية منها كنسبة ع س إلى س ق، فنسبة ع س إلى س ق أعظم من نسبة ر ي إلى ي ف، كما تبين في آخر الشكل و من المقدمات. فنسبة ع س إلى س ص كنسبة ر ي إلى ي ن لأن مثلثي ع س ص ر ي ن متشابهان. وذلك لأن الزاويتين اللتين عند نقطتي س ي متساويتان، لأنهما مساويتان للزاويتين اللتين عند نقطتي ق ف المتساويتين، والزاويتين اللتين عند نقطتي ص ن قائمتان، فنسبة ع س إلى س ص كنسبة ر ي إلى ي ن، فنسبة ص س إلى س ق أعظم من نسبة ن ي إلى ي ف، فنسبة ي ن إلى ن ف أعظم من نسبة س ص إلى ص ق. وإذا بدلنا، كانت نسبة ي ن إلى س ص أعظم من نسبة ن ف إلى ص ق./ ونسبة ب-١٢-و ن ي إلى س ص كنسبة ر ن إلى ع ص لتشابه مثلثي ر ي ن ع س ص، فنسبة ر ن إلى ع ص أعظم من نسبة ن ف إلى ص ق. ونسبة ر ن إلى ع ص كنسبة ن ه إلى ه ص، ونسبة ن ه إلى ه ص هي نسبة ن ف إلى ص ث، فنسبة ن ف إلى ص ث أعظم من نسبة ن ف إلى ص ق، فخط ص ث أصغر من خط ص ق، فنقطة ق خارجة عن خط ف ه؛ وخط ف ه هو قطر الدائرة التي تحد الساعة الزمانية في أيام حركة الشمس على مدار السرطان والحمل والجدي. ونصل ق ه ونخرج في سطح الأفق خطًا مساويًا لخط م و وموازيًا له، وليكن ز ش، ونخرج ق ه حتى يلقاه / وليلقه على نقطة ح. فإذا أخرجت ا-٦٩-ظ الدائرة الزمانية إلى خط ز ش في سطحها وأخرج السطح الذي فيه خطا خ ق ق ه، حدث في الدائرة الزمانية خط مستقيم مواز لخط خ ق، وحدث في سطح العالم دائرة عظيمة. وقطعت الدائرة العظيمة محيط دائرة معدّل النهار، فتفصل هذه الدائرة من الدائرتين اللتين فصلاهما م و ز ش ومن دائرة معدل النهار ثلاث قسي هي ساعة واحدة بعينها زمانية نظيرة للساعة الزمانية التي في الأيام الثلاثة التي تقدم ذكرها، كما تبين في الشكل الذي قبل هذا الشكل.

5 الزاويتين: زاويتين [ا، ب]، ثم أضاف «ال» فوقها [ا] – 6 متساويتان: المتساويتين [ا] / مساويتان: متساويتان [ا، ب] – 8 ن ي: ر ى [ا، ب] – 11 ن ي: ر ى [ا، ب] – 13 ن ه: ر ه [ا، ب] – 18 ز ش ... حتى: ل ر ش و ى ح و ه حس [ا، ب] – 22 فتفصل: فنفصل [ا] – 24 الثلاثة: الثلاث [ا، ب].

وهو بيّن أن الدائرة التي قطرها ق ه ح هي غير الدائرة التي قطرها ف ه، والدائرة التي قطرها ق ه ح هي تقطع معدل النهار، وإذا كانت الساعة التي نهايتها نقطة حَ' هي الساعة التي نهايتها نقطة كَ من مدار السرطان كانت الدائرة التي قطرها ق ه ح تقطع معدل النهار على الخط بعينه الذي تقطعها عليه الدائرة الأولى النظيرة لدائرة ي ح كَ التي قطرها ف ه، لأن الزاوية التي تحدث عند نقطة هَ تكون مساوية لزاوية خ ق ف المساوية لزاوية كـ ف ل. فيكون النقطة التي عليها تقطع الدائرة / التي قطرها ق ه ح محيط مدار ب-١٢-ظ السرطان أقرب إلى دائرة نصف النهار من نقطة كَ. إذا كانت نقطة كَ فيما بين الأفق ودائرة نصف النهار، فيكون نقطة حَ' أقرب إلى دائرة نصف النهار من الدائرة الأولى التي قطرها ف ه، ويكون النقطة من الدائرة الزمانية المساوية لدائرة م خ و التي تقطعها عليها الدائرة التي قطرها ق ه ح أقرب إلى الأفق من الدائرة التي قطرها ف ه. والدائرة التي قطرها ق ه ح تقطع سطح الرخامة على خط مستقيم موازٍ لخط ق ه ح. فيكون هذا الخط مقاطعاً للخط الأول الموازي لخط ف ه / على النقطة النظيرة لنقطة هَ التي هي على ا-٧٠-و الخط الأول. ويكون هذا الخط الثاني يحد الساعة الواحدة النظيرة للساعة التي يحدها الخط الأول، ويكون أطراف أظلال الشخص في الأيام الثلاثة التي تتحرك الشمس فيها على دائرة م خ و، والدائرة المساوية لها <و>دائرة معدل النهار، إذا صارت الشمس على النقط الثلاث، التي هي نهايات تلك الساعة، على الخط الموازي لخط ق ه ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذا وصلنا ر ط ه ط، يتبين كما تبين في خط ه ي أن الخطوط التي تخرج من مراكز الدوائر الزمانية موازية لخط ر ط، ينتهي جميعها إلى خط ه ط، لأنها تكون جميعها في سطح مثلث ه ر ط.

فقد تبين مما بيناه في الشكلين الأخيرين أن الساعة الواحدة الزمانية / ليس يحدها في جميع أيام السنة خط واحد مستقيم يكون في سطح ب-١٣-و الرخامة الأفقية، بل خطوط كثيرة، وأن كل دائرتين عن جنبتي معدل النهار

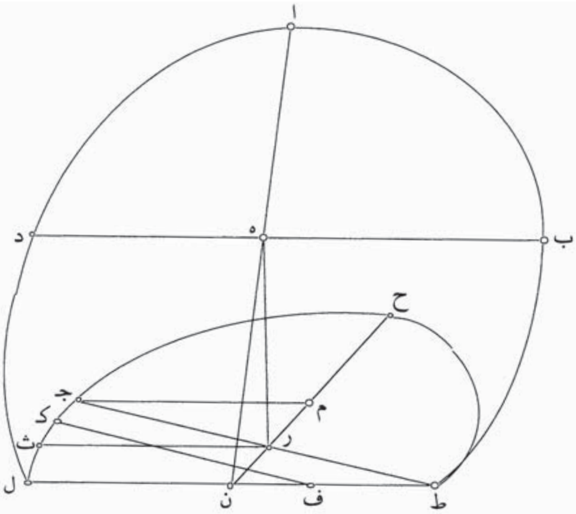
2 التي (الأولى): ناقصة [ا] – 20 ر ط: ز ط [ا] / يتبين: تبين [ا] – 23 الأخيرين: الاخير [ا].

تحدّ الساعة الزمانية منهما ومن دائرة معدل النهار دائرة عظيمة تفصل من الدائرتين قوسين كل واحد / منهما ساعة زمانية. ونفصل من معدل النهار ا-٧٠-ظ مثل تلك الساعة بعينها، فيكون الذي يحدّ الساعة الواحدة الزمانية في طول السنة إحدى وتسعين دائرة، إذا جعلنا لكل جزء من دائرة البروج دائرة، ويكون جميع هذه الدوائر متقاطعة على نقطة من محيط دائرة معدل النهار. ويحدث هذه الدوائر في سطح الرخامة الأفقية أحداً وتسعين خطًا، تتقاطع جميعها على نقطة من الفصل المشترك بين سطح الرخامة وبين سطح معدل النهار، فيكون هذه النقطة تحدّ الساعة الزمانية في يومي الاعتدال. ويكون الخط الذي تحدثه الدائرة التي تفصل مدار السرطان ومدار الجدي يحدّ الساعة الزمانية في يومي الانقلابين. وتكون الخطوط الباقية كل واحد منها يحدّ الساعة الزمانية في أربعة أيام من أيام السنة: يومان من حركة الشمس في النصف الشمالي من دائرة البروج، ويومان من حركتها في النصف الجنوبي، لأن كل واحدة من هذه الدوائر، سوى دائرتي السرطان والجدي، هي تقطع دائرة البروج على نقطتين، فتتحرك الشمس <على> كل واحدة من هذه الدوائر في يوم من أيام السنة، فيكون لكل واحدة من الساعات الزمانية خطوط على هذه الصفة، عدتها هذه العدّة، متقاطعة على نقطة من الفصل المشترك بين سطح الرخامة وبين دائرة معدل النهار. وجميع هذه الخطوط هي خطوط متخيلة، فكل واحد منها هو طول لا عرض له. وهذه الصفة هي تحقيق خطوط الساعات التي تحدّ الساعات الزمانية في سطوح الرخامات الأفقية.

<$\overline{\text{ط}}$> فقد بقي أن نبين مقدار التفاضل/ الذي تخرج به أطراف أظلال ب-١٣-ظ الساعة الواحدة في الأيام المختلفة عن خط $\overline{\text{ه ف}}$ الذي يحد الساعة الواحدة من مدار السرطان والجدي ومعدل النهار.

فلنعد من الصورة / الأخيرة الأفق ومدار السرطان. وليكن قوس نهار ا-٧١-و السرطان أربع عشرة ساعة، فهي مائتان <و>عشرة أجزاء، وليكن نقطة $\overline{\text{ح}}$ على دائرة نصف النهار ونصل $\overline{\text{ح ل}}$، فيكون قوس $\overline{\text{ح ل}}$ مائة وخمسة أجزاء، وقوس $\overline{\text{ل ث}}$ التي هي نصف زيادة قوس النهار على نصف دائرة خمسة عشر

4 السنة: النسبة [ا] – 6 أحداً: احد [ا] – 25 أربع عشرة: اربعة عشر [ا، ب] / فهي: فهو [ا، ب] / مائتان: مائتي [ا، ب] – 26 أجزاء: ناقصة [ا].



جزءاً، وليكن قوس كـ ل الساعة الزمانية الأولى، فتكون سبعة عشر جزءاً ونصفاً، ويكون قوس كـ جـ اثني عشر جزءاً ونصفاً، لأنا إذا فصلنا من قوس ل ث سدسها، كان الباقي مثل قوس كـ جـ لأن ذلك قد تبين في الشكل السادس من المقدمات. وخط ر ه هو جيب الميل الأعظم، فهو كد <كد> يه بالمقدار الذي به خط ه ح الذي هو نصف قطر العالم ستين جزءاً. وزاوية ه ح ن مساوية للزاوية التي يوترها الميل الأعظم عند مركز العالم، فهي أربعة وعشرون جزءاً على التقريب بالمقدار الذي به أربع زوايا قائمة ثلاثمائة وستين جزءاً، فبالمقدار الذي به زاويتان قائمتان ثلاثمائة وستين جزءاً يكون ثمانية وأربعين جزءاً. فيكون القوس التي يوترها خط ه ر من الدائرة المحيطة بمثلث ه ح ر ثمانية وأربعين جزءاً، فتكون القوس التي يوترها خط ر ح مائة واثني وثلاثين جزءاً. فيكون خط ر ح مائة وتسعة أجزاء وسبعاً وثلاثين دقيقة واثنتين وثلاثين ثانية بالمقدار الذي به خط ه ح مائة وعشرين جزءاً. فبالمقدار الذي به خط ه ح ستين جزءاً، يكون خط ر ح ند مح مو. وخط ر ن مساوٍ لجيب قوس ل ث. ونخرج عمود جـ م، فيكون م ر جيب قوس ث جـ، وقوس ث جـ يه أجزاء لأن نسبتها إلى نصف الدائرة كنسبة قوس كـ ل إلى قوس ل كـ ط، لأن زاوية جـ ر ث مثل زاوية كـ ف ل،/ فنسبة كلٍّ ب-١٤-و

1 سبعة: تسعة، ونجد الصواب في الهامش [ب] – 2 ونصفًا (الأولى والثانية): ونصف [ا، ب] / اثني: اثنا [ا، ب] – 4 يه: به [ا] – 6 ه ح ن: ه ح ف [ا، ب] – 11 وسبعًا: وسبعة [ا، ب] – 12 اثنتين: اثنين [ا، ب] – 15 ث جـ (الأولى): ر حـ [ا] / يه: اح [ا، ب] – 16 جـ ر ث: حـ ز ت [ا، ب].

واحدة منهما إلى زاويتين قائمتين نسبة / [ا-٧١-ظ] واحدة. فقوس ث جـ خمسة عشر جزءاً، فجيبها وهو خط ر م مساوٍ لجيب قوس ل ث الذي هو ر ن، فخط جـ ر إذا امتدّ على استقامة حتى ينتهي إلى خط ط ن، فإنه يكون مساوياً لنصف قطر الدائرة، فهو يلقى خط ط ن على نقطة ط، فليكن مثل خط جـ ر ط، فتكون نقطة ط من هذا الشكل هي نقطة ي من الشكل الذي قبله وخط ط ن مثل خط جـ م، لأن ط ر مثل ر جـ. وخط جـ م هو جيب قوس جـ ح التي هي خمسة وسبعون جزءاً وجيبها نز نز كـ بالمقدار الذي به خط ر ط ستين جزءاً. فبالمقدار الذي به خط ر ط ند مح مو يكون خط جـ م نب نو ن. ونسبة جيب قوس ل ث إلى جيب قوس كـ جـ هي نسبة ر ط إلى ط ف، وقوس ل ث خمسة عشر جزءاً، وجيبها يه لا مه بالمقدار الذي به خط ر ط ستين جزءاً. فبالمقدار الذي به خط ر ط ند مح مو، يكون جيب قوس ل ث الذي هو خط ر ن <يد> يا ي. وقوس كـ جـ اثنا عشر جزءاً ونصف، وجيبها يب نط كا بالمقدار الذي به خط ر ط ستين جزءاً. فبالمقدار الذي به خط ر ط ند مح مو، يكون جيب قوس كـ جـ يا نا مه، فنسبة ر ط إلى ط ف هي نسبة يد يا ي إلى يا نا مه. وخط ر ط ند مح مو، فخط ط ف مه ن و. وخط ط ن نب نز، فخط ف ن سبعة أجزاء وست دقائق وأربع وخمسون ثانية. ولأن ه ر كد كد يه، ومربعه خمسمائة وستة وتسعون على التقريب، ور ن يد يا ي، ومربعه مائتان واثنان على التقريب ومجموعهما ٧٩٨ وجذرها ٢٨ وربع، فخط ه ن ٢٨ جزءاً وربع بالمقدار الذي به نصف قطر العالم ستين جزءاً؛ وهو بين أن الخطوط التي تخرج من مراكز الدوائر الزمانية وتكون موازية لخط ر ط تنتهي إلى خط ه ط، لأن ذلك قد تبين في الشكل الذي قبل هذا الشكل. وهذه الخطوط تفصل من سطوح الدوائر الزمانية مثلثات متشابهة وشبيهة/ [ب-١٤-ظ] بمثلث / [ا-٧٢-و] ر ط ن، وتكون نسبة هذه الخطوط التي <هي> قواعد المثلثات كنسبة ر ط إلى ط ن، وتكون نسبتها إلى ما ينفصل من قواعدها بخط ه ف كنسبة ر ط إلى ط ف. ونسبة ر ط إلى ط ف هي كنسبة

1 ث جـ: ر حـ [ا] – 2 ل ث: ل ب [ا]، ولن نشير إليها فيما بعد – 7 وسبعون: وسبعين [ا، ب] / نز نز: بز بن [ا، ب]، ونجد «بر بر» في الهامش مع «ظ» فوقها [ب] – 8 نو ن: ب ں ر [ا، ب] – 9 هي: وهي [ا] – 10 وقوس: قوس [ا] / يه: نه [ا] – 12 ر ن: ر ب [ا، ب] / وجيبها: جيبها [ا] – 13 ستين ... خط ر ط: ناقصة [ا] – 15 ن و: ر و [ا، ب] – 16 ط ن: ط ر [ا] / وأربع وخمسون: وأربعة وخمسين [ا، ب] – 17 كد (الأولى): كـ ر [ا، ب] / وتسعون: وتسعين [ا، ب] – 18 مائتان واثنان: مائتي واثنين [ا، ب] / ومجموعهما: ومجموعها [ا] – 19 ٢٨: ٣٨ [ا، ب] / ه ن: ه ر [ا، ب] – 20 بين: ںس [ا] – 25 ر ط (الأولى): ز ط [ب].

جيب قوس ل ث إلى جيب قوس كـ جـ. وكل واحدة من القسي الزمانية النظيرة لقوس ل ث من الدوائر الزمانية التي فيما بين مدار السرطان ومعدل النهار أصغر من قوس ل ث؛ وكذلك كل قوس نظيرة لقوس كـ جـ. فنسبة جيب كل واحدة من القسي الزمانية النظيرة لقوس ل ث إلى جيب القوس النظيرة لقوس كـ جـ أعظم من نسبة ر ط إلى ط ف، فأطراف أظلال جميع الساعة الواحدة الزمانية النظيرة لقوس ل كـ تكون خارجة عن خط ه ف، أعني أنها تكون فيما بين خطي ه ط ه ف. ولأن قوس ل ث مثل قوس كـ جـ ومثل خمسها، لأن قوس كـ جـ نصف وثلث قوس ل ث، يكون خط ر ط أقلّ من مثل وخمس خط ط ف. ويكون جميع الخطوط النظائر لخط ر ط في جميع الدوائر الزمانية أقل من مثل وخمس الخطوط النظائر لخط ط ف. ولأن خط ر ط أقلّ من مثل وخمس خط ط ف، يكون خط ط ف أعظم من نصف وثلث خط ر ط؛ وكذلك كل واحد من الخطوط النظائر لخط ط ف من جميع الدوائر الزمانية يكون أكثر من نصف وثلث الخط النظير لخط ر ط.

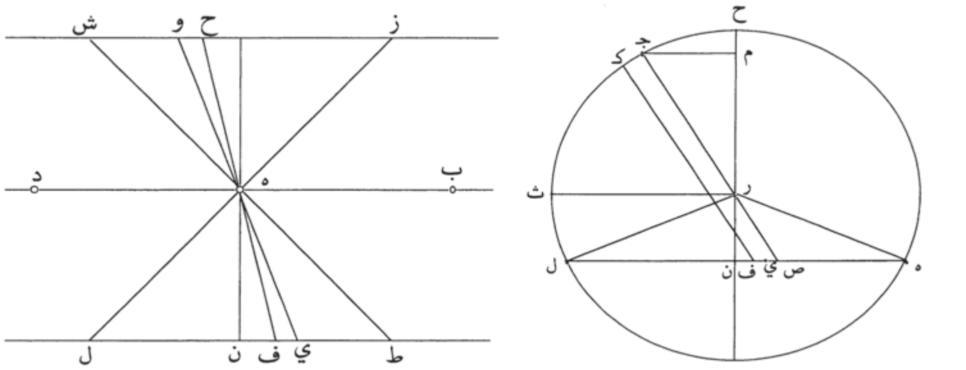
ونجعل ط ي نصف وثلث خط ر ط ونصل ه ي، يفصل جميع الخطوط النظائر لخط ط ف، ويكون ما يفصله خط ه ي من كل واحد من الخطوط النظائر لخط / ط ف نصف وثلث / الخط النظير لخط ر ط. فالخط الذي تفصله الدوائر العظام، التي تفصل الساعة الواحدة الزمانية، من الخطوط النظائر لخط ط ف مما يلي خط ه ط يكون أبداً أعظم من الخطوط التي يفصلها خط ه ي من الخطوط النظائر لخط ط ف مما يلي خط ه ط. فالنقط التي عليها تفصل الدوائر العظام، التي تحد الساعة الأولى من الدوائر الزمانية التي بين مدار السرطان ودائرة معدل النهار، الخطوط النظائر لخط ط ف، تكون أبداً فيما بين خطي ه ف ه ي.

ب-١٥-و
ا-٧٢-ظ

وليكن الفصل المشترك بين الأفق ومدار الجدي خط ز ش، ونخرج خطوط ط ه ي ه ف ه في جهته، فلينته خط ط ه إلى نقطة ش ولينته خط ي ه إلى نقطة و ولينته خط ف ه إلى نقطة ح من خط ز ش. فيكون جميع الفصول المشتركة بين الدوائر العظام التي تحد الساعة الزمانية الأولى وبين الأفق فيما

1 واحدة: واحد [ا، ب] – 2 ل ث: فوق السطر [ا] – 7 ل ث: ل كـ [ا، ب] – 7-8 مثل قوس كـ جـ ... ل ث: ناقصة [ا] – 8 ل ث: ل كـ [ا، ب] – 13 الخط: خط [ا] – 15 ما يفصله: أثبتها فوق السطر [ا] / كل: ناقصة [ا] – 17 تفصله: يفصلها [ا، ب] – 19 فالنقط: فالنقطة [ا، ب] – 23 خطوط: خط [ا، ب] – 25 و: ف [ا] / ولينته: ولينتهي [ا، ب].

بين خطي ف ح ي و، وتكون كلها متقاطعة على نقطة ه. ولأن خط ر ط ند مح مو يكون خط ط ي مه م كح وخط ط ف مه ن و، فيكون خط ي ف ٠ ط كح ومربع خط ه ن سبعمائة وثمانية وتسعين وف ن سبعة أجزاء وست دقائق وأربعًا وخمسين ثانية ومربعه خمسين جزءاً وثلثين على التقريب، ومجموعهما ثمانمائة وثمانية وأربعين جزءاً وثلثين وجذرهما، وهو خط ف ه، تسعة وعشرين جزءاً وثمناً على التقريب، فخط ف ه تسعة وعشرون جزءاً وثمن على التقريب، وخط ي ف تسع دقائق وثمانية وعشرون ثانية، فهو أقل من سدس جزء، ونسبة خط ي ف إلى خط ف ه هي أقل من نسبة سدس إلى تسعة وعشرين جزءاً وثمن. وإذا جعلنا تسعة وعشرين وثمناً أسداساً كانت أكثر من مائة وأربعة وسبعين، فنسبة ي ف إلى ف ه هي أقل من نسبة الواحد إلى مائة وأربعة وسبعين.



وأيضًا، فلنعد الصورة. وليكن قوس ل ك خمس ساعات ليكون نقطة ك أول الساعة السادسة. ونجعل // ث جـ خمسة وسبعين جزءاً، ونخرج عمود جـ م، ونخرج جـ ر على استقامة وليلق خط ط ن على نقطة ص، فيكون خط م ر هو جيب خمسة وسبعين، وخط جـ م جيب خمسة عشر، وخط ر ن هو جيب قوس ل ث، ول ث هو خمسة عشر على ما كان. فنسبة جـ ر إلى ر ص هي كنسبة م ر إلى ر ن. وم ر هو نز نز <ك> بالمقدار الذي به نصف قطر العالم ستين جزءاً. وخط ر ن هو بهذا المقدار يد يا ي، فنسبة جـ ر إلى ر ص

ا-٧٣-و
ب-١٥-ظ

1 ي و: ي ف [ا، ب] – 2 كح: كتب في الهامش «حح» [ب] / ن و: بوف [ا، ب] / ٠: رمز للصفر بدائرة حسب الاستعمال القديم – 4 وأربعًا: واربعة [ا، ب] / وثلثين: وثلثان [ا، ب] – 5 وثلثين: وثلثان [ا، ب] – 6 وثمنًا: وثمن [ا، ب] / وعشرون: وعشرين [ا، ب] – 7 وعشرون: وعشرين [ا، ب] / فهو: فهي [ا، ب] – 9 وثمنًا: وثمن [ا، ب] – 11 الواحد: الواحدة [ا] – 13 أول: مكررة [ا] – 17 هي: ناقصة [ا] / وم ر: وم د [ا، ب] / نز نز: ن ب ر ب [ا، ب] / نصف: ينصف [ا].

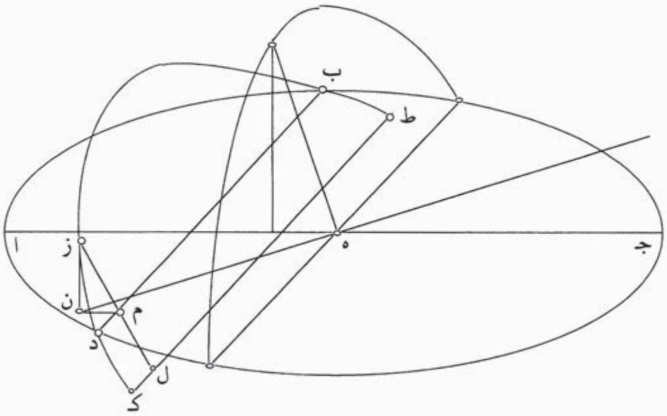
هي نسبة نز نز⟨كـ⟩ إلى يد يا ي. وخط جـ ر ند مح مو، فخط ر ص يد ما يه. ونسبة جـ م إلى ص ن هي نسبة نز نز⟨كـ⟩ إلى يد يا ي، وخط جـ م يد يا ي، فخط ص ن جـ مح يد. ونسبة ر ص إلى ص ف هي نسبة جيب قوس ل ث إلى جيب قوس كـ جـ؛ وقوس كـ جـ سدس قوس ل ث، لأن جـ ح سدس ث ح، وقوس ل ث خمسة عشر جزءاً، فقوس كـ جـ ب ل، وجيبها ب لز يز بالمقدار الذي به خط ر جـ ستين جزءاً، فبالمقدار الذي به خط جـ ر ند مح مو يكون به جيب قوس كـ جـ ب كجـ كز، فنسبة ر ص إلى ص ف هي نسبة يد يا ي إلى ب كجـ كز. وخط ر ص يد ما يه، فخط ص ف ب كح ط، فخط ف ن ا يط يد. ونجعل ص ي سدس ر ص، فيكون ص ي ب كز، فيكون خط ي ف أقلّ من دقيقتين، وخط ه ن ثمانية وعشرين وربعًا، ومربعه سبعمائة وثمانية وتسعين وخط ف ن ا يط يد، ومربعه أقل من جزأين، ومجموعهما ⟨أقل من⟩ ثمانمائة، وجذرها وهو خط ف ه أقل من ثمانية وعشرين وربع ⟨و⟩سبع. وإذا جعلت دقائق/ كانت ألف وسبعمائة/ على التقريب، فيكون نسبة ي ف إلى ف ه نسبة اثنين إلى ألف وسبعمائة، فهي جزء من ثمانمائة وخمسين جزءاً. ا-٧٣-ظ ب-١٦-و

وإذا سلك في كل خط من خطوط الساعات الباقية المسلك الذي سلكناه في خطي هاتين الساعتين، أعني الأولى والخامسة، تبين أن نسبة الخط النظير لخط ي ف إلى الخط النظير لخط ف ه هي نسبة يسيرة أقل من نسبة الواحد إلى مائة وأربعة وسبعين التي هي الساعة الأولى.

وكذلك في كل أفق من الآفاق المائلة إذا سلك فيها المسلك الذي سلكناه في هذا الأفق، تبين أن نسبة الخط النظير لخط ي ف إلى الخط النظير لخط ف ه هي نسبة يسيرة، يخفى من أجل صغرها مقدارُ الخط النظير لخط ي ف عند الخط النظير لخط ف ه.

⟨ي⟩ وأيضاً، فلنعد الأفق ومدار الجدي؛ وليكن الأفق ا ب جـ د ومركزه ه، وليكن قوس نهار الجدي ب ز د، وليكن الفصل المشترك بين هذه الدائرة

1 نز (الأولى): نب [ا، ب] / يد يا: ند نا [ا، ب] / ند: هو [ا، ب] – 1-2 يد ما يه: نه ما نه [ا] – 2 ص ن: ص ر [ا، ب] / نز: نب [ا، ب] / يد يا: ند نا [ا، ب] – 3 ص ن: ص ر [ا، ب] / ر ص: ن ص [ب] – 4 قوس (الثانية): ثمن [ا، ب] – 6 يز: ن [ا، ب] – 7 كز: م [ا، ب] – 8 كز: م [ا، ب] – 10 وربعًا: وربع [ا، ب] – 16 كل: ناقصة [ا] – 17 الأولى: الاول [ا، ب] – 18 ف ه: ف ص [ا، ب] – 20 سلكناه: ناقصة [ا] – 22 الخط: للخط [ا، ب] – 24 ومدار: مدار [ا].



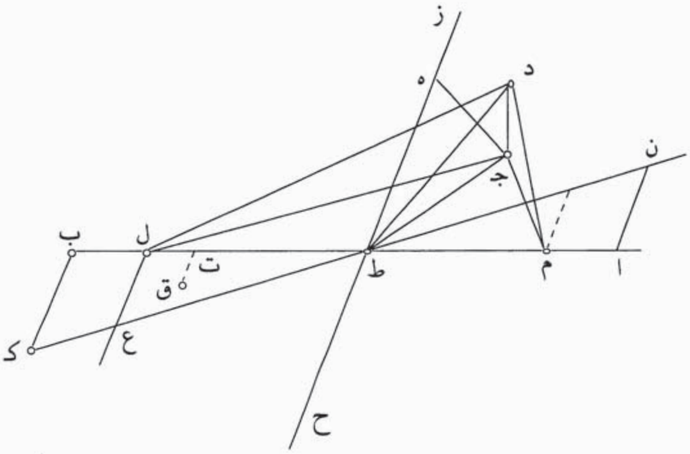
وبين الأفق خط ب د، وليكن قوس ز د الساعة الزمانية الأولى، فيكون قوس ز د اثني عشر جزءاً ونصفاً، لأن قوس ب ز د مائة وخمسون جزءاً، لأنها مثل ما يبقى من مدار السرطان. ونتوهمه قطراً خارجًا من مركز دائرة ب ز د ويكون موازيًا لخط ب د، وليكن ط ك. ونتمم نصف الدائرة وليكن ط ز ك، فيكون قوسا ب ط د ك مجموعتين ثلاثين جزءاً، وهما متساويتان، فقوس د ك خمسة عشر جزءاً وقوس ز ك سبعة وعشرون جزءاً ونصف، فجيبها كز مب يح بالمقدار الذي به نصف قطر مدار الجدي ستين جزءاً. ونخرج من نقطة ز عمود ز م ل، فيكون ز ل جيب قوس ز ك ويكون م ل مساويًا لجيب قوس د ك، فخط ز ل كز مب يح وخط م ل يه لا مه، فيكون خط ز م يب ي جـ بالمقدار الذي به نصف قطر مدار الجدي ستين جزءاً. ولأن قوس ب ز د مائلة على الأفق، يكون خط ز م مائلاً على الأفق. فنخرج من نقطة ز عموداً على سطح الأفق // وليكن ز ن ونصل ه ز م ن. فيكون ا-٧٤-و
السطح الذي فيه خطا ه ز ز ن هو سطح الدائرة السمتية التي تمرّ بنقطة ز، ب-١٦-ظ
فعمود ز ن هو جيب ارتفاع نقطة ز. ولأن خط ز م عمود على خط ب د وخط ز ن عمود على الأفق، يكون خط ن م عموداً على خط ب د، فتكون زاوية ز م ن هي زاوية الميل، فيكون مثلث ز م ن ‹شبيهًا› بالمثلث الذي

2 ز د: ر حـ [ا، ب] / اثني: اثنا [ا، ب] / ونصفاً: ونصف [ا، ب] / وخمسون: وخمسين [ا، ب] – 5 ط ز ك: ط ن ك [ب] / مجموعتين: مجموعين [ا، ب] – 6 وعشرون: وعشرين [ا، ب] – 7 مب: حب [ا] – 8 ز: كتب «ن» في الهامش [ب] – 9 يه: نه [ا] – 11 ب ز د: ب ز جـ [ا، ب] – 12 ز: كتب «د» في الهامش [ا، ب] / ه ز م ن: ز م ن [ا] – 15 وخط ... على: مكررة، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / ن م: ز م [ا، ب].

يحدث في سطح دائرة نصف النهار الذي يحيط به نصف قطر معدّل النهار وجيب ارتفاع نصف نهار رأس الحمل، والجزء الذي ينفصل بينهما من خط نصف النهار – الجزء الذي ينفصل من خط نصف النهار بين الخطين المذكورين – هو مساوٍ لجيب عرض الموضع الذي أطول نهاره أربع عشرة ساعة؛ والموضع الذي أطول نهاره أربع عشرة ساعة، عرضه ثلاثون جزءاً بالمقدار الذي به نصف قطر معدل النهار هو ضعف الخط المنفصل من خط نصف النهار، فخط ز م ضعف خط م ن ومربع م ن ربع مربع ز م؛ وخط ز م يب ي لج ومربعه مائة وثمانية وأربعون جزءاً ونصف وربع. فإذا نقص منه ربعه، كان الباقي مائة وأحد عشر وربعاً على التقريب، وجذرها عشرة وثلث وربع على التقريب. فعمود ز ن عشرة أجزاء وثلث وربع بالمقدار الذي به نصف قطر دائرة ب ز د ستين جزءاً. فبالمقدار الذي به نصف قطر دائرة ب ز د ند مح مو وبه نصف قطر العالم ستين جزءاً، يكون عمود ز ن تسعة أجزاء وثلثين على التقريب. ونصل ه ز، فيكون ه ز نصف قطر العالم لأن ه مركز العالم ونقطة ز على سطح كرة العالم. فعمود ز ن تسعة أجزاء وثلثان بالمقدار الذي به خط ه ز ستين / جزءاً، ومربع ز ن ثلاثة وتسعون جزءاً ب-١٧-و وأربعة أتساع جزء ومربع ه ز ثلاثة ألف وستمائة؛ فيبقى مربع ه ن ثلاثة آلاف وخمسمائة وستة وخمسة / أتساع؛ فجذرها وهو خط ه ن تسعة ا-٧٤-ظ وخمسون جزءاً وربع على التقريب. فبالمقدار الذي به خط ز ن تسعة أجزاء وثلثين به خط ه ن تسعة وخمسين جزءاً وربعاً. فنسبة ز ن إلى ن ه هي نسبة تسعة وثلثين إلى تسعة وخمسين وربع؛ واضرب الجميع في اثني عشر. فيكون ز ن مائة وستة عشر ويكون ن ه سبعمائة وأحد عشر، فيكون نسبة ز ن إلى ن ه نسبة مائة وستة عشر إلى سبعمائة وأحد عشر. ونقسم الجميع على مائة وستة عشر، فيكون ز ن واحداً ويكون ن ه ستة أجزاء وثمناً على التقريب. فيكون ز ن أقلّ من سدس ن ه على التقريب. ونسبة ز ن إلى ن ه هي نسبة المقياس القائم في سطح الرخامة الموازية للأفق إلى ظل المقياس في آخر الساعة الأولى عند حركة الشمس على مدار الجدي، وهو أطول ظل يكون للشخص في طول السنة.

4 أربع عشرة: اربعة عشر [ا، ب] – 5 أربع عشرة: اربعة عشر [ا، ب] – 8 وأربعون: واربعين [ا، ب] – 9 وربعًا: وربع [ا، ب] – 14 ونقطة ... العالم: ناقصة [ا] / وثلثان: وثلثين [ا، ب] – 15 وتسعون: وتسعين [ا، ب] – 17 آلاف: الف – 18 وخمسون: وخمسين [ا، ب] – 19 وربعاً: وربع [ا، ب] – 20 اثني: اثني [ا، ب] – 21 ن ه: ر ن [ا] – 23 ن ه: ن جـ [ا، ب] / وثمناً: وثمن [ا، ب] – 24 ن ه: ر ه [ب] ناقصة [ا] – 27 للشخص: الشخص [ا، ب].

<يا> وإذ قد تبين جميع ما بيناه، فليكن سطح الرخامة الموازية للأفق السطح الذي فيه ا ب جـ، وليكن الشخص القائم عليها خط جـ د؛ وليكن الفصل المشترك بين الدائرة العظيمة التي تحد الساعة الأولى من مدار السرطان ومدار الحمل ومدار الجدي وبين سطح الرخامة خط ا ب؛ وليكن قاعدة الشخص نقطة جـ ورأس الشخص نقطة د، وليكن خط نصف النهار خط جـ ه، وليكن الخط الذي يتحرك عليه طرف الظل في يومي الاعتدال خط ز ه ح، فخط ا ب يقطع هذا الخط لأن الدائرة العظيمة التي تحد الساعة الأولى تقطع معدل النهار وتقطع سطح الرخامة، فهي تقطع الفصل المشترك لهما؛ فليتقاطع الخطان على نقطة ط، فأطراف أظلال الشخص في آخر الساعة الأولى تكون على خط ا ب، فيكون طرف ظل الشخص / ب-١٧-ظ في آخر الساعة الأولى من يومي الاعتدال على نقطة ط. وليكن طرف الظل في آخر الساعة الأولى من مدار الجدي نقطة ل. وليكن طرف الظل في آخر هذه الساعة من مدار السرطان نقطة م. ونصل خطوط د ل د ط د م جـ ل جـ ط جـ م، فتكون خطوط د ل د ط د م في سطح الدائرة العظيمة التي تحد الساعة الأولى، / ا-٧٥-و وهذه الخطوط هي خطوط الشعاع التي تمتد من رأس الشخص إلى سطح الرخامة في آخر الساعة الأولى من الأيام التي تتحرك فيها الشمس على مدار الجدي ومدار الحمل ومدار السرطان، وتكون خطوط جـ ل جـ ط



7 ز ه ح: ز ه حـ [ا] – 12 ل: ر [ا، ب].

جـ م هي خطوط الظل في الأيام الثلاثة، وهي تسمى خطوط السمت. وقد تبين في الشكل الذي قبل هذا الشكل أن نسبة د جـ إلى جـ ل هي نسبة الواحد إلى الستة. ولنخرج من نقطة ط خط ن ط ك في سطح الرخامة حتى يكون زاوية ب ط ك مساوية لزاوية ي ه ف من الشكل ط الذي هو في سطح الأفق الذي سطح الرخامة موازٍ له. ونجعل زاوية ط ب ك مساوية لزاوية ه ف ي من ذلك الشكل، وكذلك زاوية ط ا ن، فيكون مثلث ط ب ك شبيهاً بمثلث ه ف ي من الشكل المذكور. فيكون نسبة ك ب إلى ب ط نسبة الواحد إلى مائة وأربعة وسبعين. ولأن سطح الرخامة موازٍ لسطح الأفق، يكون خط ا ب موازياً للخط الذي تحدثه الدائرة العظيمة التي تحد الساعة الأولى في سطح الأفق الذي هو خط ف ه ح من الشكل المقدم ذكره. فخط ن ط ك موازٍ لخط ي ه و من الشكل المذكور. وقد تبين في الشكل ط أن جميع الدوائر العظام التي تفصل الساعة الأولى تقطع الأفق على خطوط تكون جميعها فيما بين خطي ف ه ح ي ه و، فيكون جميع الدوائر العظام التي تحد الساعة الأولى تفصل سطح الرخامة على خطوط يكون جميعها / فيما بين [ب-١٨-و] خطي ا ب ن ك. وخط ز ح موازٍ لخط ب د من الشكل المقدم ذكره. فزاوية ب ط ه منفرجة، فزاوية ب ط جـ أشد انفراجاً، فخط جـ ل أعظم من خط ل ط. ونخرج ل ع موازياً لخط ب ك، فيكون نسبة ع ل إلى ل ط هي نسبة ك ب إلى ب ط التي هي نسبة الواحد إلى مائة وأربعة وسبعين. وخط ل جـ أعظم من خط ل ط وخط جـ د سدس خط جـ ل، فخط جـ د أعظم بكثير من سدس ل ط. ونسبة ل ع إلى ل ط هي نسبة الواحد إلى مائة وأربعة وسبعين، فنسبة ل ع إلى جـ د أصغر من نسبة الواحد إلى سدس المائة وأربعة وسبعين، فخط ل ع أقلّ من ثُلث عُشر جـ د. ولأن جـ ل هو ظل الساعة الأولى من مدار الجدي، / يكون طرف الظل عند نقطة ل نفسها، فأطراف [ا-٧٥-ظ] أظلال الساعة الأولى من الأيام الباقية التي تخرج عن خط ب ط تكون أبداً أقرب إلى نقطة ط، فتكون الخطوط التي تخرج من أطرافها موازية لخط ب ك كل واحد منها أصغر من ل ع. فتكون نسبة كل واحد منها إلى خط جـ د أقل من ثلث عشر [جـ د]. فإذا كان طول الشخص عرض ثلاثة أصابع من

4 ي ه ف: ي م ف [ا، ب] – 11 قد: ناقصة [ا] – 14 الساعة الأولى تفصل: مكررة [ا] – 15 ن ك: ر ك [ا، ب] / ب د: ب جـ [ا، ب] – 21-22 فنسبة ... وسبعين: ناقصة [ا] – 21 ل ع: جـ ل [ب] – 23 عند: عن [ا، ب].

أصابع اليد ، كان خط ل ع أقلّ من ثلث عُشر ثلاث أصابع ؛ والأصبع الواحدة من أصابع اليد ليس تبلغ عرض ست شعيرات، فطول الشخص ليس يبلغ عرض ‹ثُلث عُشر› ثماني عشرة شعيرة، فخط ل ع ليس يبلغ ثلاثة أخماس عرض شعيرة، فخط ل ع ‹ليس له› قدر محسوس عند طول خط م ل الذي هو خط الساعة الأولى.

وأيضًا، فإن طرف ظل الساعة الأولى من مدار الجدي عند نقطة ل نفسها، فليس هي فيما بين خطي ل ط ع ط، فكل ظل لشخص جـ د يقع طرفه بين خطي ل ط ع ط، فإنه يكون أقرب إلى نقطة ط من خط ل ع، ويكون الخط الذي يخرج من طرف الظل فيما بين خطي ل ط ع ط موازيًا لخط ل ع أصغر من ل ع، فيكون ذلك الخط / جزءاً من ل ع، فيكون جزءاً يسيراً من طول ب-١٨-ظ
الشخص. فيكون كل واحد من الخطوط التي تخرج من أطراف الأظلال إلى خط ل ط موازيًا لخط ل ع لا قدر له بالقياس إلى طول الشخص. فليس لهذه الخطوط قدر محسوس بالقياس إلى خط ل م.

وإذا كان خروج أطراف الأظلال عن خط ل م خروجًا لا قدر له، فليس تخرج أطراف الأظلال إذن عن عرض الخط المحسوس الذي يرسم في سطح الرخامة؛ وإن خرج منها شيء، فبمقدار لا يدركه الحسّ / ولا يؤثر مقداره ا-٧٦-و
في زمان الساعة؛ هذا إذا كان طول الشخص ثلاث أصابع. وأكثر الرخامات يكون طول الشخص فيها أقلّ من ثلاث أصابع، فيكون أطول الأظلال أقلّ، فيكون خروج أطراف الأظلال عن خط ل م أقل، لأن نسبة هذه العروض إلى طول الشخص نسبة واحدة.

فقد تبين من هذا البيان أن خروج أطراف الأظلال عن خط ل م الذي هو خط الساعة الأولى – إذا توهمنا خط ل م طولاً لا عرض له – هو خروج ليس له قدر يمكن الحسّ أن يدركه ولا يخرج عن عرض الخط المحسوس خروجًا يؤثر في زمان الساعة.

وبمثل هذا الطريق يتبين في كل واحد من خطوط الساعات أن خروج أطراف الأظلال خروج غير محسوس، لأن خروج أطراف أظلال كل واحدة من الساعات الباقية أقلّ من خروج أطراف أظلال الساعة الأولى، لأن الخط النظير لخط ل ع يكون نسبته إلى طول الشخص أقل، لما تبين في الشكل يَ من هذه المقالة.

1 ثلاث أصابع: وهذا جائز لأن مفردها مؤنث ومُذكر – 3 ثماني عشرة: ثمانية عشر [ا، ب] – 6 عند: بين؛ وفي الهامش كُتِبَ مع الإشارة «من» [ب] من [ا] – 12 لا: لو [ا] – 13 محسوس: مخصوص [ا].

وإذ قد تبين ذلك، فقد / تبين أن خطوط الساعات هي خطوط مستقيمة ب-١٩-و بالقياس إلى الحس، وأن المتقدمين أصابوا في فرضهم هذه الخطوط مستقيمة، وتبين أن إبراهيم بن سنان غلط فيما ادّعاه على المتقدمين من الزلل في خطوط الساعات؛ وتبين أن غلطه إنما كان لأنه نظر نظراً تعليمياً متخيلاً ولم ينظر نظراً طبيعياً محسوساً.

وجميع ما بيّناه إنما هو في الآفاق المائلة. فأما آفاق خط الاستواء فإن خطوط الساعات فيها خطوط مستقيمة؛ لكل ساعة زمانية خط واحد مستقيم في التخيل وفي الحسّ جميعًا. وذلك أن الساعات الزمانية في آفاق خط الاستواء هي الساعات المستوية، لأن آفاقها تمرّ بالقطبين، فقسي نهارها هي أنصاف الدوائر الزمانية، فالدائرة العظيمة التي تخرج من القطبين وتفصل من نصف دائرة معدل النهار ساعة زمانية هي تفصل من أنصاف جميع الدوائر / الزمانية التي هي قسم النهار قسيًا شبيهة بالقوس التي تفصلها من ا-٧٦-ظ دائرة معدّل النهار. فيكون الدائرة الواحدة التي تخرج من القطبين تحد الساعة الواحدة في جميع أيام السنة؛ وتلك الدائرة الواحدة هي تقطع الأفق على خط نصف النهار الذي في ذلك الأفق، لأن قطبي العالم على محيط الأفق، فتلك الدائرة تقطع سطح الرخامة الموازية للأفق على خط واحد مستقيم متخيل موازٍ لخط نصف النهار الذي في سطح الأفق. وكذلك كل واحدة من الساعات الزمانية تفصلها دائرة واحدة عظيمة تخرج من القطبين وتفصل من جميع الدوائر الزمانية قسيًا متشابهة، كل واحدة منها هي ساعة واحدة زمانية وهي ساعة واحدة مستوية. ويكون الفصل المشترك بين كل واحدة من هذه الدوائر وبين الأفق هو خط نصف النهار./ فجميع الدوائر ب-١٩-ظ العظام التي تفصل الساعات الزمانية تتقاطع على خط نصف النهار الذي في الأفق، وهذه الدوائر تقطع سطح الرخامة على خطوط مستقيمة كل واحد منها يحد ساعة واحدة من الساعات الزمانية في جميع أيام السنة. وكل واحد من هذه الخطوط موازٍ لخط نصف النهار الذي في سطح الأفق. فخطوط الساعات التي في الرخامات الأفقية التي في آفاق خط الاستواء تكون كلها مستقيمة في الحسّ وفي التخيل، ويكون جميعها متوازية. وهذه المعاني هي المعاني التي قصدنا لتبيينها في هذه المقالة.

تمت المقالة والحمد للّه ربّ العالمين.

24 واحدة: ناقصة [ا] – 29 العالمين: كتب بعدها «والصلوة على نبيه محمد وآله أجمعين» [ب].

الفصل الثاني

الرخامات الأفقية

١ـ مقدّمة

لقد كانت الرُّخامات الأفقية من بين الرخامات الأكثر انتشاراً والأكثر سهولة في صُنعها، كما كانت الأكثر جدوى في أداء وظيفتها؛ فهي تدلُّ على الساعة ما دامت الشمس ساطعة. أَلِهذا السبب قام ابن الهيثم بِبُحوثِه في الرُّخامات بدءاً من الرُّخامات الأفقية؟ إنّ مؤلّفه المكرَّس للرخامات الأفقية يسبق في كتابته المؤلّفَ الأرفعَ علمياً حول خطوط الساعات. كلُّ شيء، على أيّ حال، يدلّ على أنَّ ابن الهيثم كان يريد إنهاءَ بحوثه في الرُّخامات قبل أن يتفرَّغ كريّاضيٍّ في بحث أكثر تقدُّماً حول نظرية عامَّة للرُّخامات.

يختلف هذان المؤلّفان لابن الهيثم في الهدف والأسلوب؛ فالمؤلّف " في الرّخامات الأفقية" هو كتابٌ موجَزٌ في صناعة الرخامات مُحرَّرٌ من قِبَل ريّاضيٍّ لا يعطي إلا الشروح الضرورية للصانع الذي يُريد صنع الرّخامة. لم يكن تحريرُ مثل هذه الموجَزات شيئاً جديداً. فلقد حرَّر سلفُ ابن الهيثم، ابنُ سنان[1]، هو أيضاً موجَزاً في الرّخامات مُخصَّصاً للصنّاع. ولم يأنف ابن الهيثم نفسه من كتابة الموجزات المُخصَّصة لأصحاب الصناعات مثل الموجَز في الهندسة الذي خصَّصه للمسّاحين[2](أي الهندسيّين كما نقول اليوم). لقد أراد ابن الهيثم، هنا بشكل واضح، أن يؤسِّسَ العملَ الصناعيَّ على قواعد علميةٍ صحيحةٍ حتّى يكون الصانعُ خبيراً بشكل كافٍ عند عمل الآلة. سنشرح فيما يلي هذا المؤلّف لابن الهيثم.

٢ـ الشرح الريّاضيّ

١ـ ذكر ابن الهيثم أوّلاً، في هذا المؤلّف، بالطرائق المستخدَمة في عمل الرخامات الأفقيّة، وخاصّة بتلك التي تسمح برسم الخطوط على سطح الرخامة. ثمّ أراد أن يعرض، انطلاقاً من

[1] انظر "في آلات الأظلال"، المحَقَّق والمشروح في الفصل الرابع من الكتاب التالي:

R. Rashed et H. Bellosta, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au x^e siècle (Leyde, 2000)

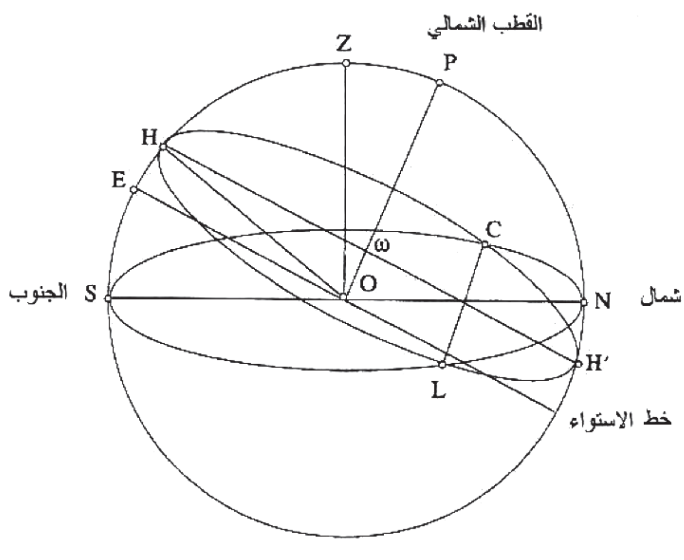
[2] انظر "في أصول المساحة" الذي حُقّق وشُرِحَ في الفصل الرابع من المجلّد الثالث من هذه الموسوعة.

تفحُّص هذه الممارسات، طريقة مُبَسَّطة ومُختصَرة يُمكِن للصانعَ أن يتبعها بكلِ ثقةٍ لِيعملَ رخامة في مكان ذي عرض معلوم. يضع ابن الهيثم نفسه طيلة المناقشة التي يعرضها، بدون أن يُصرِّح بذلك ضمن الشروط التالية:

$$\delta_m < \lambda < 90^\circ - \delta_m$$ ،

حيث يكون δ_m الميل الأقصى للشمس ويكون λعرض المكان. لنشرح أولاً هذا الشرط قبل أن نتفحَّص طرائق عمل الرخامات.

لنرسم الكرة السماويّة، ولنأخذ المكان O كمركز للعالَم، وليكن Z سمت الرأس وَ OP محور العالَم.



الشكل ١

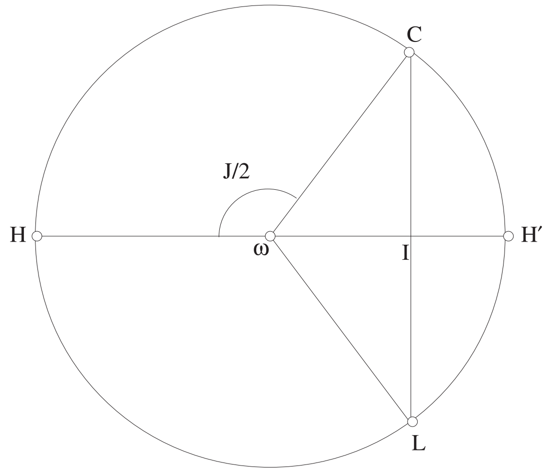
تكون الدائرة التي ترسمها الشمس خلال الحركة اليومية- وهي حركة دائرية مستوية- في المستوي الموازي لمعدِّل النهار. لتكن النقاط L، C وَ H، حسب الترتيب، نقاط الشروق والغروب والمرور على نصف النهار، الخاصّة بالميل δ؛ يكون معنا: $\widehat{EOH} = \delta$ وَ $\lambda = \widehat{ZOE} = \widehat{NOP}$.

النهار هو الفترة الزمنية التي تُستَغرَق بين L نقطة شروق الشمس و C نقطة غروبها. تتغيَّر مدَّة النهار في غضون السنة. يُحدَّد طول النهار بالقياس J للقوس $\widehat{CHL}$ التي ترسمها الشمس فوق الأفق. ويُقسّم إلى اثـنتيْ عشرة ساعة زمانية متساوية في يومٍ معلوم. ولكنَّ طول

الساعة الزمانيّة يختلف من يوم إلى آخر. وكلّ يوم له ساعات مُرَتَّبَة بنفس الرُتب وفقاً لاثنتي عشرة رُتبة؛ فَشروق الشمس له الرتبة صفر وغروبها له الرتبة ١٢، أما المرور على نصف النهار فله الرتبة ٦ ويُسمّى الظُهر.

يؤكِّد ابن الهيثم - انظر لاحقاً - أنّ القوس $\widehat{CHL}$ تكون معلومة عندما يكون δ وَ λ معلومين. وهو لا يُبرهن هذه النتيجة، بل يقول فقط إنّه "قد تبيَّن ذلك بطريق البرهان في كتب الهيئة"[٣].

يجب على الصانع إذاً أن يعرف النتيجة بدون أن يعرف بالضرورة برهانَها. يتعلّق الأمر في الواقع ببرهان المعادلة: $\text{tg}\,\delta\cdot\text{tg}\,\lambda=\left|\cos\frac{J}{2}\right|$.



الشكل ٢

ليكن ω مركز الدائرة التي ترسمها الشمس خلال حركتها الظاهرة. يقطع $H'H$، وهو قطرُ هذه الدائرة الموجودُ في مستوي نصف النهار، قطرَ دائرة الأفق SN على النقطة I. ليكن R نصف قطر الكرة السماوية؛ يكون معنا:

$$R\cos\delta=\omega H \text{ ، } R\sin\delta=O\omega \text{ ، } R\sin\delta\,\text{tg}\,\lambda=O\omega\,\text{tg}\,\lambda=\omega I.$$

[٣] انظر ص. ٦١٢ ، س ٢٦.

القوس $\widehat{HC}$ لها نفس القياس، أيْ $\frac{J}{2}$، الذي للزاوية المركزية $\widehat{C\omega H}$. يكون معنا:

$$\text{tg}\,\delta\cdot\text{tg}\,\lambda=\frac{R\sin\delta\,\text{tg}\lambda}{R\cos\delta}=\frac{\omega I}{H\omega}=\frac{\omega I}{\omega C}=\left|\cos\frac{J}{2}\right|.$$

إذا كان $\delta > 0$، يكون $J > \pi$ وَ $\cos\frac{J}{2} < 0$ ؛ وإذا كان $\delta < 0$ ، يكون $J < \pi$ وَ $\cos\frac{J}{2} > 0$.

يكون معنا، وِفقاً للشرط الخاصّ بـِ λ، $\text{tg}\,\lambda > 0$، فنستخرِج أنَّ: $-\text{tg}\,\delta\,\text{tg}\,\lambda = \cos\frac{J}{2}$.

يكون معنا، على سبيل المثال، في مكان عرضه $\lambda = 45°$:

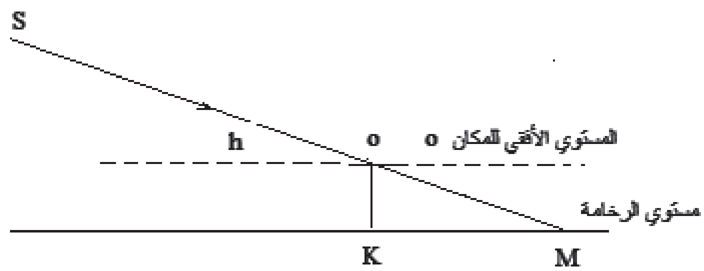
$\text{tg}\,\lambda = 1$ وَ $-\text{tg}\,\delta = \cos\frac{J}{2}$ ؛ إذا كان $\delta = -\delta_m = -23°27'$ ، يكون معنا: $\cos\frac{J}{2} =$ 0,43378 وَ $\frac{J}{2} = 64°18'$. والطول الأدنى للنهار يُساوي $J_{\min} = 128°36'$ ، والطول الأقصى يُساوي $J_{\max} = 231°24'$.

لنرجع إلى نصّ ابن الهيثم، بعد أن انتهينا من شرح وإثبات هذا الشرط الضمني الذي تقيَّد به هذا الأخير. يتناول النصّ عمل الرخامات الأفقية بدءاً من الفقرات الأولى. يجب أن تُرسم مثلُ هذه الرخامة على سطح مستوٍ تماماً وموازٍ لأفق المكان الذي تمَّ اختياره. ويجب أن يكون المقياس (الشخص كما يُسمّيه ابن الهيثم غالباً) عموديّاً على هذا المستوي. يُحدَّد بعد ذلك خطّ نصف النهار، أي الخطّ الذي يقع عليه ظلّ رأس المقياس في كلّ يوم من أيام السنة عندما تمرُّ الشمس على نصف النهار. ونرصد الشمس أخيراً طيلة النهار في كل ساعة زمانية من هذا النهار، ونـُعَلّم بنقطةٍ طرفَ ظلّ رأس المقياس.

يكون للنهار في يومين متشابهين - أي في يومين يكون للشمس فيهما نفس الميل - نفسُ الطول، كما تكون للنقاط L وَ C على الأفق و H على نصف النهار نفس المواضع. تُبيِّن الأرصاد أنَّ النقطة التي يُحْصَل عليها على الرخامة هي نفسها لكل ساعة ذات نفس الرتبة n، لكل n تـُحقِق $1 \leq n \leq 11$. ولكن النقاطَ التي نحصل عليها على الرخامة، لكلّ ساعة ذات رتبة n، تكون مختلفة في يومين ذويْ ميلين مختلفين. وتُبيِّن الأرصاد، هذه المرة، أنّا إذا وصلنا

بين هذه النقاط نحصل على منحنٍ يختلف قليلاً جداً عن خطٍ مستقيم. وهكذا اعتبر صنّاع الرخامات أنّه كان بإمكانهم إبدال هذا المنحني بخطٍّ مستقيم، وأنّه يُمكن تحديد هذا الخط بنقطتين. ولكي تبتعد النقاط الأخرى بأقلِّ قدرٍ ممكن عن هذا الخطّ المستقيم، فإنّنا لا نختار لتحديد هذا الخطّ أيَّ نقطتين، بل النقطتين المتطرِّفتين، وهما النقطتان الخاصَّتان بيوم الانقلاب الصيفي وبيوم الانقلاب الشتوي الموافقتان لِـ $\delta = \delta_m$ وَ $\delta = -\delta_m$.

يبقى علينا أن نرسم خطوط الساعات. إنّه من الضروري، لأجل ذلك، أن نحدِّدَ طول الظلّ لكلٍّ من النقطتيْن المتطرِّفتين. إذا أخذنا في وقت ما شعاع الشمس OS الذي يمرُّ برأس المقياس KO، حيث تُعتبَر النقطة O كمركز العالَم، فإنَّ هذا الشعاعَ يقطع مستويَ الرخامة على النقطة M طرف الظلّ. وإذا كان h ارتفاعَ الشمس فوق الأفق في نفس اللحظة، يكون معنا $\widehat{OMK} = h$ في المثلّث القائم الزاوية MKO. وإذا كان $d = OK$ ارتفاعَ المقياس، يكون معنا: $\frac{d}{\text{tg}h} = l = KM$، حيث يكون l طولَ الظلّ، أو كما كتب ابن الهيثم " فتبيَّن لهم كلّياً أنّ



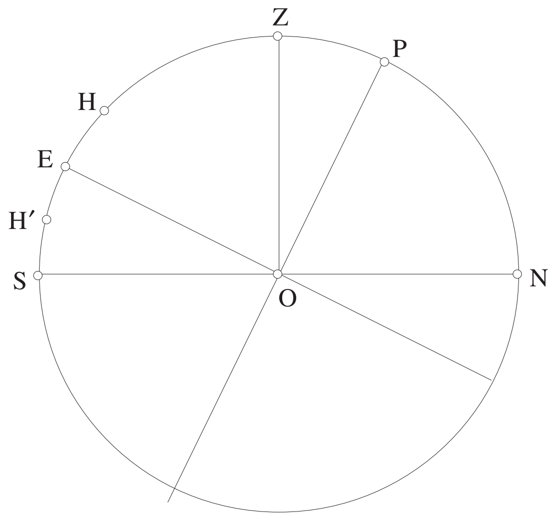
الشكل ٣

بياناً كلياً أن نسبة كلِّ شخص إلى ظلّه كنسبة جيب ارتفاع الشمس في ذلك الوقت إلى تمام سهمه"[٤]؛ وهذه الصيغة معروفة، كما يقول ابن الهيثم من قِبَل الذين كتبوا حول الرخامات. فنحن نراها بالفعل عند ثابت بن قرَّة مثلاً في كتابه حول الرخامات[٥]، وعند الكثير من المؤلّفين الآخرين.

---

[٤] انظر ص. ٦١١، س ١-٢.
[٥] انظر "في الآلات التي تُسمّى رخامات"، ص. ١٣٣-١٣٤ من الكتاب :
Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie, texte établi et traduit par Régis Morelon (Paris, 1987)

لتكن H نقطة المرور على مُعدِّل النهار، لقيمة ما δ للميل يُمكنها أن تكون موجبة أو سالبة. لنفرض أنَّ الدائرة موجَّهة بالاتجاه $NPZES$؛ يكون معنا: $\lambda = \widehat{EZ} = \widehat{PN}$، $\delta = \widehat{EH}$ وَ $\widehat{HZ} = \lambda - \delta$، فيكون، بالتالي، الارتفاع المطلوب $\widehat{SH} = \frac{\pi}{2} - (\lambda - \delta)$. يكون معنا إذاً في يوم الانقلاب الصيفي، أي في اليوم الذي تكون فيه الشمس في رأس السرطان: $\delta = \delta_m$ وَ $\widehat{SH} = \frac{\pi}{2} - \lambda + \delta_m$. ويكون معنا في يوم الانقلاب الشتوي، أي في اليوم الذي تكون فيه الشمس في رأس الجدي: $\delta = -\delta_m$ وَ $\widehat{SH'} = \frac{\pi}{2} - \lambda - \delta_m$.



الشكل ٤

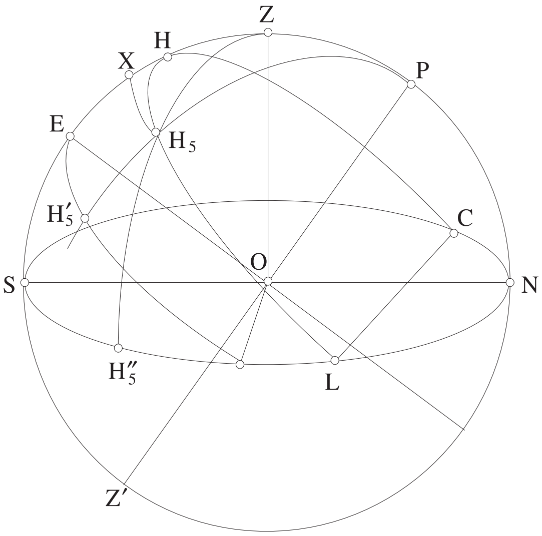
يُوضِّح ابن الهيثم بعد ذلك أنّه يجب تحديد طالع الشمس المستقيم وسمتها، لكلّ ساعة زمانية خاصّة بالميل δ. لنأخذ عندئذ كنقطة أصل لقياس المطالع المستقيمة نقطة تقاطع دائرة معدِّل النهار مع دائرة نصف نهار المكان، ولتكن E هذه النقطة ؛ ونأخذ كنقطة أصل لقياس السموت نقطة تقاطع دائرة الأفق مع دائرة نصف النهار للمكان، ولتكن S هذه النقطة.

لنفرض أنَّ الشمس في رأس دائرة السرطان وأنّ H نقطة المرور على ZSZ' دائرة نصف النهار. لقد رأينا أنَّ h، ارتفاع النقطة H، معلومٌ؛ ويكون طالع H المستقيم وسمْتها معدومين. يأخذ ابن الهيثم بعد ذلك موضع الشمس H_5، أي موضعها في الساعة الزمانية الخامسة. إنّ

قياس القوس $\widehat{HH_5}$، على الدائرة الموازية لمعدِّل النهار، معلوم. يكون معنا بالفعل:

$\widehat{HH_5} = \frac{1}{6}\widehat{LH}$ مع $\widehat{LH} = \frac{J}{2}$ المحدَّدة بالمعادلة $-\text{tg}\,\delta \cdot \text{tg}\,\lambda = \cos\frac{J}{2}$.

تقطع الدائرة العظمى PH_5 معدِّل النهار على النقطة H'_5، فتكون $\widehat{EH'_5}$ الطالع المستقيم للنقطة H'_5؛ تقطع الدائرة العظمى ZH_5 دائرة الأفق على النقطة H''_5، فتكون القوس $\widehat{SH''_5}$ سمتَ النقطة H_5.



الشكل ٥

القوسان المتوازيتان $\widehat{HH_5}$ وَ $\widehat{EH'_5}$ لهما نفس القياس بالدرجات: $\widehat{EH'_5} = \widehat{HH_5} = \alpha_5$. فيكون بذلك طالعُ H_5 المستقيم معلوماً.

عندما يكون رأس السرطان في النقطة H_5 فإنّ نقطة أخرى من دائرة البروج توجد على دائرة نصف النهار؛ لتكن X هذه النقطة. فتوجَد إذاً قوسٌ من دائرة البروج، هي $\widehat{XH_5}$، بحيث يكون طالعُها المستقيم القوسَ المعلومة $\widehat{EH'_5}$. وكلُّ طالع مستقيمٍ معلوم يتوافق مع قوس معلومة على دائرة البروج. فتكون القوسُ $\widehat{XH_5}$ إذاً معلومةً وتكون النقطة H_5 معلومة، فيكون ارتفاعها $\widehat{SX}$ بالنسبة إلى الأفق معلوماً. فيُمكن حينئذ أن نُحدِّد السمت والارتفاع

للنقطة H_5 بتطبيق مبرهنة منالاوس. يعتبر ابن الهيثم، هنا أيضاً، أن ليس من الضروري أن يعرض هذه المبرهنة ولا أن يُقيم البرهان، لأنَّ الصانع في غنى عن ذلك.

سنقيم فيما يلي هذا البرهان الذي لم يورده ابن الهيثم في نصّه. لتكن O المكان المعني بالأمر. تتقاطع دائرة البروج مع دائرة أفق المكان وفقاً للقطر MM'. والقوس $\widehat{MXM'}$ من دائرة البروج هي نصف دائرة مقطوعة على النقطة X بدائرة نصف النهار SZ للمكان O. ولقد حُدِّدت النقطة X استناداً إلى وضع رأس السرطان H_5 في الساعة الخامسة، والقوسان $\widehat{SX}$ وَ $\widehat{XH_5}$ معلومتان. والقوسان $\widehat{MS}$ وَ $\widehat{XM}$ معلومتان أيضاً.

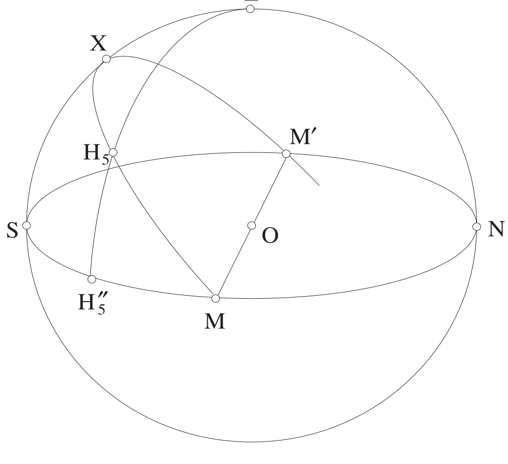
يُمكن تطبيق مبرهنة منالاوس بطريقتين مختلفتين لتحديد القوسين $\widehat{SH''_5}$ وَ $\widehat{H_5H''_5}$.

لنضع $x = \widehat{SH''_5}$ سمت النقطة H_5، وَ $y = \widehat{H_5H''_5}$ ارتفاع H_5 ، $a = \widehat{MS}$ وَ $c = \operatorname{tg} \widehat{XS}$ ؛

يكون معنا: $a - x = \widehat{MH''_5}$ ، $\frac{\pi}{2} - y = \widehat{ZH_5}$ وَ $\frac{\pi}{2} - \widehat{XS} = \widehat{XZ}$. يكون معنا على الشكل MH_5ZS، وفقاً لمبرهنة منالاوس: $1 = \frac{\sin \widehat{MS}}{\sin \widehat{MH''_5}} \cdot \frac{\sin \widehat{H_5H''_5}}{\sin \widehat{H_5Z}} \cdot \frac{\sin \widehat{XZ}}{\sin \widehat{XS}}$،

أيْ أنَّ:

$$\frac{\sin a}{\sin(a-x)} \cdot \operatorname{tg} y = c \quad (1)$$ ؛



الشكل ٦

وإذا طبَّقنا نفس المبرهنة على الدائرة ZH_5H_5''، نحصل على:

$$1 = \frac{\sin \widehat{MH_5''}}{\sin \widehat{SH_5''}} . \frac{\sin \widehat{H_5X}}{\sin \widehat{H_5M}} . \frac{\sin \widehat{ZS}}{\sin \widehat{ZX}}$$ ؛

ولكنّ $\widehat{ZS} = \frac{\pi}{2}$ وَ $\widehat{SX}$ معلومة، فتكون $\widehat{ZX}$ معلومة أيضاً؛ ولكن، من جهة أخرى، $\widehat{H_5X}$ وَ $\widehat{MX}$ معلومتان، فتكون $\widehat{H_5M}$ أيضاً معلومة. فتكون النسبتان الأولَيان من اليمين معلومتين؛ لتكن $\frac{1}{k}$ نتيجة ضرب إحداهما بالأخرى؛ فتُكتب المعادلة السابقة:

$$\sin(a - x) = k . \sin x$$،

وهذا ما يُكتَب ثانية:

$$\text{tg } x = \frac{\sin a}{k + \cos a} \qquad (2)$$،

فينتج من ذلك قيمة السمت $\alpha_5 = x$.

تكون إذاً $(a - x)$ معلومة، فنستخرج من (1): $\text{tg } y = \frac{c \sin(a - x)}{\sin a} = c \cdot k \frac{\sin x}{\sin a}$ ؛

فنحصل على $h_5 = y$ ارتفاع الموضع H_5.

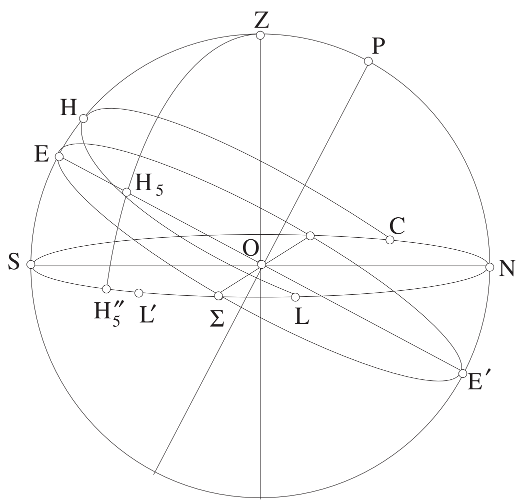
يُمكن إذاً أن نستنتج أنّنا نعرف، في اليوم الذي تكون فيه الشمس في رأس السرطان (يوم الانقلاب الصيفي)، قيمة الطالع المستقيم، كما نعرف كيف نرسم السمت وارتفاع الموضع H_5 للشمس في الساعة الخامسة، أي قبل ساعة من لحظة مرور الشمس على نصف النهار، في مكان معلوم. وهكذا نعرف إذاً للنقطة H_5 الطالعَ المستقيم a_5 والسمتَ α_5 والارتفاعَ h_5. ونحسب بنفس الطريقة الإحداثيّات a_i، α_i، h_i ، للنقطة H_i ، لكلّ i مع $1 \leq i \leq 5$. ومواضع النقاط H_i مع $7 \leq i \leq 11$ ، التي تخصّ المواضع من رأس السرطان في الساعات التي تتبع المرور على نصف النهار، متناظرة مع النقاط H_5، H_4، ...، H_1 بالنسبة إلى دائرة

نصف النهار SZ. والطوالع المستقيمة هي أقواس أصلها النقطة S وارتفاعاتها $\widehat{ZH_i}$ ؛ فيكون لكل نقطتين متناظرتين، مثل H_5 وَ H_7 ، إحداثيات متساوية.

ونستخدم نفس الطريقة لدراسة نقاط الدائرة التي ترسمها كل نقطة من النقاط التي تتوافق على فلك البروج، مع رؤوس البروج. وهكذا يُمكن أن نعمل رخامة لأفق معلوم، وذلك لأنّه يُمكن تحديد السمت والارتفاع لموضع كل نقطة من النقاط المأخوذة على دائرة البروج في كلّ ساعة من الساعات الزمانية الاثنتيْ عشرة.

يتناول ابن الهيثم دراسة سعة المشرق، بعد هذه الدراسة المُكَرَّسة لطالع الشمس المستقيم ولارتفاعها في ساعة معلومة من دائرة السرطان (أو الجَدْي).

لنتناولْ شكلَ الكرة السماوية. إنَّ دائرةَ مُعدِّل النهار ودائرةَ الأفق عموديتان على مستوي نصف النهار SZP؛ لذلك يكون خطُّ تقاطعهما $O\Sigma$ عمودياً على نفس هذا المستوي وعلى كلّ خطّ فيه. فيكون الخطّ $O\Sigma$ إذاً عمودياً على SN. والنقطة Σ هي النقطة الشرقية لأفق المكان O؛ ويكون معنا: $\widehat{\Sigma S} = \widehat{\Sigma N} = \frac{\pi}{2}$.



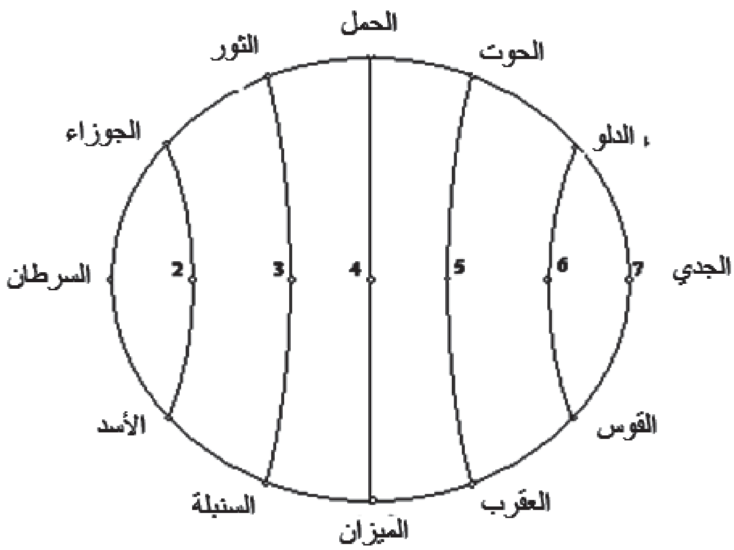
الشكل ٧

إنّ رأس السرطان ذا الميل الموجب يُشرق في النقطة L شمال Σ. والقوس $\widehat{L\Sigma}$ هي سعة المشرق، ويكون معنا: $\widehat{LN} = \widehat{\Sigma L} - \frac{\pi}{2}$ وَ $\widehat{SL} = \widehat{\Sigma L} + \frac{\pi}{2}$. والقوس $\widehat{SL}$ هي سمت النقطة

L، نقطة شروق رأس السرطان. أما L' نقطة شروق رأس الجدي ذي الميل السالب فإنّها توجَد جنوب Σ ويكون معنا: $\widehat{LN'} = \widehat{\Sigma L'} + \frac{\pi}{2}$. وَ $\widehat{SL'} = \widehat{\Sigma L'} - \frac{\pi}{2}$؛ والقوس $\widehat{SL'}$ هي سمت النقطة L'، نقطة شروق رأس الجَدْي.

٢- أصبح بمقدور ابن الهيثم، بعد أن شرح كيف يُحدَّد السمت والارتفاع لموضع الشمس خلال الساعات الزمانية لكل نهار موافق لكلّ رأس من رؤوس البروج، أن يعرض قواعد الطريقة التي يتوجَّب على الصانع تطبيقها في عمل الرخامة الأفقية في مكان معلوم. وهكذا يُذكِّر مرَّتين بكيفية استخدام النتائج السابقة المُثبَتة لتحديد طرف ظلّ المقياس.

إنَّ عمل الرخامة يرجع في الواقع إلى تحديد خطوط الساعات. يكفي إذاً أن نعرف نقطتين لتحديد كلّ خطّ منها. وإنّه من الأفضل أيضاً أن تكون هاتان النقطتان متطرِّفتين، أيْ أن تخصَّ إحداهما مواضع رأس السرطان، وأن تخصَّ الأخرى مواضع رأس الجدي. يصف ابن الهيثم بطريقة تفصيلية المراحل التي يجب اتّباعها لصنع الرخامة. يجب في أوَّل الأمر أن يوضَع جدولٌ يُدوَّن فيه لكل رأس من رؤوس البروج السَّمتُ والارتفاعُ الخاصَّان بموضعه في كل ساعة زمانية من النهار الخاصّ به.



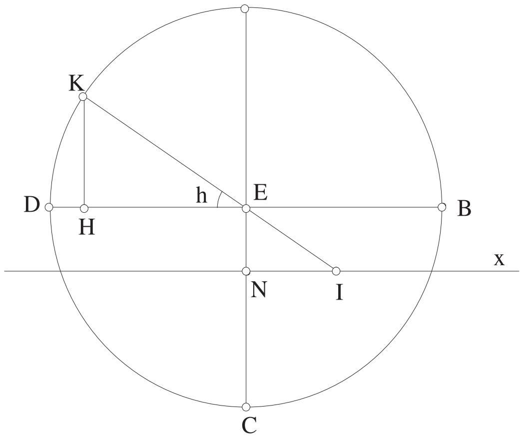
الشكل ٨-١

	الساعة الأولى		الساعة الثانية		الساعة الثالثة		الساعة الرابعة		الساعة الخامسة		الساعة السادسة	
السرطان									$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$	$h_{1,6}$	
الجوزاء الأسد												
الثور السنبلة									$h_{3,5}$	$\alpha_{3,5}$		

الشكل ٨-٢

يتضمَّن هذا الجدول ستة خطوط عمودية وسبعة خطوط أفقية (لم تُرسم كل الخطوط الأفقية على الشكل). نُعلّم على الخطوط الأفقية أسماء البروج وفقاً لميولها، بدءاً من السرطان ذي الميل δ_m ومروراً ببرجيْ الجوزاء والأسد وبرجيْ الثور والسنبلة وبرجيْ الحمل والميزان وبرجي الحوت والعقرب وبرجيْ الدلو والقوس، حتّى الجدي ذي الميل $-\delta_m$. أما الخطوط العمودية فإنها تخصّ الساعات الزمانية. كلُّ عمود يتضمَّن قسمين يُسَجَّل في أحدهما السمت وفي الآخر الارتفاع. ويكون السمت في الساعة السادسة معدوماً، لأنَّ الأمر يتعلّق بالمرور على نصف النهار.

نعمل بعد ذلك دائرة الدستور: نرسم على صفيحة من نحاس دائرةً مركزها E مع قطرين متعامدين CA وَ DB.



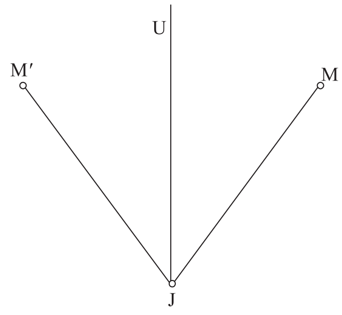
الشكل ٩

الدائرة مُرَقّمة بالدرجات. ليكن d طول المقياس الذي نستعمله في الرخامة. نُعلّم النقطة N على AC بحيث يكون $d = EN$، ونُخرِج من N الخطّ xN الموازي لِـ DB.

ويُمكن استخدام دائرة الدستور هذه لتحديد طول ظلّ المقياس في وقت معلوم بالطريقة التالية:

ليكن h ارتفاع الشمس في الوقت المُعيَّن، ولتكن K نقطة على محيط الدائرة بحيث يكون $h = \widehat{DK}$. نُخرج KH بحيث يكون $KH \perp DB$ ؛ يقطع الخطُّ EK الممدَّدُ على استقامة الخطَّ xN على النقطة I. المثلّثان القائما الزاوية EHK وَ INE متشابهان؛ فيكون معنا $\mathrm{tg}\, h = \frac{EN}{NI} = \frac{KH}{HE}$. فإذا كان EK يُمثِّلُ الشعاعَ الشمسي ذا الارتفاع h الذي يقع على رأس المقياس E والذي يلتقي بالخطّ xN الذي يُمثِّل مستويَ الرخامة، يكون IN عندئذ طولَ الظلّ: $NI = l = d \cot g\, h$.

نأخذ، لعمل الرخامة، صفيحة مسطَّحة على الوجه الأكمل، ونثبِّت موضعها لكي يكون سطحها موازياً لمستوي الأفق في المكان المعيَّن. ونُحدِّد على الصفيحة خطّاً ليكون خطّ نصف النهار. نختار لأجل ذلك نقطة على الصفيحة، لتكن J هذه النقطة؛ نضع عليها المقياس ونُحدِّد خلال النهار ظلّ ين MJ وَ $M'J$ لهما نفس الطول. فيكون UJ، منصِّفُ الزاوية $M'JM$، خطَّ نصف النهار الخاصّ بالنقطة J.



الشكل ١٠

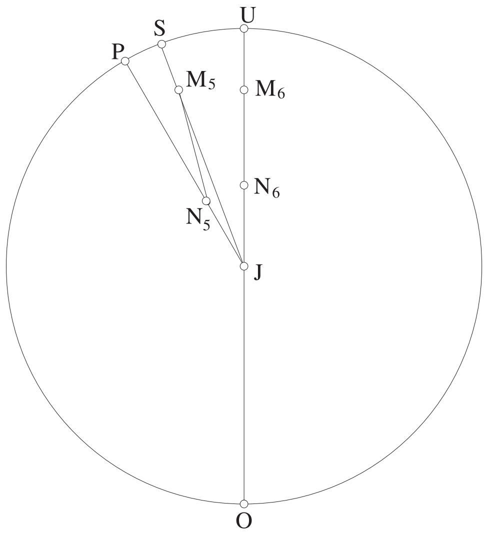
نأخذ بعد ذلك النقطة J ونرسم على الصفيحة دائرة مركزها J، بحيث تكون مساوية لدائرة الدستور ويكون OJU قطرها (على خطّ نصف النهار). وهكذا يكون واضحاً أنّه إذا كان المقياس JG عمودياً على الصفيحة في النقطة J، فإنَّ ظلّ رأسه G يقع في الساعة السادسة على UJ.

لنفرض أوّلاً أنّ الشمس في رأس السرطان، ولندرس الظلّ الخاصّ بالساعة الخامسة لمقياس ذي طول d مساوٍ لطول EN المستعمَل في دائرة الدستور. نأخذ عندئذ في الجدول السمت $\alpha_{1,5}$ والارتفاع $h_{1,5}$ الموافقين للحالة المدروسة (السرطان، الساعة الخامسة) ونُعلّم على الدائرة (J ، JU) النقطة P، بحيث يكون $\widehat{UP} = \alpha_{1,5}$. فيكون الخطُّ PJ خطَّ السمت.

وهكذا نعمل على دائرة الدستور البناءَ المذكور آخذين $h_{1,5} = h$ ، فنحصل على l الذي هو طول ظلّ المقياس ذي الطول d. وننقلُ هذا الطول l على خطّ السمت PJ، أي بحيث يكون $JN_5 = l$. وهكذا تكون النقطة N_5 التي نحصل عليها طرفَ الظلّ ذي الطول الأقصر، في الساعة الخامسة.

ونعيد العملَ بنفس الطريقة للساعة الخامسة من الجَدْي. فالجدول يُعطينا السمت $\alpha_{7,5}$ الذي يخصُّ هذه الحالة. فنُعلّم على دائرة الرخامة النقطة S بحيث يكون $\widehat{US} = \alpha_{7,5}$، ونرسم الخطَّ SJ وننقل عليه الطول $l' = JM_5$، وهو الطول الذي نحصل عليه من دائرة الدستور عندما نأخذ الارتفاع $h_{7,5} = h$. والنقطة M_5 هي طرف الظلّ ذي الطول الأقصى للساعة الخامسة. ثم نرسم على الرخامة الخطَّ M_5N_5 الذي هو خطُّ الساعات ذو الرتبة ٥. وهكذا يقع ظلُّ رأس المقياس ذي الطول d، في كل يوم وفي الساعة الخامسة، على نقطة قريبة جداً من هذا الخطّ.

ونعيد العمل بنفس الطريقة لكلّ ساعات النهار للسرطان والجدي. ونُعَلّمُ بالتتابع كلَّ النقاط M التي نحصل عليها. فنجد أنَّ النقطتيْن الخاصَّتين بساعتين متتابعتين لا تبتعدان إلا قليلاً جدّاً عن بعضهما. فيُمكن عندئذ أن نعتبر أنَّ مجموع هذه النقاط هو المكان الهندسيّ لخطٍّ منحنٍ. يُوضِّح ابن الهيثم أنَّ هذا الخطَّ قطعٌ مخروطي، ولكنّه لا يتوقف لتعليل ذلك.



الشكل ١١

لنبيِّن أنَّ هذا الخطَّ المنحنيَ قطعٌ زائدٌ.

ترسم الشمس كلَّ يومٍ دائرة موازية لدائرة الاستواء. يؤخَذ رأس المقياس كمركز للعالَم؛ فيُوَلِّد شعاعُ الشمس GS، إذاً، سطحاً مخروطياً دورانياً يكون محورُه القطرَ الذي يمرُّ بقطبيْ الكرة السماوية. ونحصل على صفيحتيْ نفس السطح المخروطي، لكلّ ميليْن متقابليْن، مثل ميليْ السرطان والجدْي. فيكون معنا، للمكان المعني بالأمر، على خطّ التقاطع بين مستوي الرخامة مع إحدى الصفيحتين كلَّ النقاط N الخاصَّة برأس السرطان، ويكون معنا على خطّ التقاطع بين مستوي الرخامة مع الصفيحة الأخرى كلَّ النقاط M الخاصَّة برأس الجدي.

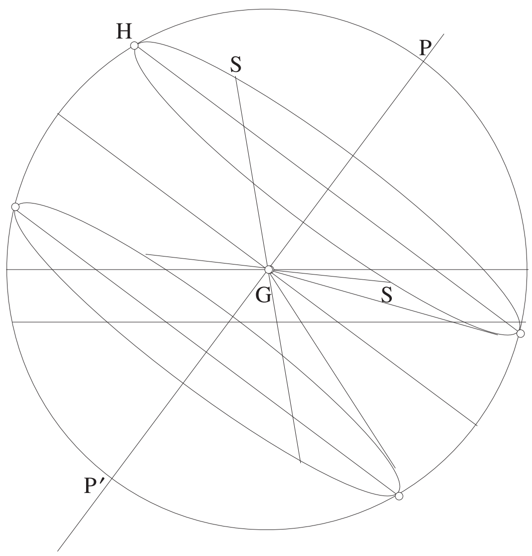
إذا كان المكانُ المعنيُّ بالأمر ذا عرض أكبر من δ_m ، الميل الأقصى للشمس، وأصغر من تمام هذا الميل الأقصى، $\delta_m < \lambda < \frac{\pi}{2} - \delta_m$، أيْ إذا كان المكان موجوداً بين دائرة السرطان والدائرة القطبية الشمالية، فإنَّ القطعيْن المخروطيين اللذين نحصل عليهما للسرطان والجدي هما فرعا قطع زائد. ونُعيد هذه الدراسة نفسها لكلِّ رأس من رؤوس البروج. إنَّ رأسَ الأسد ورأسَ الجوزاء موجودان في جهتيْ السرطان ولهما نفس الميل δ. والنقاط N الموافقة لكلِّ واحدٍ من هذين الرأسين تكون على نفس الخطّ. إنَّ رأس الدلو ورأس القوس موجودان في جهتيْ الحَمَل ولهما نفس الميل (δ-). والنقاط M الموافقة لكلِّ واحدٍ من هذين الرأسين تكون على نفس الخطّ.

والخطّان اللذان نحصل عليهما لبرجي الأسد والجوزاء من جهة ولبرجيْ الدلو والقوس من جهة أخرى هما فرعان لنفس القطع الزائد. ويكون الأمر كذلك بالنسبة إلى برجي الثور والسنبلة من جهة ولبرجيْ الحوت والعقرب من جهة أخرى.

إنّ لرأسيْ الحمل والميزان ميلاً معدوماً. وعندما تكون الشمس في أحد هذين الموضعين تكون حركتها اليومية في مستوي معدِّل النهار، فيرسم طرف ظلّ المقياس في هذين النهارين على مستوي الرخامة الأفقي خطّاً عمودياً على الخطّ JU.

وهكذا نرى أنَّ كلَّ قطع من القطوع الزائدة المعنية بالأمر تخصُّ ميل الشمس δ الذي هو ميل أحد رؤوس البروج. والنقطة N تخصُّ الميل الموجِب δ والنقطة M تخصُّ الميل السالب ($-\delta$). يبقى علينا أن نُقدِّر الطوليْن NJ وَ MJ المرفقيْن بِـ δ وَ ($-\delta$)، عندما يكون العرضُ مساوياً لِـ λ.

ليكن h وَ h' ارتفاعيْ نقطتيْ المرور H وَ H' على نصف النهار، مع $\delta = \widehat{EH}$، $-\delta = \widehat{EH'}$، وَ $\lambda = \widehat{EZ}$.



الشكل ١٢

يكون معنا: $h = \widehat{SH} = \widehat{HZ} - \frac{\pi}{2} = (\lambda - \delta) - \frac{\pi}{2}$ ،

فإذاً $JN = d \operatorname{cotg} h = d \operatorname{tg}(\lambda - \delta)$ ،

حيث يكون d طول المقياس؛ ويكون معنا من جهة أخرى:

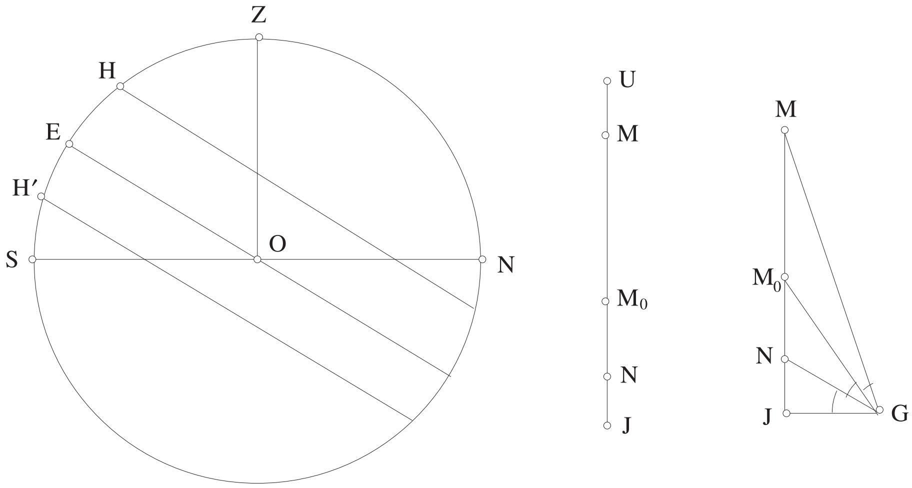
$h' = \widehat{SH'} = \widehat{H'Z} - \frac{\pi}{2} = (\lambda + \delta) - \frac{\pi}{2}$ ، فإذاً:

$JM = d \cot g\, h' = d\, tg\, (\lambda + \delta)$.

ويكون معنا لبرجيْ الحمل والميزان $\delta = 0$، وتتطابق النقطتان M وَ N مع النقطة M_0 بحيث يكون: $d\, tg\, \lambda = JM_0$.

وتكون النقطتان M وَ N، لقِيَم δ المدروسة التي تُحقّق $|\delta| \neq 0$ ، من جهتيْ النقطة M_0.

ويكون معنا أخيراً، في المستوي العموديّ على الرخامة وفقاً للخطّ JU حيث يوجَد المقياس GJ ذو الرأس G: $\widehat{JGM_0} = \lambda$، $\widehat{MGM_0} = \widehat{NGM_0} = \delta$، كما يكون الشعاع GM_0 منصِّفاً للزاوية المشكّلَة من الشعاعين MG وَ NG.



الشكل ١٣

وهكذا عرض ابن الهيثم، وفق ما يقول بنفسه، "الجمل والأصول التي يُعتمَد عليها في عمل الرُّخامات، والإشارة إلى كيفية العمل، ومواضع الحاجة إلى المعاني التي يتكرَّر ذكرها في كتب أصحاب الأظلال[٦]". وكان الأمر يتعلّق، فعلاً، بعرض المبادئ الهندسية التي تؤسِّس وتُعلّل عمل صانع الرخامات. وهذه المعرفة الرياضية الفلكية واجبة لكل صانعٍ للرخامات. يعرض ابن الهيثم لأجل ذلك ما هو ضروريٌ بشكل حصري، بدون التطرُّق إلى النظرية الرياضية للرخامات، تلك النظرية التي أراد أن يخصِّص لها كتاباً آخر. ولقد وفى ابن الهيثم بوعده وكتب "في خطوط الساعات" حيث يعرض بمهارة، كما رأينا، هذه النظريةَ.

[٦] انظر ص. ٦٢٣، س. ١-٤.

٣- تاريخ النصّ

"في الرخامات الأفقية" هو العنوان الذي أورده المفهرسون القدامى- القِفطي وابن أبي أصيبعة والمفهرس المجهول الهوية في لاهور- لهذا المؤلّف ضمن القائمة بأعمال ابن الهيثم السابقة لسنة ١٠٣٨[٧]. ويُخبرنا ابن الهيثم نفسه، في نهاية هذا المؤلّف أنّه قد حُرِّر قبل "في خطوط الساعات". ولقد حُرِّر هذان المؤلّفان قبل مؤلّف "في الكرة المُحرِقة".

ووصلنا هذا المؤلّف في مخطوطتين:

١- مجموعة ٩/٢٩٧٠، الأوراق ١٥٣ظ-١٦١و، من ستاتسبيبليوتيك (*Staatsbibliothek*)[٨]، منسوخة بيد قاضي زاده خلال الثلاثينيات من القرن الخامس عشر. ونسمّي هذه المخطوطة: المخطوطة (B).

٢- المجموعة توغابوني(*Tugābunī*) ١١٠، الأوراق١-١٩، من مكتبة طهران الوطنية. وهي مجموعة من الكتابات العلمية، وفيها ٥٨١ صفحة. لا نعرف إلا القليل عن تاريخ هذه المجموعة. ونرمز إلى هذه المجموعة بـ (I).

والمقارنة بين (B) وَ (I) تُبيِّن أنّه ينقص في (B) جملة وأربع كلمات، بينما نجد في (I) ستة نواقص لكلمة واحدة في كلٍّ منها. وهذا ما يجعلنا نعلم أنّ (B) ليست المخطوطة الأمّ للمخطوطة (I).

ولقد حقّقنا النصَّ استناداً إلى هاتين المخطوطتين.

[٧] انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٤٩٤-٤٩٥.

[٨] لقد استرجعنا تاريخ هذه المجموعة في المجلّد الثالث من هذه الموسوعة، ص. ٤٥٣-٤٦٢.

٤ ـ نصّ كتاب ابن الهيثم
"في الرخامات الأفقية"

ب-١٥٣-ظ
ط-١

الرخامة هي سطح معلوم الوضع ذو شخص قائم وخطوط، إذا وقعت أطراف أظلال الشخص على تلك الخطوط دلت على الساعات الزمانية الماضية من النهار. والغرض الذي له تتخذ الرخامة هو معرفة الساعات. وقد تتخذ لأغراض أخر إذا زيد فيها أعمال أخر غير خطوط الساعات، إلا أن المتعارف من أغراضها المتداولة هو أن يعرف بها في كل وقت مقدار الماضي من النهار والباقي منه، وأوقات نصف النهار. والساعة الزمانية هي الجزء من الاثني عشر جزءاً من مقدار طول نهار اليوم الذي تلك الساعة منه. والساعات الزمانية يختلف مقدارها في كل يوم، لأن زمان النهار يختلف في كل يوم. والطريق الذي به كان يتخذ أصحاب الأظلال الرخامات في أول الأمر هو أنهم كانوا يُعدّلون سطحًا موازيًا للأفق، ويستخرجون فيه خط نصف النهار، ويقيمون شخصًا على خط نصف النهار قيامًا معتدلاً ثابتًا؛ فإذا وقع ظله على خط نصف النهار، استدلوا بذلك على أن الشمس قد انتهت إلى دائرة نصف النهار، وأن الذي مضى من النهار هو مثل ما بقي. ثم كانوا يرصدون الشمس في كل يوم بالأسطرلاب أو ما جرى مجراه، ويراعونها إلى أن يمضي من النهار ساعة زمانية، وهي جزء من اثني عشر جزءاً من قوس نهار ذلك اليوم، وينظرون إلى ظل الشخص القائم على الرخامة؛ فيعلمون على الموضع الذي عليه طرف الظل علامةً، ثم يراعون الشمس والظل إلى أن يمضي من النهار ساعتان؛ فيعلمون أيضًا على طرف الظل علامة

3-2 قول ... الأفقية: نجد في صفحة ١٥٣-و «رسالة في الرخامات لابن الهيثم» [ب] – 4 وقعت: وقع [ب] – 8 في كل: أثبتها في الهامش [ط] – 10 الاثني: اثنى [ب، ط] – 13 كانوا: كا، ثم أثبت «نوا» في الهامش مع «صح» [ب] – 18 وهي: وهو [ب، ط].

أخرى، ويفعلون مثل ذلك في باقي الساعات حتى يحصل لهم على سطح الرخامة علامات تدلّ على الساعات؛/ ثم كانوا يفعلون مثل / ذلك في كل [ب-١٥٤-و] [ط-٢] يوم إلى أن تنتهي الشمس إلى غاية قربها من سمت الرأس وغاية بعدها عنه، فتحصل لهم نقط كثيرة، تدل كل نقطة منها على ساعة من يوم من الأيام. ثم كانوا يراعون الظل من بعد ذلك، فيجدونه في كل يوم: كلما مضت ساعة يقع طرف الظل على العلامة التي كانوا يعلمونها على السطح في اليوم الشبيه بذلك اليوم من السنة. فصارت تلك العلامات قانونًا يعرفون به الساعة الماضية من النهار. ثم تأملوا تلك النقط من بعد ذلك، فكانوا يجدون النقط التي تحدّ الساعات النظائر لجميع الأيام على خط ليس بينه وبين الخط المستقيم كثير تفاوت، بل كل النقط ‹التي› تحدّ ساعات نظائر يجدونها على خط قريب في الحسّ من الخط المستقيم. فصاروا من بعد ذلك يخطون الساعات النظائر خطوطًا مستقيمة. فإذا وقع أطراف الأظلال عليها، استدلّوا بها على الساعات. فلما كثر استعمالهم لذلك، صاروا متى أرادوا اتخاذ رخامة، رصدوا لذلك يومًا من أقسام السنة، فاستخرجوا لكل الساعات النظائر نقطتين ووصلوا بينهما بخط مستقيم، جعلوه خط الساعات النظائر، لأن الخط المستقيم، إذا وجد منه نقطتان، فقد وجد جميعه. فاعتمدوا من بعد ذلك على هذه الطريقة.

ولأنهم كانوا يتوهمون أن نقط الساعات النظائر ليس هي بالحقيقة على خط مستقيم، وأنه متى وصل بين نقطتين متقاربتين من النقط النظائر بخط مستقيم، وأخرج على استقامة، لم يؤمن إذا تباعد أن يتزايد ذلك التفاوت، ويظهر ‹أنهم› كانوا يطلبون النقطتين اللتين هما نهايتا النقط النظائر من الطرفين ويصلون بينهما بخط مستقيم يجعلونه خط الساعات النظائر. فلما استقر ذلك، جعل كل من اتخذ رخامة الساعات يلتمس من كل خط من خطوط الساعات/ النقطتين/ اللتين هما طرفا الخط. ولأنه كان يبعد على من [ط-٣] [ب-١٥٤-ظ] اتخذ رخامة أن ينتظر بلوغ الشمس إلى غاية ميلها وعودها إلى الغاية الأخرى – لأن عند غايتي ميل الشمس تكون غايتا النقط التي تقع عليها أطراف الأظلال – عدلوا إلى النظر الهندسي في استخراج النقط اللواتي هي

6 التي: التي كل [ط] – 8 تأملوا: تأملو [ط] – 10 النقط: نقط – 14 اتخاذ: استخراج [ط] / أقسام: ربما كانت في الأصل «أيام» – 15 بينهما: فيها [ب] – 15-16 الساعات النظائر: ساعات نظائر – 24 على: من، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 26 غايتا: غايتي [ب، ط].

أطراف خطوط الساعات. فتبين لهم بياناً كليًا أن نسبة كل شخص إلى ظله كنسبة جيب ارتفاع الشمس في ذلك الوقت إلى تمام سهمه. فإن الخط الذي يقع عليه الظل إما أن يكون خط نصف النهار أو خطًا يحيط مع خط نصف النهار بزاوية توترها القوس من الأفق التي بين خط نصف النهار وبين قوس الارتفاع، وهي التي تسمى قوس السمت. والبرهان على ذلك أن الشمس تكون أبداً على دائرة من الدوائر السمتية، والشخص أبداً في كل دائرة من الدوائر السمتية، لأن رأسه بمنزلة مركز العالم، وهو على استقامة خط وسط السماء. والشعاع الذي يخرج من الشمس إلى رأس الشخص هو أبداً قطر الدائرة السمتية التي تمرّ بالشمس في ذلك الوقت. ولأن الشخص والشعاع جميعًا في سطح الدائرة السمتية في ذلك الوقت، يكون الظل على خط في سطح الدائرة السمتية، لأنه مع هذين الخطين، أعني الشخص والشعاع، في سطح واحد. فالظل أبداً على الخط الذي في سطح الدائرة السمتية وفي سطح الأفق، فهو ينتهي إلى طرف قوس الارتفاع، لأن موضع تقاطع الأفق والدائرة السمتية، إما أن يكون خط نصف النهار أو <أن يكون خطًا> يكون القوس التي بين نهايته وبين خط نصف النهار هي القوس التي بين خط نصف النهار وبين قوس الارتفاع، وهي التي تسمى قوس السمت.

وأيضًا، لأن جيب الارتفاع هو العمود الواقع من / الشمس على قطر ط-٤ الدائرة السمتية التي تمرّ برأس الشخص، وهو موازٍ لخط وسط السماء الذي يخرج على استقامة الشخص، وقطر الدائرة السمتيةِ التي تمرّ برأس الشخص / موازٍ للظل – لأنهما في السطحين المتوازيين اللذين هما الأفق المار برأس ب-١٥٥-و الشخص وسطح الرخامة – وهما في سطح الدائرة السمتية، فخط الشعاع يحدث مع هذه الخطوط مثلثين، فهما متشابهان لأن خطوطهما متوازية، فتكون نسبة جيب الارتفاع إلى تمام سهمه، وهو الخط الذي بين مسقط العمود وبين رأس الشخص، كنسبة الشخص إلى الظل.

1 إلى ظله: أثبتها في الهامش [ب] – 2 الوقت: اليوم [ط] – 3 خطًا: خط [ب] – 6 كل: ناقصة [ط] – 9 الوقت: كتب اليوم، ثم ضرب عليها بالقلم [ط] – 11 هذين: ضرب عليها بالقلم وكتب «بعدين» [ب] – 13 فهو: يعني الخط المستقيم الذي عليه الظل / لأن: لانه [ب، ط] – 14 إما: فاما [ب، ط] – 16 الارتفاع: نجد بعدها «وهي التي توتر الزاوية التي بينه وبين خط نصف النهار»، ويستقيم المعنى دونها [ط] – 18 السمتية: أثبتها في الهامش [ب] / لخط: مكررة [ط] – 20 السطحين المتوازيين: سطحين متوازيين [ب] لسطحين المتوازيين [ط] – 21 فخط: وخط [ب، ط] – 23 نسبة: أثبتها في الهامش [ب].

فلما تبين ذلك، أثبتوه في كتبهم والبراهين عليه، واعتمدوا في استخراج أطراف الأظلال على هاتين المقدمتين، لأنهما كافيتان في غرضهم. فصار عامل الرخامة يحتاج في عمل الرخامة إلى معرفة ارتفاع الشمس في الساعات التي يريد أن يحدّ أطراف أظلالها ومعرفة القوس التي يفصلها خط الظل من محيط الأفق من لدن خط نصف النهار التي تسمى قوس السمت. فلذلك صار من يريد أن يتخذ رخامة يتقدم فيتعرف الارتفاع وقسي السموت لوقت وقت من الأوقات التي يريد أن يثبت علاماتها في الرخامة. وطريق معرفة ذلك أن يفرض على جهة التحليل أن الشمس في نهاية ميلها، وهي رأس السرطان أو الجدي، وأنه قد انتصف النهار. فقد وقع الظل على خط نصف النهار؛ وإنما نبتدئ بنصف النهار، لأنه أسهل. فيكون حينئذٍ رأس السرطان أو الجدي على دائرة نصف النهار، ويكون ارتفاع الشمس في ذلك الوقت هو ارتفاع رأس السرطان أو الجدي، وارتفاع رأس السرطان أو الجدي في الموضع المفروض/ [ط-٥] من الأرض في نصف النهار معلوم، لأنه هو القوس من دائرة نصف النهار التي بين النقطة التي يمرّ بها رأس السرطان أو الجدي وبين الأفق. وهذه القوس تكون معلومة، لأن ميل رأس السرطان أو الجدي عن دائرة معدل النهار معلوم، وبعد سمت الرأس في الأفق المعلوم عن معدل النهار معلوم، فيكون مجموعهما – أو زيادة أحدهما على الآخر – معلومًا، وهو بعد رأس السرطان أو الجدي / [ب-١٥٥-ظ] في ذلك الوقت عن سمت الرأس. وإذا نقص ذلك من ربع دائرة، كان الباقي هو ارتفاع رأس السرطان أو الجدي في ذلك الوقت. فارتفاع الشمس إذا كانت على خط نصف النهار، وهي في رأس السرطان أو الجدي، معلوم؛ وهو أحد الأوقات التي نطلب معرفة أظلالها. ثم نفرض الشمس في رأس السرطان، ونتوهم أن بينها وبين دائرة نصف النهار ساعة واحدة زمانية، والساعة الزمانية تكون في ذلك الوقت أجزاء معلومة لأنها جزء من اثني عشر جزءاً من قوس نهار رأس السرطان في ذلك الأفق؛ وقوس نهار الدرجة المعلومة في أفق معلوم تكون معلومة، لأنه قد تبين ذلك بطريق البرهان في كتب الهيئة. فيكون البعد الذي بين الشمس وبين دائرة نصف النهار من الدائرة الموازية لمعدل النهار معلوماً،

4 يحدّ: يمر [ب، ط] – 8 وهي: وهو – 9 خط: أثبتها في الهامش [ب] – 10 بنصف: نصف [ب، ط] – 13 معلوم: معلومان – 15 السرطان: أثبتها في الهامش [ب] – 18 معلوماً: معلوم [ب] – 20 الشمس: أثبتها في الهامش [ب] – 22 الشمس: ناقصة [ب] – 25 نهار: النهار [ب].

وهو الساعة الزمانية؛ وبين الشمس وبين دائرة نصف النهار في ذلك الوقت قوس من دائرة البروج، فالقوس التي هي الساعة الزمانية المعلومة المقدار هي مطالع تلك القوس من دائرة البروج، التي بين الشمس وبين دائرة نصف النهار في الموضع الذي دائرة نصف النهار أفق له، وهو من خط الاستواء.

ومطالع أجزاء دائرة البروج في خط الاستواء معلومة، فالمطالع المعلومة هي مطالع أجزاء معلومة من / دائرة البروج هناك. فالقوس، إذن التي بين ب-١٥٦-و
الشمس وبين دائرة نصف النهار من دائرة البروج معلومة، والشمس مفروضة في رأس السرطان، فالنقطة من دائرة البروج التي على دائرة نصف النهار معلومة بارتفاعها، وهو القوس من دائرة نصف النهار التي بين تلك النقطة وبين الأفق، ‹وهي› معلومة، لأن ميل تلك النقطة معلوم وبعدَ سمت الرأس من معدل النهار معلوم. وتلك النقطة من دائرة البروج هي وسط السماء في ذلك الوقت. وإذا كان في وسط السماء في أفق معلوم جزء
معلوم / من دائرة البروج، كان الطالع في ذلك الوقت معلوماً. فالقوس من ط-٦
دائرة البروج التي بين الأفق وبين دائرة نصف النهار في ذلك الوقت معلومة، وقد انقسمت بموضع الشمس على نسبة معلومة. فتكون قوس الارتفاع في ذلك الوقت معلومة، لأن ذلك قد تبين بالشكل الملقب بالقطاع. فارتفاع الشمس في الوقت الذي بينها وبين دائرة نصف النهار ساعة واحدة، وهي في رأس السرطان، معلوم.

وكذلك يتبين أن الارتفاع يكون معلوماً إذا كان بين الشمس وبين دائرة نصف النهار ساعتان وأكثر من ذلك، لأن الساعات التي بين الشمس وبين دائرة نصف النهار، إذا كانت معلومة، كانت القوس من دائرة البروج التي بين الشمس وبين دائرة نصف النهار معلومة، لأن تلك الساعات هي مطالعها في الفلك المستقيم. فيكون وسط السماء من دائرة البروج نقطة معلومة، ويكون الطالع أيضاً معلوماً، ويكون الارتفاع كما تبين معلوماً.

وكذلك إذا فرضت الشمس في رأس الجدي / أو في أي نقطة فرضت ط-٧
من دائرة البروج، كانت ارتفاعات الساعات معلومة، لأن ميول النقط المعلومة من دائرة البروج معلومة، ومطالعها معلومة، ومنهما يتبين مقدار

5 معلومة: معلوم [ب، ط] – 6 إذن: اعني [ط] – 19 يتبين: تبين [ط] – 22 نصف: ناقصة [ب] – 24 كما تبين: أثبتها في الهامش [ط] – 27 يتبين: تبين [ب].

الارتفاع. فبهذا الطريق كان يستخرج جميع الارتفاعات في الأوقات التي يطلب أطراف أظلالها. وأما السموت، فإنه لما كان الطالع من دائرة البروج في الساعة المفروضة قد تبين أنه نقطة معلومة، يكون سعة مشرقه معلومة، وهي القوس من الأفق التي فيما بين تلك النقطة وبين دائرة نصف النهار؛ فإذا أسقطت تلك القوس من ربع دائرة، كان الباقي هو القوس من الأفق التي / بين تلك النقطة وبين دائرة نصف النهار من جهة الشمال أو من جهة الجنوب. ب-١٥٦-ظ ولأن القوس من الدائرة السمتية، التي بين سمت الرأس وبين الأفق ربع دائرة، وقد انقسمت بموضع الشمس على نسبة معلومة، والقوس أيضًا من دائرة البروج التي قدمناها معلومة ومقسومة بموضع الشمس على نسبة معلومة، كما بينا، تكون القوس من الأفق التي بين دائرة البروج وبين دائرة نصف النهار – التي بينا أنها معلومة – تنقسم بالدائرة السمتية على نسبة معلومة، لأن ذلك أيضًا يتبين بالشكل القطاع. فتصير القوس التي بين الدائرة السمتية وبين دائرة نصف النهار معلومة. وهذه القوس هي التي تسمى السمت، والخط الذي يخرج من مركز الأفق إلى طرف هذه القوس هو الذي يسمى خط السمت. فبهذا الطريق أيضًا كان يعلم جميع السموت في الساعات المفروضة.

وكانوا إذا علموا السموت وقسي الارتفاع أداروا على مركز قاعدة الشخص دائرة / وقسموها بثلاثمائة وستين جزءًا، وأخذوا من لدن خط ط-٨ نصف النهار من الجهة التي فيها الدائرة السمتية، في الوقت الذي فرضوا فيه الشمس في رأس السرطان وبعدها من <دائرة> نصف النهار ساعة واحدة، مقدار قوس السمت في ذلك الوقت، وهو الذي وجدوه بالبرهان والحساب. ثم وصلوا بين مركز قاعدة الشخص وبين طرف تلك القوس بخط مستقيم، فيكون ذلك الخط هو خط السمت في سطح الرخامة في ذلك الوقت، وهو الذي عليه يقع ظل الشخص في ذلك الوقت، لأنه في سطح الدائرة السمتية، والشمس والشخص أيضًا في سطح الدائرة السمتية، ثم فصلوا منه من لدن مركز قاعدة الشخص خطًا تكون نسبته إلى الشخص كنسبة جيب الارتفاع إلى تمام سهمه؛ وعمل ذلك يتبين من بعد، فتحصل لهم من هذا العمل نقطة

2 الطالع: كتبها فوق السطر [ط] المطالع [ب] – 3 معلومة (الأولى): معلوما [ب، ط] – 4 وهي: وهو [ب، ط] / نصف: معدل [ب، ط] – 12 يتبين: تبين [ب] – 25 من لدن: أثبتها في الهامش [ب] – 27 من (الأولى): أثبتها تحت السطر [ب].

/ على سطح الرخامة هي طرف الظل الذي يحد الساعة الخامسة، لأنهم ب-١٥٧-و فرضوا بين الشمس وبين دائرة نصف النهار ساعة واحدة. ثم أخذوا أيضًا من لدن خط نصف النهار قوس السمت للساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس الجدي، ووصلوا خط السمت، واستخرجوا الخط الذي نسبته إلى الشخص كنسبة جيب ارتفاع ذلك الوقت إلى تمام سهمه، فحصل لهم نقطة أخرى على سطح الرخامة تحد أيضًا الساعة الخامسة.

وقد كنا قدمنا أنهم كانوا اعتقدوا أن النقط التي تحدّ الساعات النظائر على خط واحد مستقيم بالقياس إلى الحسّ، وأنهم إنما كانوا يطلبون نهايتي ذلك الخط، وهاتان النقطتان هما نهايتا الخط الذي يحد الساعات الخوامس، فيصلون بينهما بخط مستقيم، ويجعلونه / علمًا للساعات الخوامس، ط-٩ وكذلك يفعلون في كل واحدة من الساعات البواقي، فتحصل لهم بذلك خطوط مستقيمة تدل على الساعات الاثني عشر.

فهذا هو اقتصاص الطريق الذي به استخرج خطوط الساعات في سطوح الرخامات؛ وقد تبين منه أنه يحتاج في عمل الرخامات إلى معرفة الميول، وسعة المشرق، وقوس الارتفاع وقوس السمت وخط السمت. فهذه الأشياء قد يمكن استخراجها بالحساب، ويمكن أيضًا بطريق الآلة. وقد ذكره كثير من أصحاب علم الأظلال في كتبهم وأرشدوا إليه.

ولأن الكلام فيه مَقوَّل مكرّر في الكتب استغنينا عن إعادته في هذا المكان.

فلنلخّص الآن الطريق في عمل الرخامات، ونرتبه ليسهل على من أراد العمل به سلوكه. فأول ما ينبغي أن يبتدأ به عامل الرخامة هو أن يستخرج قسي الارتفاع لساعة ساعة من ساعات النهار، والشمس في رأس السرطان، بطريق الحساب للأفق الذي يريد أن يعمل عليه الرخامة كما تبين / ذلك في الزيجات؛ ويستخرج ذلك أيضًا لكون الشمس في رأس الجدي، ب-١٥٧-ظ ويستخرج مع ذلك بطريق الحساب أيضًا قسي السموت لهذه الساعات، ويستخرج الارتفاع والسموت لساعة ساعة عند فرض الشمس في رؤوس جميع البروج. ثم يتخذ لتسهيل العمل بذلك جدولاً يقسم طوله بسبعة

13 استخرج: استخراج [ط] – 16 كثير: أثبتها في الهامش [ب] – 17 في كتبهم وأرشدوا إليه: وأرشدوا إليه في كتبهم [ط] – 18 مقوّل: منقول [ط] – 20 ونرتبه: فنرتبه [ب] – 21 يبتدأ: يبتدى [ب، ط] – 23 يريد: اريد [ب] – 24 لكون: يعني «عند كون»، وهو الأفصح – 25 الساعات: أثبتها في الهامش [ب] – 27 طوله: طواله [ط].

أقسـام، ويثبت في القسم الأول رأس السـرطان وفي الثاني رأس الجوزاء والأسد، وفي الثالث رأس الثور والسنبلة، وفي الرابع رأس الحمل والميزان، وفي الخامس رأس الحوت والعقرب، وفي السادس رأس الدلو والقوس، وفي السابع رأس الجدي. ويقسم عرض الجدول بستة / أقسام، ويثبت فيها ط-١٠ الساعات على الولاء من الساعة الأولى إلى الساعة السادسة التي هي انتصاف النهار. ثم يقسم كل قسم من أقسام العرض – سوى القسم السادس – بقسمين، ويثبت على أحدهما الارتفاع وعلى الآخر السمت وعلى القسم الذي للساعة السادسة الارتفاع فقط، لأنه ليس لارتفاع الساعة السادسة قوس سمت، وذلك أنها انتصاف النهار. ثم يثبت في حشو هذا الجدول جميع الارتفاعات والسموت التي كان استخرجها بالحساب، كل واحد منها في موضعه. فيثبت محاذي رأس السرطان وتحت الساعة الأولى وفي القسم الذي عليه الارتفاع أجزاء قوس الارتفاع التي كان استخرجها للساعة الأولى، والشمس في رأس السرطان. والساعة الأولى هي الساعة التي بعدها من دائرة نصف النهار خمس ساعات. ويثبت أيضًا تحت الساعة الأولى وفي القسم الذي عليه السمت أجزاء قوس السمت التي كان استخرجها للساعة الأولى. ويثبت تحت الساعة الثانية الارتفاع والسمت اللذين كان استخرجهما أيضًا لها؛ وكذلك تحت الساعة الثالثة والرابعة والخامسة. ويثبت تحت الساعة السادسة ارتفاع نصف النهار، ويفعل مثل ذلك لكل واحد من البروج. وهذه صورة الجدول الذي ينبغي أن يتخذ لعمل الرخامات، / وهو على طريق المثال. / ب-١٥٨-و

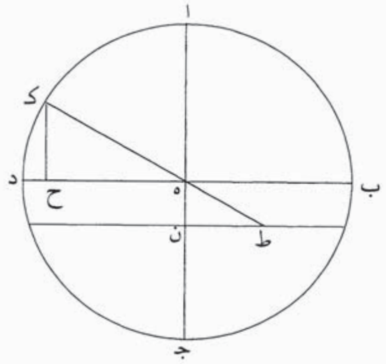
البروج	الساعة الأولى		الساعة الثانية		الساعة الثالثة		الساعة الرابعة		الساعة الخامسة		الساعة السادسة	
	الارتفاع	السمت	الارتفاع	السمت	الارتفاع	السمت	الارتفاع	السمت	الارتفاع	السمت	الارتفاع	
رأس السرطان												
الجوزاء والأسد												
الثور والسنبلة												
الحمل والميزان												
الحوت والعقرب												
الدلو والقوس												
رأس الجدي												

6 يقسم: نقسم [ط] – 9 السادسة: أثبتها في الهامش [ب] – 16-17 للساعة ... استخرجهما: أثبتها في الهامش [ب] – 17 لها: لهما [ب، ط] – 19 وهذه: وهذا [ب].

[ط-١١] ثم ندير دائرة على صفيحة نحاس أو جسم صلب، ونخرج فيها قطرين يتقاطعان على زوايا قائمة ونقسم الدائرة بثلاثمائة وستين جزءاً، ونفصل من لدن مركز الدائرة ومن أحد القطرين المتقاطعين خطاً مساوياً لمقدار طول الشخص الذي نريد أن نقيمه في سطح الرخامة، ونخرج من موضع الفصل خطاً موازياً للقطر الآخر، ونسمي هذه الدائرة دستوراً. فإذا فرغ من جميع ذلك، حينئذٍ نبتدئ فنوطئ سطحاً موازياً لأفقه أو لأفق معلوم من الآفاق، ونعدله بغايةٍ ما يمكن. ثم نستخرج فيه خط نصف النهار، كما جرت العادة، وهو أن نأخذ في يوم واحد ظلين متساويين لشخص واحد، أحدهما شرقي والآخر غربي، / [ط-١٢] ونقسم الزاوية التي يحيطان بها بنصفين بخط مستقيم، فذلك الخط هو خط نصف النهار، كما تبين برهان ذلك في موضعه من كتب أصحاب التعاليم. ثم نفرض على خط نصف النهار / [ب-١٥٨-ظ] نقطة وندير في ذلك السطح دائرة مساوية لدائرة الدستور، ثم نرجع إلى الجدول، فنعرف أجزاء قوس السمت في الساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس السرطان، ثم نأخذ من دائرة الدستور أجزاء مثل تلك الأجزاء ونقدرها بفتحة الفرجار، ثم نفصل بذلك الفرجار بتلك الفتحة من الدائرة التي نرسمها في الرخامة من لدن خط نصف النهار قوساً؛ فتكون مساوية لقوس السمت التي وجدناها في الجدول. ونصل بين مركز الدائرة وبين طرف القوس بخط مستقيم، فيكون هذا الخط هو خط السمت في الساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس السرطان، وعليه يقع ظل الشخص في ذلك الوقت. ثم نرجع إلى الجدول أيضاً فنعرف قوس الارتفاع في الساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس السرطان، فنفصل من محيط دائرة الدستور من لدن القطر الذي لم نفصله قوساً مقدارها تلك الأجزاء التي هي الارتفاع في ذلك الوقت. ثم نصل بين طرف تلك القوس وبين مركز الدائرة بخط مستقيم، ونخرجه على استقامة إلى أن يلقى الخط الذي خرج من موضع الفصل موازياً للقطر، فتكون نسبة طول الشخص إلى الخط الذي انفصل من الخط الموازي للقطر كنسبة جيب الارتفاع إلى تمام سهمه.

6 حينئذٍ: حـ [ب، ط] – 8 وهو: فهو [ب] – 11 أصحاب: ناقصة [ط] – 14 الفرجار: البركار [ب] – 16 وجدناها: وحدها [ب].

وبرهان ذلك: أنا نفرض على دائرة الدستور حروف ا ب جـ د وعلى مركزها ه، وعلى النقطة التي تحد طول الشخص / ن، وعلى النقطة التي ط-١٣ انفصل بها الخط الموازي للقطر ط، وعلى طرف القوس المساوية لقوس الارتفاع من الدائرة السمتية علامة كـ، ومن كـ عمود كـ ح؛ فيكون كـ ح جيب الارتفاع وح ه تمام السهم؛ ونسبة كـ ح إلى ح ه كنسبة ه ن إلى ن ط، لأن المثلثين متشابهان، وه ن / هو طول الشخص، ون ط هو طول الظل، لأن ب-١٥٩-و نقطة كـ بمنزلة موضع الشمس وخط كـ ه ط بمنزلة الشعاع وخط ه ن بمنزلة الشخص، فخط ن ط هو الظل.



فإذا استخرج هذا الخط، قدره بالفرجار، ففصل من خط السمت الذي في الرخامة من لدن مركز الدائرة التي رسمها في سطح الرخامة بساقي الفرجار خطًا مثل الخط الذي استخرجه؛ فذلك الخط هو طول الظل في ذلك الوقت. فيحصل له في سطح الرخامة نقطة هي نهاية الخط الذي يحدّ الساعات الخوامس، لأن هذا الظل هو ظل إحدى نهايتي ميل الشمس، وليس تتجاوز الشمس ذلك الميل. وذلك الخط هو أقصر ظل الساعات الخوامس، لأن الشمس في ذلك الوقت هي أقرب ما تكون من سمت الرأس، والظل إنما يقصر إذا قربت الشمس من سمت الرأس. ثم يأخذ أيضًا من محيط الدائرة التي في الدستور قوسًا مساوية لقوس السمت في الساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس الجدي، ويقدرها بالفرجار ويفصل مثلها من الدائرة التي / في الرخامة من لدن خط نصف النهار؛ ط-١٤

2 ن: ر، ولن نشير إليها فيما بعد [ب، ط] – 4 كـ (الثانية): حـ [ب، ط] – 7 ه ن: ه و [ط] – 8 ن ط: ر كـ [ط] – 9 بالفرجار: بالبركار [ب] – 11 الفرجار: البركار [ب] – 13 هو ظل: ناقصة [ط] / إحدى: احد [ب، ط] – 18 بالفرجار: بالبركار [ب].

ويخرج إلى طرفها من المركز خطًا مستقيمًا. فيكون ذلك الخط هو خط السمت في ذلك الوقت، ثم يرجع إلى الدستور فيفصل منه قوسًا مثل أجزاء قوس الارتفاع في ذلك الوقت التي هي في الجدول. ويصل بين طرفه والمركز، فيجد الخط الذي هو طول الظل، فيفصل مثله من خط السمت فيحصل له النقطة الأخيرة من الخط الذي يقع عليه الظل في الساعات الخوامس. فحينئذ يصل بين النقطتين بخط مستقيم، فيكون ذلك الخط هو الخط الذي يحدّ الساعات الخوامس. ثم يفعل مثل ذلك بالساعات الباقية حتى يستخرج الخط الذي يحد الساعات الروابع والثوالث والثواني والأوائل، / فيصير له في ب-١٥٩-ظ إحدى جنبتي الرخامة خمسة خطوط تدل على خمس ساعات وخط نصف النهار يدل على الساعات السوادس.

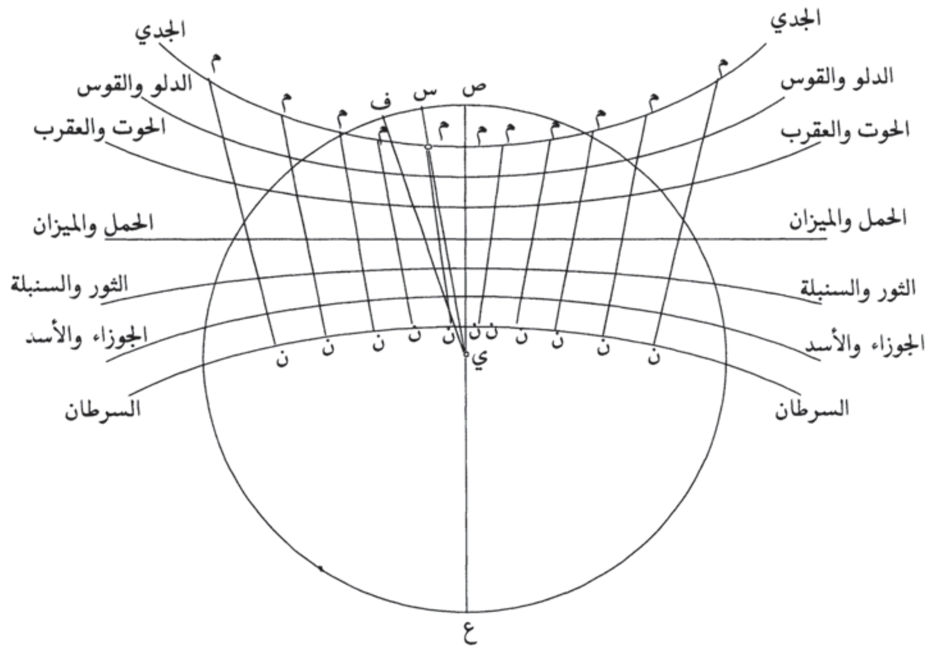
ثم يأخذ أيضًا من دائرة الدستور مثل أجزاء ارتفاع نصف نهار رأس السرطان الذي في الجدول، ويوصل بين طرفه ومركز دائرة الدستور. فيستخرج ظل نصف النهار لرأس السرطان ويفصل مثله من خط نصف النهار الذي في الرخامة من لدن مركز الدائرة.

ويستخرج أيضًا كذلك ظل نصف النهار لرأس الجدي. ويفصل مثله من خط نصف النهار، فيحصل له بذلك الخط الذي يحد نهايتي أظلال أنصاف النهار في تلك الرخامة.

ثم يفصل، من الجهة الأخرى من الرخامة، من الدائرة التي في سطح الرخامة قسيًا مساوية لقسي السموت التي في الجهة الأولى، ويصل بين أطرافها وبين مركز الدائرة بخطوط مستقيمة، فتكون تلك الساعات البواقي، لأن بعد كل / ساعة من الساعات الغربية من دائرة نصف النهار مثل بعد ط-١٥ نظيرتها من الساعات الشرقية. فيكون السمت في الساعة الشرقية مساويًا للسمت في الساعة الغربية النظيرة لها. وكذلك يلزم أن يكون الارتفاعان متساويين ويكون الظلان متساويي الطول. فيفصل من خطوط السمت في الجهة الثانية مثل أطوال الأظلال التي في الجهة الأولى. ويصل أيضًا بين طرفي كل ظلين يحدان نهايتي الساعات النظائر بخط مستقيم. فتكون تلك الخطوط أيضًا هي الخطوط التي تحد الساعات النظائر. فيتم له بهذا العمل في سطح الرخامة أحد عشر خطًا تحد جميع الساعات.

9 إحدى: احد - [ب، ط] - 15 ويفصل: كتبها [ب] «ويفعل»، ثم أثبت الصحيح في الهامش مع الإشارة - 16 له: ناقصة [ب] - 19 مساوية: متساوية [ب] - 20 البواقي: ناقصة [ط] - 21 بعد (الأولى): يعد [ب] - 25 أيضًا: ناقصة [ط] - 27 التي: أثبتها في الهامش [ب].

وليكن المثال في ذلك دائرة ص ف ع، ولتكن الدائرة التي ترسم في سطح الرخامة ومركزها ي، ولتكن الخطوط التي فيها هي الخطوط التي على أطرافها م وعلى الأطراف الأخر ن وخط نصف النهار / ص ع. ولتكن قوس ب-١٦٠-و السمت للساعة الخامسة، والشمس في رأس السرطان، ص ف؛ وخط السمت الذي يقع عليه الظل ي ف، وطول الظل الذي استخرج من الدستور ي ن، وقوس السمت للساعة الخامسة أيضًا والشمس في رأس الجدي ص س، وخط السمت الذي يقع عليه الظل ي س، وطول الظل الذي استخرج من الدستور ثانيًا ي ن. فالنقطتان اللتان تحدان نهايتي الساعات الخوامس ن م، فخط م ن هو الذي يقع عليه الظل في الساعات الخوامس على التقريب في سائر الأيام. وكذلك باقي الخطوط: كل خط منها لساعة من الساعات على الولاء. ثم نصل بين أطراف خطوط الساعات التي عليها م بخطوط مستقيمة وكذلك بين أطراف الخطوط التي عليها / ن. فطرف الظل في اليوم الواحد يمر ط-١٦ بجميع النقط التي عليها م، وذلك إذا كانت الشمس في رأس الجدي. وطرف الظل يتحرك في ذلك اليوم وفي كل / يوم على محيط قطع مخروط إلا في ط-١٧



6 ي ن: ي ر [ب، ط] / للساعة: الساعة [ب، ط] – 8 ي ن: ي م [ب، ط] – 12 الظل: كتب «كل هو»، ثم أثبت «الظل» في الهامش [ب] – 14 اليوم: الوقت، ثم ضرب عليها بالقلم [ط].

يوم الاعتدال. فنقط مَ كلها على محيط ذلك القطع، إلا أنه لما كان غير ممكن بسهولة أن يرسم في سطح الرخامة محيط قطع مخروط، اقتنع بالخطوط المستقيمة التي تصل بين نقط مَ، فأقيمت بجملتها مقام قطع المخروط، فيسمى جميع الخط الذي عليه نقط مَ مدار الجدي، لأن طرف الظل إذا كانت الشمس في رأس الجدي يتحرك على هذا الخط بالتقريب؛ وكذلك يسمى أيضًا جميع الخط الذي عليه نقط نَ مدار السرطان، لأن ⟨طرف الظل⟩ يتحرك عليه بالتقريب إذا كانت ⟨الشمس⟩ في رأس السرطان. ثم يستخرج أيضًا على خطوط الساعات النقط التي يمر بها طرف الظل عند كون الشمس في رؤوس البروج الباقية، وذلك بأن يرجع إلى الجداول، فيعرف السمت للساعة الخامسة عند كون الشمس في رأس الأسد. فيأخذ من محيط الدائرة من لدن خط نصف النهار / مثل تلك القوس، ويضع ب-١٦٠-ظ المسطرة على مركز الدائرة التي في الرخامة وعلى طرف تلك القوس، فحيث قطعت المسطرة خط الساعة الخامسة، يعلم عليه نقطة، ثم يعرف السمت أيضًا من الجداول للساعة الرابعة، والشمس في رأس الأسد، ويأخذ من الدائرة مثل هذا السمت أيضًا، ويضع المسطرة على طرفه وعلى المركز، فحيث قطعت خط الساعة الرابعة، يعلم عليه نقطة. وكذلك يفعل بالساعة الثالثة وبجميع الساعات الباقية. فيحصل له بهذا العمل نقط على خطوط الساعات يمر طرفا الظل بجميعها يوم كون الشمس في رأس الأسد ورأس الجوزاء. فيوصل بينها بخطوط مستقيمة، ويسمى ذلك مدار الجوزاء والأسد. ويفعل مثل ذلك بكل واحد من البروج، فيحصل له في سطح الرخامة وعلى خطوط الساعات سبعة مدارات هي مدارات / رؤوس البروج على مثل ما في ط-١٨ الصورة.

فأما مدار الحمل والميزان، فإنه خط مستقيم، وذلك أن الشمس في ذلك اليوم تكون في معدل النهار، ورأس الشخص هو مركز ⟨دائرة⟩ معدل النهار، وكل الشعاعات التي تخرج في ذلك اليوم إلى رأس الشخص هي أقطار ⟨دائرة⟩ معدل النهار، فهي كلها في سطح ⟨دائرة⟩ معدل النهار، وهي تقع كلها على سطح الرخامة وتنتهي إلى أطراف الظل، فأطراف الظل كلها في ذلك اليوم في سطح ⟨دائرة⟩ معدل النهار وهي في سطح الرخامة؛ فهي

6 لأن ⟨طرف الظل⟩: لأن الشمس [ب، ط] – 7 بالتقريب: أثبتها في الهامش [ط] – 9 الجداول: الجدول [ط] – 21 سبعة: سبع [ب، ط] / مثل ما: مثلها [ط] – 25 الشعاعات: الساعات [ب، ط].

على الفصل المشترك بين ⟨دائرة⟩ معدل النهار وبين سطح الرخامة، فهي على خط مستقيم. وهذا الخط يقطع خط نصف النهار على زوايا قائمة، لأنه عمود على سطح دائرة نصف النهار؛ وذلك أن كل واحد من سطحي ⟨دائرة⟩ معدل النهار والأفق قائم على سطح دائرة نصف النهار، ففصلهما المشترك وهو الخط الذي يقع عليه أطراف الظل عمود على كل خط يقع في دائرة نصف النهار؛ فهو يحيط مع خط نصف النهار بزوايا قائمة. فلذلك يقتنع في استخراج هذا الخط، الذي هو مدار الحمل والميزان، بمعرفة ارتفاع نصف نهار رأس الحمل من الجدول. ويؤخذ من الدستور مثل ذلك ويستخرج طول الظل / على الوجه الذي قدمنا. ويؤخذ مثله من خط نصف النهار الذي في سطح ب-١٦١-و الرخامة من لدن مركز الدائرة. ثم يخرج من طرف ذلك الخط خط على زوايا قائمة إلى أن تقع خطوط جميع الساعات، فيكون ذلك الخط هو مدار الحمل والميزان.

فإذا فرغ من جميع ذلك اتخذ شخصًا صنوبريًا من جسم صلب، لا يسرع إليه الفساد، وجعل طوله بمقدار طول الخط الذي كان فصله من قطر دائرة الدستور وزاد فيه من ناحية طرفه المستدير زيادة يسيرة، ثم أثبته في مركز الدائرة التي في الرخامة مثل شخص $\overline{\text{ف ي}}$،/ واعتمد أن تنطبق ط-١٩ قاعدة الشخص على سطح الدائرة، ومركز قاعدته على مركز الدائرة، وينزل تلك الزيادة في جسم الرخامة، ويكون قائمًا قيامًا معتدلاً ويحكمه إحكامًا جيداً.

فهذا الذي شرحناه هو ما يستعمله أصحاب الأظلال في عمل الرخامات ويقتنعون بها. وقد يمكن بهذا العمل بعينه أن نستخرج خطوطًا تدل على أجزاء الساعات، ونستخرج أيضًا نقطًا على جميع الخطوط تدل على مدارات جميع أجزاء دائرة البروج. وقد يمكن أيضًا أن تزاد في هذه الرخامات خطوط تدلّ على الساعات المستوية وعلى الطالع ووسط السماء وغير ذلك من فنون الأعمال التي يتخذها أصحاب الأظلال. وقد يمكن أيضًا تقسيم عمل الرخامات وشرحه لسطح سطح وأفق أفق ووضع وضع من أوضاع

4 ففصلهما: ففصلها [ط] – 4-6 ففصلهما ... دائرة نصف النهار: أثبتها في الهامش [ب] – 22 الساعات: لساعات [ب] / على (الثانية): على جميع، ثم ضرب على «جميع» بالقلم [ط] – 23 في: ناقصة [ب].

السطوح عند كل واحد من الآفاق. لكن غرضنا في هذا القول ذكر الجمل والأصول التي يعتمد عليها في عمل الرخامات، والإشارة إلى كيفية العمل، ومواضع الحاجة إلى المعاني التي يتكرر ذكرها في كتب أصحاب الأظلال فقط؛ وسنبتدئ من بعدها بكتاب لآلات الأظلال نستوفي فيه جميع المعاني والأغراض والأعمال التي تقتضيه هذه الصناعة؛ والله المعين على ذلك وموفقه، وهو حسبنا ونعم الوكيل.

تم قول أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم في الرخامات الأفقية.
والحمد لله رب العالمين وصلواته على رسوله محمد وآله أجمعين.

5 تقتضيه: يقتضيها [ط] – 6 الوكيل: كتب بعدها «والله أعلم» [ب] – 7-8 تم ... أجمعين: ناقصة [ب].

الفصل الثالث

بركار الدوائر العظام

١ـ مقدّمة

بركار الدوائر العظام هو آلة ريّاضية ابتكرها ابن الهيثم لرسم دوائر ذات نصف قطر متغيِّر؛ ويُمكن لهذه الدوائر أن تكون عظاماً إلى حدٍّ كبير. وتـُلبّي هذه الآلة، وفقاً لما يقول مبتكرُها، حاجة ملموسة لدى الفلكيين والمهندسين. كان من المناسب إذاً أنْ تـُعْرَضَ لهم الأسسُ الهندسية التي يستند إليها هذا الاختراع، وأنْ تـُشْرَحَ لهم كيفية عمل هذه الآلة. وهذا هو، بالتحديد، الهدفُ الذي يتصدَّر بِنية هذا المؤلّف، حيث يقصد ابن الهيثم فيه، وفقاً لتعبيره الخاصّ، أن يُوفـِّق بين العِلم والعمل.

ولكنَّ اهتمام هذا المؤلّف لا يقتصر فقط على ما سبق. فهو، كسائر المؤلّفات الأخرى التي حرَّرها الرياضيّون البارزون، مثل القوهي وابن سهل والسجزي وابن الهيثم نفسه حول الآلات الرياضية، يُوَضِّح لنا المفاهيمَ الهندسية المتداولة في عصره. ولقد بيَّنّا أنَّ الهندسة، ابتداءً من منتصف القرن التاسع، لم تكن تـَقتصِر على دراسة الأشكال، بل كانت ترتبط أكثر فأكثر بتحويلات هذه الأشكال. لم يجتهد ابن الهيثم بنشاط في تطوير هذا الاتجاه الجديد فحسب، بل إنّه تصوَّرَ بالإضافة إلى ذلك فرعاً علميّاً جديداً ليؤسِّس على قواعد صلبةٍ استخدام هذه التحويلات. ولقد سمِّيَ هذا الفرع بـِ "المعلومات"[1]. يُثبت هذا المؤلّف الصغير، لو دعت الحاجة إلى ذلك، وجودَ هذا الاتجاه الذي أخذه البحث الهندسي في ذلك العصر.

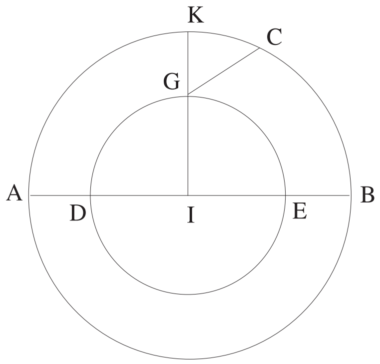
٢ـ الشرح الرياضي

يبدأ ابن الهيثم بإثبات ثلاث قضايا هندسية قبل أن يتناول الآلة نفسها. تشهَد هذه القضايا على الدور الذي أراد ابن الهيثم أنْ تلعبه الحركة في الهندسة. فهو يستخدم بالفعل دوراناً

[1] انظر الفصل الثاني من المجلّد الرابع من هذه الموسوعة.

حول نقطة من المستوي ودوراناً حول محور الفضاء، ويُحَدِّد الكميات الثابتة لهذين الدورانين كما يُحدِّد مسارات النقاط.

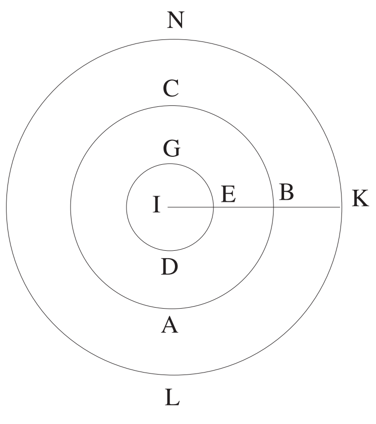
يُبيِّن ابن الهيثم في القضية الأولى أنَّ الانتقال الذي يوصِل BE إلى G هو دوران حول مركز ما. ولكنَّ الأطرافَ E وَ G، من جهة، وَ B وَ C، من جهة أخرى، موجودة حسب الترتيب على دائرتين مركزهما I، فتكون I مركز هذا الدوران.



الشكل ١

يستخدم ابن الهيثم، في الواقع، دوراناً ذا مركز I يُحوِّل E إلى G، ويحوِّل B إلى K وَ BE إلى KG. وينتقل BE إلى CG بواسطة انتقال غير مُعرَّف، فيكون $CG = KG$، وهذا ما يفرض $C = K$.

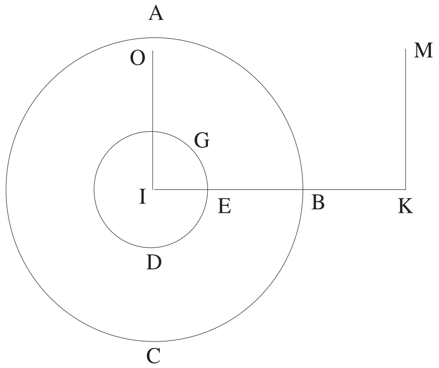
يُبيِّن ابن الهيثم في القضية الثانية ، بواسطة دوران متواصل مركزه I ، أنَّ كلَّ نقطة من المستوي تبقى على مسافة ثابتة من النقطة الثابتة I. فترسم دائرة مركزها I.



الشكل ٢

يتناول ابن الهيثم في القضية الثالثة دوراناً متواصلاً في الفضاء محوره OI. كلَّ نقطة M من الفضاء ترسم دائرة مركزها نقطة، O، على المحور. وذلك، أنّ المستويَ العموديَّ على

المحور والمارّ بالنقطة M ثابتٌ في هذا الدوران (وهذه الميزة مُسلّمٌ بها ضمنيّاً في النصّ)؛ وهكذا تبقى المسافة بين M وَ O ، حيث يلتقي هذا المستوي بالمحور، ثابتةً؛ فترسم M دائرة مركزها O في المستوي المشار إليه.



الشكل ٣

تشهَد هذه القضايا الثلاث على الدور الذي أراد ابن الهيثم أن تقوم به الحركة في الهندسة. وهو يستخدم هنا دوراناً حول نقطة من المستوي كما يستخدِم محوراً في الفضاء، ويُحدِّد ثوابت هذين الدورانيْن ومسارات النقاط.

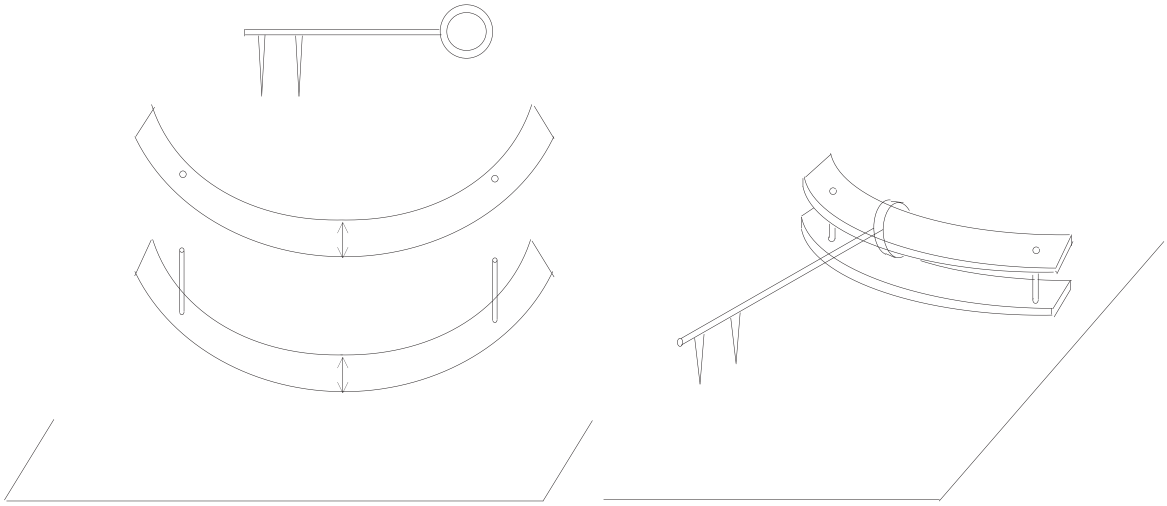
يشرح ابن الهيثم، في القضيَّتين الباقيتين، طريقة صناعة البركار، كما يشرح طريقة استعماله.

يوضِح ابن الهيثم في القضية ٤ أنَّ البركار مُركَّب من أربع قطع:

- حلقة دائرية ذات قطر صغير.
- عمود أسطواني يكون غلظه مساوياً لغلظ الحلقة، ويُثَبَّت في طرفه شخصان صنوبريان تكون المسافة بينهما مساوية لقطر الحلقة.
- صفيحتان متماثلتان على شكل قطعة من حلقة يكون عرضها مساوياً لقطر الحلقة الأولى. يُثَبَّت على طرفيْ إحدى هاتين الصفيحتين شخصان أسطوانيان لهما نفس طول الشخصين الصنوبريين، ويكون طرفا أحد الشخصين قد صُنعا على شكل مسمار؛ بينما يُثقَب طرفا الشخص الآخر بثقبيْن موافقين للمسمارين السابقين.

ويكون العمود الأسطواني ملتحماً بالحلقة وفقاً لاتجاه أحد أقطارها. ونركِّب الآلة بإحكام الحلقةِ على الصفيحة المثقوبة بثقبين بحيث يكون الشخصان موجَّهين نحو الأسفل؛ وهكذا

تكون معنا الصفيحة العليا. ثمّ نضع الصفيحة الثانية (الصفيحة السفلى) على مستوي الرسم، ونـُثبِّت عليها الصفيحة العليا بواسطة المسمارين.



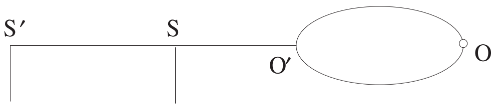
الشكل ٤

عندما تنزلِق الحلقة على طول الصفيحة العليا، يبقى قطرُها باتجاه العمود موجَّهاً دائماً نحو مركز الصفيحة العليا، وفقاً للقضية الأولى. كلُّ نقطة من العمود ترسم دائرة لها نفس المركز في مستوي الصفيحة العليا. ويرسم طرفا الشخصين الصنوبريين دائرتين لهما نفس المركز في مستوي الصفيحة السفلى الذي هو مستوي الرسم، وذلك وفقاً للقضية الثالثة.

يقترح ابن الهيثم، في القضية الخامسة، أن يُصنَعَ زوجٌ من الصفائح الحلقية يُمْكِنه أن يرسم دائرةً ذات نصف قطر مساوٍ لأيِّ ضعف من أضعاف طول العمود. نـَقُصُّ الصفيحةَ الأولى، وذلك بأن نجعل العمودَ يدور حول O، نقطة الحلْقة المقابلة للنقطة O' حيث ثـُبِّتَ العمود؛ ونصفا قطرها (الداخلي والخارجي) هما مسافتا الشخصين الصنوبريين إلى هذه النقطة من الحلقة؛ فليكونا r_1 وَ r_2. وهكذا يُمكننا، إذا صنعنا حلقة أخرى مطابقة لهذه الحلقة الأولى، أن نرسم قوسين جديدتين من دائرتين لهما نصفا القطر$(2r_1)$ وَ (r_2+r_1)، فنحصل على حلقة جديدة تسمح لنا برسم دائرتين أخريين لهما نصفا القطر$(3r_1)$ وَ (r_2+2r_1). ويكون لدينا، بعد عدد n من العمليات، حلقة ذات نصفيْ القطر nr_1 وَ $(n-1)r_1+r_2$. وهكذا نرى أنَّ الأمر يتعلّق بعملية تكرارية تستند إلى مُصادرة أرشميدس؛ وذلك أنَّ قيمتيْ r_1

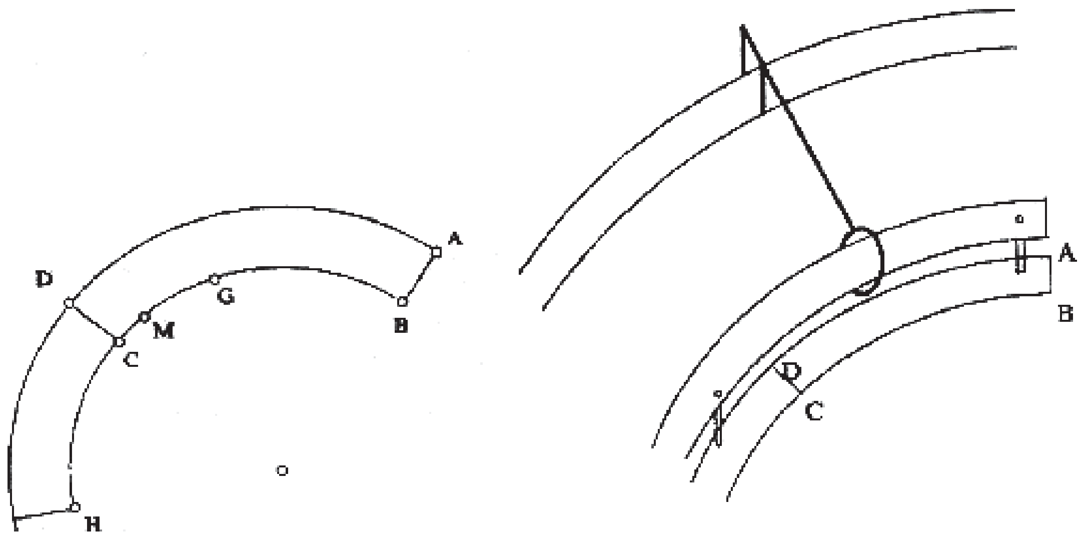
وَ $a + r_1 = r_2$ مُعَيَّنتان مُسبَّقاً (a هو قطر الحلقة الصغيرة) ، كما نعرف أنَّ القيمتين nr_1 وَ $nr_1 + a = (n-1)r_1 + r_2$ يُمكنهما تجاوز أيَّ طول معلومٍ مُسبَّقاً.

$SS' = a = OO'$ ، $OS = r_1 = O'S'$ ، $r_1 + a = r_2 = OS'$.



الشكل ٥

إذا أردنا رسم دائرة كاملة، نُرَكّب الآلة على صفيحة حلقية عُليا مطابِقة للصفيحة الحلقية السفليّة. وبعد أن نرسم قوساً من دائرة في أوَّل وضع للآلة، نُعَلِّم على مستوي الرسم ثلاث نقاط G، M وَ C على المحيط الداخلي BC للصفيحة السُفلى. نُحرِّك الآلة حينئذ بحيث تنطبق النقطة B على النقطة G وبحيث تبقى نقطتا المستوي M وَ C على المحيط الداخلي للصفيحة السُفلى. وهكذا يبقى هذا المحيط الداخلي HG على نفس الدائرة في الموضع الجديد، وتكون القوس الجديدة، من الدائرة التي يسمح برسمها، على امتداد القوس السابقة، لأنّ الصفيحتين الحلقيَّتين مترابطتان. ونعيد هذه العملية حتّى تُصبح الدائرة كاملة.



الشكل ٦

وهذا البناء يستند إلى حقيقة واقعة وهي أنّ ثلاث نقاط (غير واقعة على خطٍّ مستقيم واحد) تُحدِّد دائرة.

٣- تاريخ النصّ

لقد وصل إلينا مؤلَّف ابن الهيثم "في بركار الدوائر العظام" في خمس مخطوطات، نُسخت ثلاث منها في نهاية القرن الثالث عشر وخلال النصف الأوَّل من القرن الرابع عشر. وينتمي ثلاث منها إلى مجموعات تتضمَّن أعمالاً أخرى لابن الهيثم. ولقد وصفنا هذه المجموعات في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة. ونحن هنا نكتفي بذكرها. هذه المخطوطات هي:

[A]مخطوطة عليكرة ٦٧٨ (*Aligarh*)، وهي منسوخة في الخامس من جمادى الأولى سنة ٧٢١ للهجرة، أي في الثاني من حزيران/يونيو [٢] ١٣٢١. أوراق المؤلّف غير مرتبَّة : ٢٨و، ٨و-٨ظ-٩و. ويُظهر تفحُّص المخطوطة أنَّ هناك سبعَ كلمات وكذلك سبعَ جمل ناقصة؛ كما أنَّ السطور ٩-١٣ مُختصَرة فيها.

[B]مخطوطة المكتب الهندي ٧٣٤، (*India Office*)، الأوراق ١١٦ظ-١١٨و[٣]. ونحن نجهل تاريخ نسخها، وقد يكون ذلك في القرن العاشر للهجرة. لا تتضمَّن هذه المخطوطة نواقصَ خاصَّة بها، ولكنّها تتضمَّن أخطاء نسخيَّة عديدة.

[R]مخطوطة رامبور ٣٦٦٦ ، الأوراق ٤٣٦-٤٤٢. لقد فُقِدت صفحة في هذه المخطوطة بين الصفحة ذات الرقم ٤٣٦ والصفحة ذات الرقم ٤٣٧. ربَّما فُقدت هذه الصفحة في أثناء التجليد. نُسخت هذه المخطوطة في التاسع من ربيع الأوَّل سنة ١٢٨١ للهجرة، أي في ١٢ آب/أغسطس ١٨٦٤، في الهند. ليس في هذه المخطوطة نواقصُ خاصَّة بها، ولكنّها تتضمَّن أخطاء نسخية كثيرة.

[L] مخطوطة سان بطرسبرغ *B* ١٠٣٠. ولقد أشرنا[٤] إلى أنّ هذه المجموعةَ، من كتابات ابن الهيثم، قيِّمة بوجه خاصّ، وذلك ليس بسبب المؤلّفات الموجودة فيها فحسب، بل لأنّها

---

[٢] انظر ص. ٦٢-٦٣ من المجلّد الثاني من هذه الموسوعة.
[٣] المرجع السابق ص. ٦٧ ـ ٦٨.
[٤] المرجع السابق ص. ٦٥ ـ ٦٦

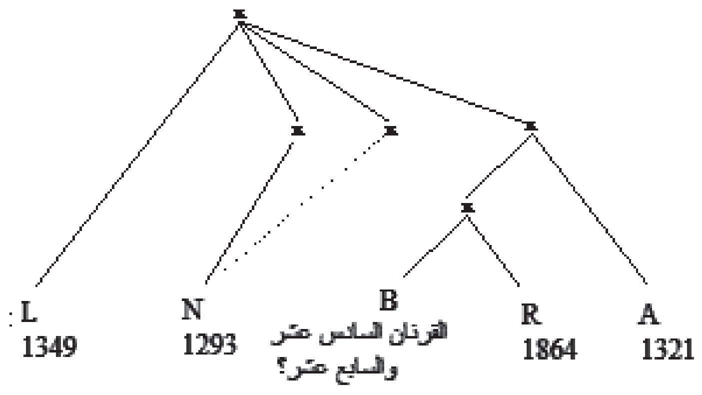
أيضاً قد قورِنت بالنسخة الأصلية سنة ٧٥٠ للهجرة، أي سنة ١٣٤٩ للميلاد. يوجد النصّ على الأوراق ١٢٥ظـ-١٣١و. تنقصُ في هذا النصّ جملتان إحداهما من كلمتين والأخرى من سبع كلمات.

[N]مخطوطة لايدن (Leiden)، ٦/١٣٣ ، نسُخت سنة ٦٩٢ للهجرة، أيْ سنة ١٢٩٣ ميلادية. كانت لدى الناسخ، بالإضافة إلى المخطوطة التي كان ينسخها، مخطوطة أخرى كان قد اطّلع عليها وذكر منها أربع مقالات. ينقص من هذه المخطوطة سبع كلمات وأربع عبارات من كلمتين أو أكثر.

إنَّ دراسة النواقص والزيادات والحوادث الأخرى التي طرأت على هذه المخطوطات خلال نسخها، تَسمح، إذا أخذت هذه الحوادث ثنائيّاً، بفَصْل هذه المخطوطات إلى ثلاث مجموعات. المجموعة الأولى تقتصر على مخطوطة وحيدة هي [L]؛ والمجموعة الثانية لا تتضمَّن، هي أيضاً، إلا مخطوطة وحيدة هي [N]؛ أمّا المجموعة الثالثة فهي تتضمَّن المخطوطات [A] وَ [B] وَ [R].

نلاحظ، من جهة أخرى، أنّ [L] وَ [N] تنتميان إلى تقليد مخطوطي لا يتضمَّن الفقرة الأولى التي يتوجَّه فيها الكاتب إلى أحد الأمراء. ولكنَّ لهذه الفقرة بعض الأهمية، على الأقلّ من الناحية الاجتماعية، وكانت تثير رغبة النسّاخين. وهي موجودة في المخطوطات الثلاث الأخرى، ومنها [A] التي نُسخت في نفس الفترة الزمنية التي نُسخت فيها [L] وَ [N]. هل يجب أن نرى في هذا الوضع كتابتين مختلفتين للنصّ من قِبَل ابن الهيثم نفسه، أم أثرَ حادث نصّي أدَّى إلى حذف هذه الفقرة، أم زيادةً لهذه الفقرة من قِبَل نسّاخ في يوم من الأيام؟ ليس هناك أيّة وسيلة، في الوضع الحالي لمعرفتنا بهذه المسألة، لنقيم الحجَّة لصالح أحد هذه الحلول. كلُّ ما نعرفه هو أنّ ابن الهيثم كان يتوجَّه غالباً إلى زملائه ولم يكن من عادته إهداء مؤلّفاته إلى الأمراء. وأخيراً إنّ جهلنا بهويّة هذا الأمير يمنعنا من التحقّق من احتمال هذا الأمر. وهكذا نكتفي بالقول بأنَّ لدينا تقليديْن نصّيَّين لهذا المؤلّف.

إنَّ المقارنة بين هذه المخطوطات تسمح لنا باقتراح الشجرة التالية لتسلسل المخطوطات استناداً إلى كلّ التغيُّرات التي أوردناها في التعليقات والحواشي.



٤ ـ نصّ كتاب ابن الهيثم
"في بركار الدوائر العظام"

ا-٢٩-و
ب-١١٦-ظ
ل-١٢٥-ظ
ر-٤٣٦
ن-١٠٦

إن أحد الحيل الهندسية، التي سنحت لخادم مولانا الوزير الأمير الأجل أدام الله سلطانه، استخراج آلة صغيرة المقدار تجري مجرى البركار، وترسم مع صغرتها دوائر في غاية العظم تكون أقطارها أضعافًا مضاعفة لمقدار ساحتها. وأنا مقدم وصف منفعتها ثم كيفية صنعتها.

كل نوع من أنواع الحيل، وإن كانت له فضيلة رتبته من العلم، وساوى بهذه الفضيلة غيره من الأنواع، فليس يساويها في مقدار المنفعة، بل قد يقع الانتفاع ببعضها أكثر من بعض. ولعلم الهيئة والوقوف على حقائق حركات الكواكب وصور أفلاكها وكيفية أشكال الأجرام العلوية أعلى منازل الشرف، والانتفاع بما يتوصل به إلى استدراك ذلك من الآلات ليس بصغير القدر. ومما يمسّ الحاجة إليه في آلات الإرصاد استخراج دوائر عظام أو قسي من دوائر عظام مما يمكن وجوده لينتهي في قسمتها إلى أصغر الأجزاء. وقد يصعب، بل يتعذر استخراج الدوائر إذا تناهت في العظم، لأن البعد / الذي بين ا-٢٩-ظ المركز والمحيط يجب أن يكون محفوظًا لا يتغير، وذلك يتحرى بالآلة التي تُرسم بها الدائرة إذا كان البعد الذي بين طرفيها لا يتغير، فإذا بلغ مقدار الدائرة التي / يحتاج إليها إلى حدّ في الغاية من البعد، ربما تعذر وجود آلة ل-١٢٦-و

1 الرحيم: كتب بعدها «العزة لله» [ب، ر] – 2-3 قول ... العظام: رسالة للشيخ الفاضل أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم في عمل دوائر عظام بآلة صغيرة [ا] قال الشيخ أبو علي بن الهيثم قدّس الله نفسه [ن] ناقصة [ب، ر] – 4-7 إن أحد ... صنعتها: ناقصة [ل، ن] – 4 أحد: أجل [ا، ر] / سنحت: نسخ [ب]، ناقصة وترك فراغًا لها [ا] / الأمير: الأمين [ا] – 5 استخراج: استخرجها [ب، ر] / وترسم: نرسم [ب، ر] – 6 صغرتها: صغيرها [ا] صغرها [ب، ر] / مضاعفة: مضاعة [ب] – 7 ساحتها: مساحتها [ب] / مقدم: نقدم [ر] / منفعتها: ومنفعتها [ر] – 8 رتبته: ورتبه [ا] – 10 ببعضها: بعضها [ب] / حقائق: ناقصة [ن] – 11 وصور: وصورة [ا، ب، ل] وصورت [ر] / وكيفية: وكيفيت [ر] – 12 استدراك ذلك: استدراك، وكتب في الهامش «ادراك» مع «خـ» فوقها [ن] / ذلك: ناقصة [ن] – 13 آلات: الآلات [ر] / قسي: قسيًا [ا، ب، ر] – 14 عظام: أعظم [ا، ب، ل] / مما: ما [ا، ب، ر، ل، ن] / قسمتها: قسمته [ا] – 16 يتحرى: محتاج [ر] – 17 فإذا: واذا [ن] – 18 الغاية من: غاية [ا، ب، ر، ل] / تعذر: يتعذر [ن].

يكون قدرها ذلك / القدر، بل الآلات إنما يمكن أن تتخذ إلى حد ما لا إلى ر- صفحة ناقصة كل بعد ونهاية. ولو كان ذلك أيضًا ممكنًا لما كان ينتفع بها، لأنها كانت تحتاج إلى مسافة بقدر ذلك البعد لا يتخللها شيء من الموانع لتدور فيها تلك الآلة، وإن كان الذي نحتاج إليه قوسًا في غاية الصغر. وإذا اجتمعت مسافة في غاية البعد على هذه الصفة وآلة في نهاية الطول، وإن كان هذان كالشيء الممتنع لم تكن الحركة على غاية التحقيق، لأن الآلة إذا عظمت لم يكن بد من اضطراب يتخللها عند تحريكها. وربما احتيج إلى رسم قوس من دائرة عظيمة في سطح ليس بالفسيح، فلا يمكن رسمه بتلك الآلة.

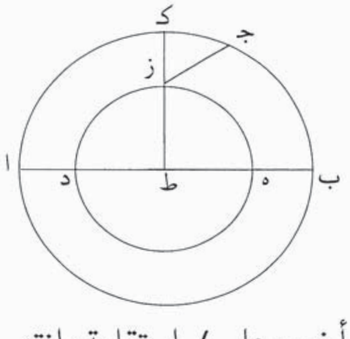
وليس تعرض الحاجة إلى هذه الدوائر في آلات الإرصاد فقط، بل في غير ذلك أيضًا من الأغراض التي لا غناء عنها، كهندسة الأعمال من الأبنية وما يجري مجراها من الصناعات العملية، وكالمرايا الكرية وأمثالها من الآلات الحيلية، إذا كانت مفروضاتها من دوائر عظام. فلذلك وجب أن نعمل الحيلة في استخراج آلة نرسم بها دوائر وقسيًا من دوائر تكون أقطارها أيّ مقدار/ شئنا، وعلى غاية الصحة والحقيقة، وبأيسر طريق وأسهله. فليس موقع هذه ل-١٢٦-ظ الآلة مع قرب تناولها بيسير فيما قدمنا ذكره من الأعمال. وقد يعرف ذلك أصحاب الإرصاد ومن أنعم النظر في علم الحيل وهندسة الأعمال.

فلنبتدئ بالبرهان على صحة ما نرومه، ثم نتبعه بكيفية <عمل> آلة نرسم بها أي دائرة شئنا على الصفة التي قدمناها.

ن-١٠٧ الأول: كل دائرتين متوازيتين يخرج من مركزهما خطّ إلى المحيط، / ثمّ يفصل منه الجزء الذي بين الدائرتين المتوازيتين ويحرك، فتتحرك نقطتا طرفيهما على محيطي الدائرتين، فإنه أبداً إذا أخرج على استقامة، ينتهي إلى المركز.

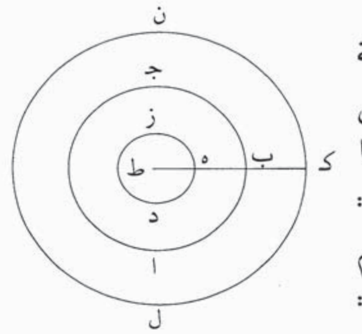
3 الموانع: المواضع [ن] – 5 نهاية: غاية [ا، ب، ل] – 6 غاية: نهاية [ا، ب، ل] – 9 وليس: وليس انما [ا، ب، ل] / آلات: الالات [ب] – 10 أيضًا: ناقصة [ل، ن] – 11 الكرية: الاكرية [ن] – 11-12 الآلات الحيلية : آلات الحيل [ا، ب، ل] – 12 كانت: كان [ا] / عظام: عظيمة [ا، ب، ل] – 13 دوائر وقسيًا: دائرة أو قوسًا [ل] دائرة أو قوس [ا، ب] / دوائر: دائرة [ا، ب، ل] / تكون: ويكون [ا] / أقطارها: قطرها [ا، ب، ل] – 14 وبأيسر: وايسر [ا] / موقع: موضع [ب، ل] – 15 تناولها: متناولها [ا، ب، ل] / بيسير: يسير [ب] / وقد: قد [ل] / ذلك: هذا [ا] – 17 نرومه: نقوله [ن] – 19 الأول: نجدها في مخطوطة [ن] فقط – 20 الجزء: القطعة [ا] / الذي: التي [ا، ب] / ويحرك: وتحرك [ب] – 21 طرفيهما: طرفاها [ا] طرفيه [ن] / إذا: ناقصة [ا] / أخرج: خرج [ل] حرك [ن].

مثاله: دائرتا ا ب جـ د ه ز ومركزهما جميعًا نقطة ط، وقد خرج منها خط ط ه ب، وفصل منه ه ب، وحرك حتى صار مثل جـ ز؛ فأقول: إن جـ ز إذا أخرج على استقامة، ينتهي إلى / نقطة ط. ا-٨-و



برهانه: إن لم ينتــه إلى نقطة ط، فإنا نصل ط ز وننفذه على استقامة إلى ك، فيكون خط ط ك / قطراً وعليه نقطة ز. فخط جـ ز أعظم من خط ز ك؛ وجـ ز مثل ه ب، فخط ه ب أعظم من ز ك. وب ط مثل ك ط، فيبقى ه ط أصغر من ز ط، وهذا محال. فخط جـ ز إذا أخرج على / استقامة، انتهى إلى نقطة ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ب-١١٧-و ل-١٢٧-و

الثاني: كل دائرتين متوازيتين يخرج فيهما خط من المركز إلى المحيط وينفذ على استقامة إلى خارج الدائرة، وتفصل منه قطعة بعضها خارج الدائرة وبعضها الخط الذي فيما بين الدائرتين، وتحرك ذلك القدر من الخط وتحركت النقطتان على محيطي الدائرتين، فإن كل نقطة على ذلك الخط ترسم دائرة.



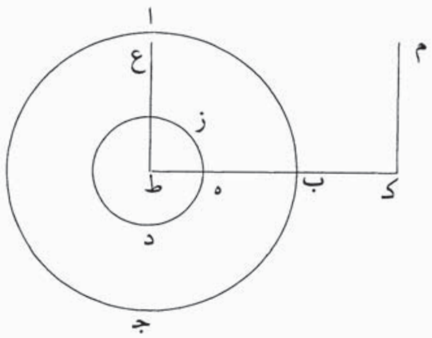
مثاله: دائرتا ا ب جـ د ه ز ومركزهما نقطة ط، وخرج فيهما خط ط ه ب وأنفذ على استقامة / إلى ك. وفصل ك ه وحرك، ونقطتا ب ه متحركتان على محيطي الدائرتين. فأقول: إن كل نقطة على خط ك ه ترسم دائرة. ولترسم نقطة ك في حركة الخط محيط ك ل ن؛ فأقول: إن خط ك ل ن دائرة. ر-٤٣٧

3 أخرج: خرج [ل] – 3-5 نقطة ... لم ينتـه: ناقصة [ا] – 6 وننفذه: وينفذه [ب] – 7 خط: ناقصة [ا] / جـ ز: جـ د [ل] – 8 خط: ناقصة [ا، ب] – 8-9 فخط ه ب: فـ ه ب [ا، ب] غير واضحة، فأثبت العبارة في الهامش [ل] – 9 ك ط: ط ك [ب] ستو (؟) [ا] – 10 جـ ز: جـ د [ب، ل] / على استقامة: ناقصة [ن] – 11 وذلك ... نبين: ناقصة [ن] – 12 الثاني: في [ن] فقط / فيهما: منهما [ا، ل] / خط: قطر [ا] / المركز: المراكز [ا] – 13-14 وتفصل... الدائرة: ناقصة [ا] – 15 وتحركت: وتحرك [ا] – 16-17 دائرة مثاله: في الهامش [ل] – 17 نقطة: نجدها في [ن] فقط – 18 خط: ناقصة [ب] – 19 وفصل: ونفصل [ر] ونصل [ب] / ونقطتا: نقطتا [ا] – 20 ب ه: ه ب [ل] / متحركتان: متحركتين [ا، ب، ر، ل] – 23 إن: انه [ا] / خط ك ل ن: ناقصة [ا].

برهانه: أن خط كـ ه في جميع حركته مسامت لنقطة ط؛ ففي كل أوضاعه
إذا أخرج على استقامة، انتهى إلى نقطة ط. فالبُعد الذي / بين نقطة كـ وبين ل-١٢٧-ظ
نقطة ط أبداً متساوٍ، فخط كـ ل ن دائرة؛ وكذلك كل نقطة على خط كـ ه
ترسم دائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

الثالث: وإذا كان ما ذكرنا على حاله، وأقيم على نقطة كـ عمود على سطح الدائرة وحرك خط كـ ه كما قدمنا، فإن كل نقطة على العمود ترسم دائرة.

فليكن العمود كـ م، وليتحرك خط كـ ه وطرفاه على محيطي الدائرتين. فأقول: إن كل نقطة على كـ م ترسم دائرة.



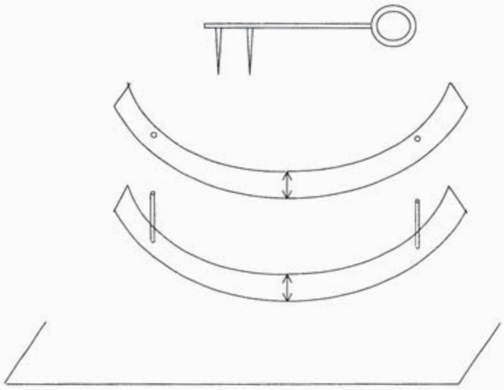
برهانه: أنا نقيم على مركز الدائرة، وهو ط، عمود ط ع في السمك،
فيكون موازياً لـ كـ م. ونفصل منه ط ع مثل كـ م. فقد تبين في الشكل الذي
قبل هذا أن ه كـ إذا تحرك، فإن بُعد نقطة كـ من نقطة ط بُعد متساوٍ. وخط
كـ م مساوٍ لخط ط ع ومواز له./ فإذا تحرك خط / ه كـ وتحرك معه عمود ن-١٠٨ ا-٨-ظ
كـ م، وكان عمود ط ع ثابتاً، فإن بُعد نقطة م من نقطة ع يكون أبداً
متساوياً. فنقطة م إذاً ترسم دائرة، وكذلك / كل نقطة على عمود كـ م؛ ر-٤٣٨
وذلك / ما أردنا أن نبين. ل-١٢٨-و

1 برهانه: برهان ذلك [ن] / مسامت: مسامتا [ا] مسامته [ر] – 2 الذي: نجدها في مخطوطة [ن] فقط – 3 متساوٍ: متسا [ا] مساوياً [ب، ل] / كـ ل ن: كـ ل ز [ل] / خط: ناقصة [ن] – 5 الثالث: نجدها في [ن] فقط / عمود: عمودا [ا، ب، ر] – 8 وليتحرك: ولنحرك [ل، ن] / محيطي: محيط [ب، ر] – 9 على كـ م: عليه [ا] – 10 ط ع: ط ر ع [ا] / السمك: السكون [ر] – 11 فيكون: ناقصة [ن] / ط ع: ط ح [ا، ر] – 13 ط ع: ط ح [ا، ر] كـ ع [ل] – 14 ط ع: ط ع ا [ر] / نقطة (الثانية): ناقصة [ن] / ع: ح [ا] – 15 دائرة: كررها في بداية السطر التالي [ا].

وهذا القدر من البرهان كاف فيما نقصد له.

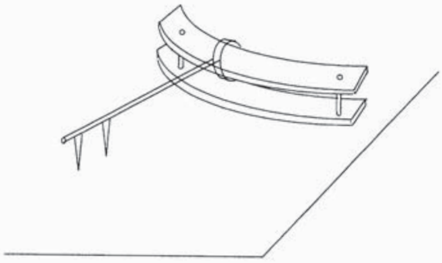
<دَ> فلنبين الآن كيف نتخذ آلة نرسم بها دوائر تكون أقطارها أي مقدار شئنا.

نتخذ حلقة من حديد مستديرة صحيحة الاستدارة معتدلة المقدار، يكون سطحها المحيط بجسمها سطحًا واحداً مستديراً، ويكون قطرها مقداراً يسيراً. ونتخذ عموداً من حديد أسطواني الشكل معتدل الاستقامة، ويكون غلظه في غلظ جسم الحلقة، ونصله بالحلقة وصلاً ملتحمًا؛ وليكن على مسامتة قطر من أقطار الحلقة. ثم نفرض على طرفه نقطتين، ونقيم على تلك النقطتين شخصين صنوبريين من الفولاذ، نثبتهما على العمود ثباتاً ملتحماً، ثم نحد طرفيهما؛ ونحكمه ونُسقِنه حتى يصير بحيث يقطع كل ما يمر به، كما نعمل البركار الذي يقطع به صفائح الأسطرلاب، ويكون البعد الذي بين نقطتي طرفيهما مساوياً لمقدار قطر الحلقة. ثم نعمل صفيحة من نحاس أو شبه أو ما شاكل ذلك / قليلة السمك، ثم نرسم فيها قوسين من دائرتين ل-١٢٨-ظ متوازيتين، يكون بعد ما بينهما – وهو فضل نصف قطر إحداهما على نصف قطر الأخرى – مساوياً لقطر الحلقة. ونقطع الصفيحة على هاتين / القوسين ب-١١٧-ظ ببركار حاد حتى يحصل لنا قطعة من الصفيحة شبيهة بقطعة حلقة، ويكون عرضها مساوياً لقطر الحلقة الأولى. ثم نتخذ صفيحة من جسم صلب



1 وهذا: هذا [ا] / كاف: كان [ر] / نقصد: يقصد [ب، ر]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 2 دوائر: دوائراً [ب، ر] – 4 مستديرة: مستدير [ن] / معتدلة: مكررة [ا] / يكون: ويكون [ا، ب، ر] – 6 ونتخذ: نتخذ [ر] / ويكون: يكون [ن] – 8 أقطار الحلقة: أقطارها [ا] / طرفه: طرفيه، وكتب «طرفه» في الهامش مع «خـ» فوقها [ن] – 9 نثبتهما: ونثبتهما [ب، ر] – 10 ونحكمه: ونخمه [ر] / ونُسقِنه: ناقصة [ن] ونسقيه [ا، ب، ر] – 11 به: ناقصة [ا، ب، ر، ن] تحت السطر [ل] / البعد الذي: البعدان [ن] – 12 الحلقة: جسم الحلقة [ب، ر] – 13 شاكل: يشاكل [ب، ر] – 14 نصف قطر: ناقصة [ن].

مستطيل، يكون طولها بقدر / طول قطعة الحلقة. ونقيم على طرفيها ر-٤٣٩
شخصين أسطوانيين صغيرين ونلحمهما إلحامًا وثيقًا، ونحزّ من رأسيهما
جزأين صغيرين حتى يحدث بينهما كالمسمارين المستديرين، فيكون ما
يبقى من سمك تينك الأسطوانتين الصغيرتين بمقدار سمك الشخصين اللذين
على طرف العمود. ثم نثقب طرفي الصفيحة الأولى ثقبين على قدر غلظ
المسمارين ويكون بعد ما بينهما بمقدار/ بعد ما بين الأسطوانتين. ا-٩-و



فإذا أردنا أن نرسم بهذه الآلة دائرة، فإنا ندخل الصفيحة التي على شكل
قطعة الحلقة في حلقة الحديد المستديرة، ثم نركب الصفيحة على
الأسطوانتين حتى يدخل طرفا الأسطوانتين في الثقبين وتتهندم. ونجعل
الصفيحة السفلى على السطح الذي نريد أن نرسم فيه الدائرة، ونحرك
العمود الذي / في طرفه الشخصان. فيرسم طرفا الشخصين في ذلك السطح ل-١٢٩-و
دائرتين، لأن قطر الحلقة المستديرة، وهو أعظم بعد فيها، مساوٍ لعرض
الصفيحة،/ وهو أقصر بعد فيها. فوضع الحلقة عند الصفيحة أبداً وضع واحد ن-١٠٩

1 طرفيها: طرفيهما [ر] طرفها [ل] – 2 صغيرين: صغيرتين [ب] / ونحزّ: ونحد، وكتب «ونجرد» في الهامش مع «ظ» [ن] ونخرج [ر] ونجزء [ا، ب، ل] – 3 صغيرين: ناقصة [ا، ب، ر] / يحدث: يكون [ن] / بينهما: منهما [ا، ب، ر، ن] / كالمسمارين: كالمنشارين [ر] / المستديرين: مستديرين [ا] / فيكون: ويكون [ا، ب، ر] – 4 سمك (الأولى): ناقصة [ن] / سمك (الثانية): ناقصة [ا، ر، ن] / اللذين: الذين [ا] – 5 نثقب: تنثقب [ر] – 6 بمقدار: مقدار [ا، ب، ر] / الأسطوانتين: الاسطوانين [ب، ر] – 7 ندخل: نجد في الهامش «ناخذ» مع «ظ» [ن] – 8 في حلقة: ناقصة [ن] في الحلقة [ب، ر] / الحديد: الحديدة [ر] – 9 الأسطوانتين (الأولى والثانية): الاسطوانين [ب] / الثقبين: ثَقبين أو ثُقبتين، ويتردد ناسخ [ب] بين الكلمتين، فيضع تحت النبرة وفوقها نقطتين، وهكذا يعمل ناسخ [ر]؛ أما ناسخ [ن] فيأخذ بالأولى فقط – 10 الصفيحة: قطعة الصفيحة [ن] / نريد أن نرسم: تريد أن ترسم [ب] / ونحرك: وتحرك [ب، ر] – 11 طرفه: طرفيه، وأثبت «طرفه» في الهامش مع «خ» [ن] – 12 وهو: فهو [ن] – 13 أبداً: كتب بعدها «مطابق لعرض الصفيحة» [ن].

لا يتغير. فقطر الحلقة المستديرة أبداً مطابق لعرض الصفيحة الذي هو على مسامتة قطر دائرتها. فالعمود الذي على مسامتة قطر الحلقة المستديرة هو أبداً على مسامتة قطر دائرة الصفيحة التي يتحرك حولها العمود. فكل نقطة على العمود وعلى الشخص القائم عليه ترسم دائرة.

⟨هـ⟩ فإذا أردنا أن نرسم دائرة يكون قطرها مثل بعد مفروض، فنحتاج إلى أن نعمل صفيحة من النحاس شبيهة بقطعة حلقة يكون قطرها مقداراً معلوماً.

فلذلك نحتاج إلى عمل حلق / كثيرة، كما بينا فيما تقدم، حتى ننتهي ر-٤٤٠ إلى الحلقة التي نريد.

فبهذه الآلة يمكننا أن نعمل تلك الحلق بأيسر كلفة وأقرب مأخذ.

نتخذ صفيحة من النحاس، ثم نركب الآلة، ونثبت الصفيحة على سطح مستوٍ بحيث يكون طرفا الشخصين مماسين لسطحها، ثم نمسك الحلقة المستديرة بإحدى اليدين وطرف العمود باليد الأخرى، ونحرك العمود ونعتمد على الصفيحة بطرفي الشخصين، ولا نزال كذلك حتى تنقطع / الصفيحة على الدائرتين. فإن تعذر انقطاعها بالحركة، فليس يتعذر تأثيرها ل-١٢٩-ظ برأسي الشخصين. فإذا تأثرت، قطع بالبركار ما يفضل عن القوسين المتأثرين فيها قطعاً غير مستقصى، ثم نعتمد بمِبرَد لطيف لين على ما يبقى من الفضل ونبرد بلطف وبتأييد إلى أن يأخذ المبرد جميع ما يفضل عن القوسين وينتهي إلى محيطي القوسين. فإذا تحررت القطعة التي تحيط بها القوسان

1 فقطر: قطر [ا] / مطابق: مطابقا [ب، ر] / الذي: التي [ل] – 1-3 الذي ... الصفيحة: ناقصة [ا] – 2-3 قطر الحلقة ... مسامتة: الحلقة هو أبداً على مسامتة [ب، ر] ناقصة [ل] – 3 أبداً: ناقصة [ن] – 6 إلى: ناقصة [ا، ب، ر، ل] / من النحاس: شبه [ا] – 10 الحلق: الحلقة [ب، ر] – 11 من النحاس: ناقصة [ا] / نركب: تركب [ر] – 12 طرفا: طرفي [ا] طرف [ب، ر] / لسطحها: نجد في الهامش «لسطحهما» مع «خـ» [ن] لسطحهما [ا] – 13 ونحرك العمود: ناقصة [ل] – 14 بطرفي: بطرف [ب، ر] / الشخصين: الشخص [ل] / ولا: فلا [ن] – 15-19 فإن ... القوسان: ناقصة [ا] – 15 فإن: فاذا [ر] – 16 برأسي: رأسي [ب، ر، ل] / بالبركار: فيها بالكاز [ل] منها بالبركار [ب، ر] / المتأثرين: المدارين [ر] الهارسن؛ وكتب في الهامش «المدارين» [ل] – 17 فيها: منها [ب، ر] / نعتمد: نعمد [ب] / بمبرد لطيف لين: بمبردين [ب، ر] – 18 وبتأييد: تاييد [ر، ب] بزايد [ن] / يأخذ: نأخذ [ب] تأخذ [ر] / المبرد: ان برد [ر] – 19 تحررت: تحدث [ل] / القطعة: النقطة، وأثبت «القطعة» في الهامش مع «ظ» فوقها [ب] / القوسان: القوسين [ب، ر].

وبقي قطعة حلقة، ثقب طرفاها ؛ ثم ركبت عليها الآلة. ويعتمد بها على صفيحة أخرى، فيحدث لنا قطعة حلقة أخرى، ويكون نصف قطر هذه الحلقة الثانية يزيد على نصف قطر الحلقة الأولى بمقدار طول العمود. وإذا فعلنا مثل ذلك دائماً، تضاعف قطر الحلقة التي تحدث حتى ينتهي إلى أي مقدار شئنا. فبهذا الطريق يمكننا أن نعمل حلقاً كثيرة بأهون كلفة، وهو الذي به تتم لنا الحلقة المطلوبة. وننتهي إلى الغرض.

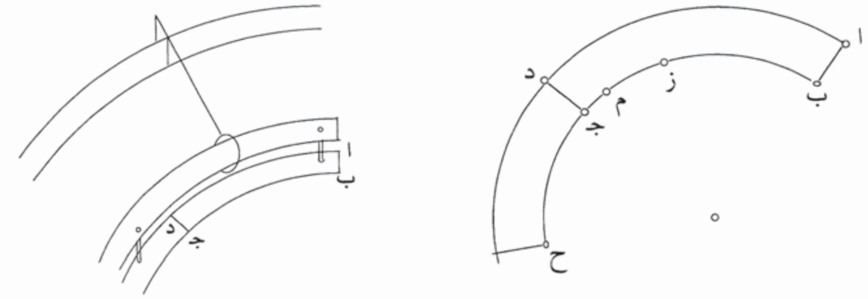
فإذا أردنا أن نرسم / بهذه الآلة دائرة تامة، عملنا مكان كل قطعة حلقة ر-٤٤١ قطعتين أو قطعة مقتدرة وقسمناها بنصفين، وركبنا إحدى القطعتين على رأسي الأسطوانتين / وركبنا الأخرى تحت قاعدتي الأسطوانتين بشظيتين ل-١٣٠-و صغيرتين تكونان في القاعدة وثَقْبين يكونان في القطعة، ويكون تركيبهما بحيث يكون سطحاهما متوازيين وقوساهما متسامتتين، كل قوس من إحداهما / مسامتة لنظيرتها من الأخرى،/ ثم نطبق سطح القطعة من الحلقة ا-٩-ظ ن-١١٠ السفلى على السطح المفروض الذي نريد رسم الدائرة فيه.

وليكن مثل قطعة ا ب جـ د. ثم نركب الآلة ونحركها ؛ ونرسم قوساً من دائرة. ثم نتعلم على السطح المفروض عند محيط/ قوس ب جـ مما يلي نقطة ب-١١٨-و جـ منه ثلاث نقط متقاربة مثل نقط ز م جـ، ثم ننقل الحلقة السفلى من موضعها ونخرجها حتى ينطبق بعض قوس ب جـ على نقط ز م جـ ويكون الباقي من القوس خارجًا عنها، مثل قوس ز م جـ ح. فلأن قوس ب جـ

1 وبقي قطعة حلقة: ناقصة [ا] / وبقي: وهي [ب، ر، ل] / ثقب: ثم نثقب [ا] ثم ثقب [ر] / طرفاها: طرفها [ا] / ثم ركبت: ونركبها [ا] ثم ركب [ن] / عليها: عليه [ن] على [ا، ب، ر، ل] – 2 لنا: له [ا] / قطعة: ناقصة [ا] – 3 الثانية: الأخرى الثانية [ن] ناقصة [ا] / قطر: أثبتها في الهامش مع «صح» [ن] / وإذا: فاذا [ن] – 5 حلقًا: حلق [ا] – 6 المطلوبة: ناقصة [ا] – 8 أو ... بنصفين: ناقصة [ا] / إحدى: احد [ب، ر] / القطعتين: القطعين [ب] – 9 قاعدتي: قاعدة [ا، ب، ر، ل] – 10 تكونان: يكون [ا] / وثقبين يكونان في القطعة: ناقصة [ا] / تركيبهما: تركيبها [ا، ر] – 11 سطحاهما: سطحهما [ا] / وقوساهما: ناقصة [ا] / متسامتتين: متساويتين [ن] مسامتتين [ب، ر] – 12 نطبق: ينطبق [ب، ر] / القطعة من: قطعة [ا، ب، ر، ل] – 13 الذي ... فيه: ناقصة [ا] / نريد: تريد [ر، ب] – 14 ا ب جـ د: ا ب جـ [ن] / ونرسم: فنرسم [ب، ر، ن] – 15 نتعلم: نعلم [ل] نعمل [ا] يتلعم [ر] / محيط: المحيط [ر] / ب جـ: ا ب جـ [ب، ر، ل، ن] – 16 منه: ناقصة [ل، ن] / نقط (الثانية): نقطة [ب] / ز م جـ: ز ه د [ن] / ننقل: نقل [ر] / السفلى: ناقصة [ا، ر، ب] – 17 ز م جـ: ز ه د [ن] – 18 ز م جـ ح: ز ه جـ ح [ن] ر م حـ ر ح [ل].

ينطبق على نقط ز م ح ويصير مثل قوس ز م جـ ح، تكون نقط ز م جـ ح على محيط دائرة مساوية لدائرة ب جـ. ولأن قوس ز ح لقيت محيط الدائرة المساوية لدائرتها على ثلاث نقط، يكون جميع قوس ز ح منطبقًا على محيط الدائرة، ويكون قوس ز ح على استدارة محيط الدائرة / بعينها التي ل-١٣٠-ظ انطبق عليها قوس ب جـ. فإذا حركنا العمود ذا الشخص في الدفعة الثانية أيضًا، كان رأس الشخص يتمم الدائرة التي كان رسمها.

ثم أنا نتعلم أيضًا على السطح وعند قوس جـ ح ثلاث نقط مما يلي نقطة ح / وننقل الحلقة السفلى حتى ينطبق بعض القوس على تلك النقط كما ر-٤٤٢ عملنا في الدفعة الأولى. ثم نفعل ذلك دائمًا، ونحرك الآلة إلى أن ترجع إلى الموضع الذي منه بدأت، فنرسم بهذا العمل دائرة تامة.



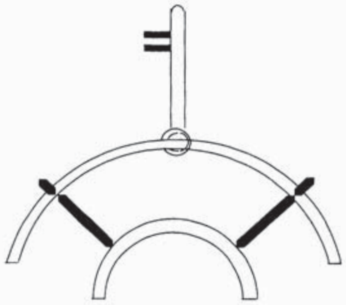
وإن أردنا أن نرسم قوسًا من دائرة معلومة القطر وتكون القوس معلومة النسبة إلى الدائرة، فإنا نجعل القوس من الحلقة الأولى شبيهة بالقوس المطلوبة، ونتمم / العمل، أعني عمل الحلق الكثيرة. ل-١٣١-و

1 نقط: نقطة [ل] / ز م ح: ز ه د [ن] / ح: حـ [ا، ب، ل] / ويصير ... ز م جـ ح: ناقصة [ا، ر، ب] / ز م جـ ح: ر ه د ح [ن] / ز م جـ ح: ز ه د ح [ن] / ح: ناقصة [ا] – 2 ولأن: فلان [ا] / ز ح: ب حـ [ن] / لقيت: لقي [ل، ب، ر] بقي [ا] – 2 مساوية ... الدائرة: مكررة مع خطأ [ر] – 3 لدائرتها: لدائرة [ا] لدائرته [ل] ناقصة [ب، ر] / ز ح: ب حـ [ن] – 4 ز ح: ز د [ن] – 5 ب جـ: ا ب جـ [ل] / العمود ذا الشخص: المسطرة [ا] / الشخص: شخص [ب، ر] – 6 رأس: قد تقرأ «دائر» [ا] – 7 نتعلم أيضًا: أيضًا نعلم [ل] / السطح: شخص [ب] سطح [ر] / جـ ح: د ح [ن] – 7-8 مما يلي نقطة ح: ناقصة [ا] / مما ... السفلى: في الهامش [ل] وكتب نساخ [ب، ر، ل] «السفلى» قبل «وننقل الحلقة»، وهذه الكلمة ناقصة في [ا] – 8 النقط: النقطة [ر] – 9 عملنا: علمنا [ب] / نفعل: نعمل [ا] / الآلة: المسطرة [ا، ب، ر، ل] – 10 بدأت: بدت [ل، ب] عدت [ر] – 11 وإن: فاذا [ا، ن] / القوس: ناقصة [ا، ب، ر] – 13 أعني ... الكثيرة: ناقصة [ا] / أعني: أثبت في الهامش مع «صح» الفقرة «أعني ... التامة (ص. 879، سطر 6» [ل] وقد كرر هذه الفقرة بعد كلمة «الثانية» (سطر 5)، وضرب عليها بالقلم.

وإن كانت القوس المطلوبة عظيمة النسبة إلى الدائرة، ومن دائرة عظيمة المقدار، جعلنا الحلقة الأولى جزءاً صغيراً من القوس المطلوبة معلومة النسبة إليها، ومقدرة لها؛ وعملنا الحلق بالطريق الذي قدمناه في عمل الحلق. فإذا انتهينا إلى الدائرة المطلوبة، يكون قد حصل لنا حلقة هي جزء معلوم من القوس المطلوبة. فنركبها في الآلة ونرسم بها القوس المطلوبة بالطريق الذي بيناه في عمل الدائرة التامة.

ويجب في كل هذه الحلق أن تكون القطعة تفضل على مقدار طول قوسيها من الجهتين حتى يتسع مجال الحلقة المستديرة، ويكون في الحلقة المستديرة نقطة مفروضة / لتنطبق على طرف القوس عند ابتداء الحركة ن-١١١
وتنطبق على الطرف الآخر عند انتهائها حتى تكون القوس التي تحدث بحركة رأس الشخص / شبيهة بقوس الحلقة. ا-١٠-و

فقد أتينا على شرح الآلة التي ترسم بها الدوائر العظام علماً وعملاً؛ وذلك ما قصدنا لتبيينه وهذه صورة الآلة.



1 وإن: فان [ا، ن] / المطلوبة: ناقصة [ا] – 1-2 النسبة ... المقدار: ناقصة [ا] – 2-6 الأولى ... بيناه: من قوس صغيرة بقدر تلك القوس وتممنا العمل بالتدبير الذي ذكرناه [ا] – 3 إليها: إليه [ب، ر، ل] / ومقدرة لها: ومقداراً لها [ن] كتب في الهامش «ومقدرة له» [ل] ناقصة [ب، ر] / قدمناه: قدمنا [ب، ر، ل] – 6 بيناه: بينا [ل] – 7 أن: بان [ر] – 8 قوسيها: قوسيهما [ا، ب، ر] / يتسع: ينقطع [ر] – 9 لتنطبق: ينطبق [ر] ليطبق [ا] – 12 الآلة: كيفية الآلة [ا، ب، ر] / بها: ناقصة [ا، ب، ل، ر] / علماً وعملاً: عملاً وعلماً [ا] – 13 لتبيينه: له [ا] / صورة الآلة: صورتها [ن]. نجد بعدها: «تمت الرسالة في بركار الدوائر العظام من كلام ابن الهيثم وصلى الله على محمد النبي وعلى آله وسلم تسليماً» [ب] «بلغ واللهم. تمت المقالة لبطلميوس الثاني الشيخ المبرز أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم رضى الله عنه في اثنين وتسعين وستمائة» [ن] «والحمد لله ربّ العالمين، صلاته على سيدنا محمد. بلغت القراءة وصح والحمد لله رب العالمين صلواته على سيدنا محمد النبي وآله الطاهرين» [ل] «تمت المقالة والحمد لله ربّ العالمين كثيراً وسيدنا محمد وآله. فرغنا من كتابتها بالسلطانية يوم ةَ رَ جمادى الأولى سنة ٧٢١ هجرية» [ا] «من كلام ابن الهيثم ٩ ربيع الأول سنة ١٢٨١» [ر].

الملحقات

المُلْحَق الأوَّل

"في هيئة العالَم": كتاب للحسن بن الهيثم؟

"وقولنا في كل الحركات إنما هو بحسب رأي بطلميوس فيها واعتقاده"(في هيئة العالَم).

"وقد تبين لي من تضاعيف كلام مولاي الشيخ أنه يصدق قول بطلميوس في جميع ما يقوله من غير استناد إلى برهان ولا تعويل على حجة بل تقليداً محضاً. فهذا هو اعتقاد أصحاب الحديث في الأنبياء صلوات الله عليهم، وليس هو اعتقاد أصحاب التعاليم وأصحاب العلوم البرهانية. ووجدته أيضاً يصعب عليه تغليطي بطلميوس ويمتعض منه؛ ويظهر من كلامه أن بطلميوس لا يجوز عليه الغلط. ولبطلميوس أغلاط كثيرة في مواضع كثيرة من كتبه. فمنها أن كلامه في المجسطي إذا حقق النظر فيه وجد فيه أشياء متناقضة؛ وذلك أنه قرر أصولاً للهيئات التي يذكرها، ثم أتى بهيئات للحركات مناقضة للأصول التي قررها. "(الحسن بن الهيثم، "في حلّ شكوك حركة الالتفاف")

لقد كان المؤلَّف : " في هيئة العالم"، الذي تـُرجم إلى اللغة العبريّة ثمَّ إلى اللاتينية استناداً إلى الترجمة العبرية، أحد المراجع في علم الفلك خلال القرون الوسطى، كما بيَّن ذلك ب. دوهيم (*P. Duhem*) وَ ك. أ. نَلّينو (*C. A. Nallino*) وَ ف. ج. كرمودي (*F. J. Carmody*)، والكثير من غير هؤلاء[١]. ولكنّ الأثر الذي تركه هذا المؤلّفُ في الفلكيات العربية كان ضعيفاً جدّاً. وذلك أنـّه لم يُستخدَم إلا من قِبَل بعض علماء الفلك من المرتبة الثانية مثل الخَرَقي، كما سنشير فيما بعد. ولقد ساد رأيٌ عامٌّ منذ دوهيم يعتبر أنَّ "في هيئة العالم" يُمثـِّل جزءاً مُهمّاً من مساهمة ابن الهيثم. ويجب أن نذكر بالتأكيد، من بين الأسباب التي أدَّت إلى نجاح هذا الرأي المنتشر عموماً لدى المؤرِّخين وإلى نجاح الكتاب نفسه خلال القرون الوسطى، بساطة محتواه وغياب التقنيّات الرياضيّة فيه، وخاصّة التركيب الذي نجده فيه بين نظريّات المجسطي للكواكب ونوع من علم الهيئة. وهذا النجاح كان باهراً إلى هذه الدرجة لأنّ الكتاب يحمل اسم رياضيّ وفيزيائيّ شهير هو ابن الهيثم. ولكن، ليس من النادر أن يحدث النجاح الكبير لمؤلـَّف نتيجة لالتباس إن لم يكن نتيجة لخطأ. وهذا، بالتحديد، ما سَنـُثبته هنا.

---

[١] انظر الكتاب التالي ص. ١١٩-١٢٦:
P. Duhem, *Le Système du monde*, t. II : *Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic* (Paris, 1965)
ولقد قدَّم ي. ت. لانغرمان (Y. T. Langermann) تحقيقاً للنصّ العربي استناداً إلى مخطوطتين: مخطوطة لندن ومخطوطة كستمونو (Kastamonu) في تركيا؛ كما قدَّم ترجمة إلى اللغة الإنكليزية، مع مُقدِّمة من ٥٠ صفحة وقائمة بالمفردات العربية واللاتينية والعبرية. واسم الكتاب هو:
Ibn al-Haytham's On the Configuration of the World (New York / Londres, 1990).

لقد وصلت إلينا ثلاث مخطوطات عربيةَّ[٢] تنسِب هذا المؤلَّفَ إلى ابن الهيثم. فيكون، إذاً، هذا المؤلَّفُ الذي نُقِلَ إلينا، من أعمال هذا الرياضيّ البارز في القرن الحادي عشر. يبقى أنَّ اسم هذا الأخير قد خضع لتغيير في مخطوطتين من المخطوطات الثلاث. وذلك أنَّنا نجد فيهما اسم أبي الحسن بن الهيثم ، بدلاً من الحسن بن الحسن بن الهيثم، وهذا ما يُبيِّن، أنَّ الأمر يتعلَّق بعمل نسّاخ. أما المخطوطة الثالثة، المتأخِّرة نسبيّاً[٣]، فهي تتضمَّن عدَّة مؤلَّفات للحسن بن الهيثم، وهذا من الممكن أن يدفع الناسخ إلى إصلاح اسم المؤلِّف. ولكنّ هذه النسبة، كما سنرى، تثير مسائل عديدة معرفيّة وتاريخيّة لم يتطرَّق إليها قطّ علماء التاريخ، بالرغم من أهمِّيَّتها.

ولقد بيَّنّا، منذ خمس عشرة سنة، ضمن أوّل دراسة نقديّة للمصادر الفهرسيّة والتاريخيّة المتعلّقة بأعمال وعناوين مؤلَّفات الحسن بن الهيثم، وهي الدراسة التمهيديّة للتحقيق النقدي لأعماله الرياضية، أنَّ هناك شخصين قد تمَّ الخلط بينهما بالصُّدْفَة خلال التاريخ: الرياضيّ الحسن ابن الهيثم والفيلسوف الطبيب محمَّد ابن الهيثم. ولقد شكَّينا كذلك بصحَّة نسبة "في هيئة العالم" إلى الحسن ابن الهيثم[٤]. ولكن صحَّة منهجنا هذا قد انتُقِدت بعد ذلك بعدَّة سنوات، واعتقد بعضهم أنّ بوسعه تأكيد أنّ الشخصين لا يُشكّلان إلا شخصاً واحداً، كما أعْلِنت صحَّة نسبة "في هيئة العالم " بشكل واضح إلى الحسن ابن الهيثم[٥]. ولقد قُدِّمت لأجل ذلك

---

[٢] لقد وصل إلينا هذا المؤلَّف في ثلاث مخطوطات:

١) مخطوطة لندن، المكتب الهندي (India Office, Loth 734)، الأوراق ١٠١-١١٦. وهي جزء من المجموعة المُحرَّرة في وقت متأخِّر في حوالى القرن السابع عشر.

٢) مخطوطة كستمونو (Kastamonu) في تركيا، رقم ٢٢٩٨، الأوراق ١-٤٣. ونحن لا نعرف تاريخ نسخ هذه المخطوطة. وكما لاحظ ي. ت. لانغرمان (Y. T. Langermann)، إنّ هذه المخطوطة تتضمَّن نواقص مهمّة.

٣) مخطوطة الرباط، المكتبة الملكية، رقم ٨٦٩١، الأوراق ٢٩و-٤٨و.

نتحقَّق من أنَّ هذه المخطوطات الثلاث مختلفة ثناءً وأنَّ بعض هذه الاختلافات غير قابلة للاختزال؛ وهذا ما يُبيِّن أنّ انتقال النصّ يُثير مسائل جدِّيّة يبقى علينا أن ندرسها. والأخطر من ذلك هو أنّ مخطوطة لندن تتضمَّن تعليقاً في نهايتها هو التالي:"تعليق وجدناه بخطّ الشيخ أطال الله بقاؤه في آخر هذه المقالة فنقلناه كما وجدناه (الورقة ١١٦و، تحقيق لانغرمان النص العربي ص. ٦٦). ونحن لا نعرف شيئاً عن هويّة هذا الشيخ الذي كان ما يزال على قيد الحياة؛ إذ إنّ الناسخ يتمنّى له طول العمر. إنّ هذا التعليق المشكوك في نسبته يعرض الأفكار المعروفة حول الحركات السماوية، كما يعرض بعض العناصر الغامضة من علم الهيئة الأرسطي. ولقد تسارع البعض، بدون أخذ أيّ احتياط، بنسبة هذا التعليق إلى الحسن بن الهيثم، بعد تقريب اعتباطيّ غامض مع بعض الجُمَل العامَّة لابن الهيثم في مؤلَّفه "في ضوء القمر". إنّ هذا التعليق هو الذي أوقع في الخطأ عالماً كبيراً مثل المأسوف عليه م. شرام، M. Schramm (انظر: *Ibn al-Haythams Weg zur Physik* [Wiesbaden, 1963]، ص. ٦٣ وما يليها).

[٣] انظر مخطوطة لندن: India Office, Loth 734.

[٤] انظر: المجلَّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٢٣-٥٥، ٤٥٣-٤٥٥ و ٤٧٧-٥١١؛ انظر أيضاً المجلَّد الثالث، وخاصَّة الملحق الخاصّ بالمجلَّد الثاني ص ٨٠٥-٨٠٩ (الحسن بن الهيثم ومحمّد بن الهيثم: الرياضيّ والفيلسوف)؛ انظر أيضاً المجلَّد الرابع (الحسن بن الهيثم ومحمّد بن الهيثم: الرياضيّ والفيلسوف. في المكان).

[٥] انظر :

A. I. Sabra, « One Ibn al-Haytham or two ? An Exercise in Reading the Bio-Bibliographical Sources », ،*Zeitschrift für Geschichte der arabischen-islamischen Wissenschaften*, Band 12 (1998)

ص. ١-٥٠، وخاصّة ص. ١٩-٢١.

عدَّة حُجَجٍ لا تستأهل المناقشة، ما عدا حجَّة واحدة فقط؛ وذلك لأنّ الحجج الأخرى هي نظريّة خالصة أو ناتجة من جهل بالمحتوى الرياضي لعمل ابن الهيثم؛ وكنـّا قد رفضنا مُسَبَّقاً أهمَّها[٦]. وهذه الحجَّة تستند خاصَّة إلى محتوى العبارة الختامية لإحدى مخطوطات "في هيئة العالم"، حيث ينسبها الناسخ بوضوح إلى الحسن ابن الهيثم، مع العلم أنَّ العبارة الختامية في كلّ من المخطوطتين الأخـْرَيَيْن لا تعطي أي معلومة حول هذا الموضوع[٧]. سوف نُبيِّن فيما بعد أنَّ هذه الحجَّة هي أيضاً واهيَة، وأنَّ الانتقاد يستند إلى قواعد ضعيفة جدّاً.

إننا نُصِرُّ على أن نتناول من جديد هذه المسألة الخاصّة بصحَّة نسبة هذا المؤلـَّف، ليس فقط لِنُصْلِح خطأً تاريخيّاً، بل لأنها تـُناقضُ المفهومَ الذي نتصوَّرُه لفلكيّات الحسن ابن الهيثم. فإذا برهنـّا بالفعل أنَّ هذا الكتاب ليس لابن الهيثم ولا يُمكن أن يكون من بين أعماله، ينبغي علينا أن نستنتج أنَّ التأويلاتِ، التي قام بها المؤرِّخون لفلكيات ابن الهيثم استناداً إلى هذا الكتاب، مرفوضة. إنَّ فلكيّاتِ ابن الهيثم، وفقاً لهذه التأويلات، وصفيّة وغير برهانيّة كما هي حال "هيئة العالم" حيث يُرَكـِّب المؤلـِّف نظريَّة المجسطي للكواكب، كما هي، مع هيئة أرسطيّة. وهذا التركيب لا يتطابق مع فلكيات ابن الهيثم. لنبدأ بالتذكير ببعض الوقائع المُثـْبَتـَة جيِّداً، ولنكن حذرين بأن نـُميِّزها من التخمينات.

لقد روى سيرة حياة ابن الهيثم وكذلك الأخبارَ عن أعماله عددٌ من المؤلِّفين القدامى: أهمُّهم القفطي [١١٧٢/٥٦٨-١٢٤٨/٦٤٦]، ابن أبي أُصيبعة [١٢٠٠/٥٩٦-١٢٧٠/٦٦٨] وآخر مجهول الهويّة يوجَد نصُّه في مخطوطة بمدينة لاهور[٨]. وهذه المخطوطة هي الأكثر قِدَماً لأنـّها نُسِخت سنة ١١٦١ في النظاميّة ببغداد.

و**الواقعة الثانية**، التي لم تـَسْتـَرْعِ انتباه أحد، وكانت قد سَبَّبَت التباساً خطيراً، هي أنَّ القفطي لم يُعْطِ إلا قائمة بأسماء كتابات الحسن بن الهيثم، ولم يُشِر قط إلى اسم مُحمَّد ابن الهيثم. ولكنَّ قائمة القفطي لا تحتوي إلا على أسماء كتابات في العلوم الرياضيّة دون غيرها

[٦] انظر الحاشية ٤ وخاصَّة ما ورد فيها حول المجلـّدين الثالث والرابع.
[٧] إنّ مخطوطة لندن بالفعل لا تتضمَّن أيّة عبارة ختامية؛ أمّا مخطوطة المغرب، فهي تُخبرنا أنـّها قد أنهيَت في يوم الأحد الثالث من رجب سنة ١٢٩١ هجريّة، أي سنة ١٨٧٤ للميلاد. ولقد كـُتِب في هذه المخطوطة، وكذلك في مخطوطة كستمونو: "أبو الحسن" بدلاً من "ابن الحسن".
[٨] سنُسَمّيه فيما بعد مؤلـِّف لاهور المجهول

تقريباً؛ كما أنـّنا قد تَحقـّقـْنا من أنَّ كلَّ أعمال الحسن التي وصلت إلينا - باستثناء اثنين منها - موجودة في قائمة القفطي.

أمّا مؤلِّف لاهور المجهول وابن أبي أُصيبعة، فإنَّ لهما نفس المصدر، وهو سيرة ذاتية لمحمَّد ابن الحسن، يُورِد فيها هذا الأخير، بعد أن يروي بعض العناصر من سيرة حياته أو بالأحرى من سيرة حياته الفلسفية تحديداً، قائمة بكتاباته حتـّى سنة ١٠٢٦/٤١٧، ويُكملها بقائمة أخرى بكتاباته حتـَّى سنة ١٠٢٨/٤١٩. إلا أنَّ هناك اختلافين مُهمَّين بين مؤلِّف لاهور المجهول وبين ابن أبي أُصيبعة، لم يَسْتَرْعِيا انتباه أحد. فمؤلِّف لاهور المجهول يورِد مباشرة بعد هذه القائمة الأخيرة، وعلى نفس الصفحة، قائمة بكتابات الفارابي تبعاً لنسخة قاضي بغداد، ابن المُرَخـِّم. ويورِد بعد هذه القائمة قائمة بكتابات الحسن ابن الهيثم. وهذا يعني أنَّ مؤلـِّف لاهور المجهول لم يخلط بين الحسن ومُحمَّد ولم يخلط بين قائمتـَي كتاباتهما.

أمّا عرض ابن أبي أصيبعة، فهو مختلف كثيراً عن العرض السابق. فابن أبي أصيبعة لم يكن نسّاخاً بل كاتباً للسِّيَر مثل القفطي. فأراد، لذلك، أن يكتب مقالاً عن "ابن الهيثم" في فهرسه. وهو يبدأ هذا المقال بمقدِّمة يقتبس فيها عن القفطي بعضَ الوقائع التي ينسبها هذا الأخير إلى الحسن بن الهيثم؛ ولكنـَّه يُتبِع ذلك بلا تأخير بالسيرة الذاتية الفلسفية وبقائمة مؤلـَّفات محمَّد بن الحسن، فيخلط بين الشخصيَّتين ويؤلـِّف شخصية جديدة باسم مزعوم هو "أبو علي محمّد بن الحسن بن الهيثم". لم يُشر أحدٌ من المؤلـِّفين ولا أيُّ مصدر من المصادر، قبل ابن أبي أُصيبعة، إلى مثل هذه الشخصية؛ ولا يوجَد مؤلَّفٌ للحسن بن الهيثم أو شرحٌ لكتاباته – كما بَيَّنـّا – يُشار فيه إلى هذا الاسم. إنّ هذا الالتباس الذي ارتكبه ابن أبي أصيبعة هو الذي أوقع كـُتـّاب السِّيَر والمؤرِّخين في الخطأ[9].

---

[9] لقد حقـّق أنطون هايْنَن (Anton Heinen) نصَّ مخطوطة لاهور حاذفاً قائمة الفارابي التي تفصل بين قائمة محمَّد بن الحسن وقائمة الحسن. وكتب ببساطة في حاشية:
« An dieser Stelle, auf derselben Seite und in derselben Hand, folgt das Verzeichnis der Werke al-Færæbîs »
أيْ : " في هذا الموضع على نفس الصفحة وبنفس اليد، تلي قائمة بأعمال الفارابي"، انظر هذه الحاشية على الصفحة ٢٧٢ من:
(« Ibn al-Haithams Autobiographie in einer Handschrift aus dem Jahr 556 H./1161 A.D. », dans Ulrich Haarmann et Peter Bachmann (éds), *Die islamische Welt zwischen Mittelalter und Neuzeit, Fetschrift für Hans Robert Roemer zum 65. Geburtstag*, Beiruter Texte und Studien, Band 22 (Beyrouth, 1979), p. 254-277, n. 27)
وهكذا خلط بين المؤلـِّفين، كما فعل ابن أبي أُصيبعة.

إنَّ تفحُّص قائمتيْ كتابات محمَّد بن الحسن، اللتين أوردهما ابن أبي أصيبعة، يظهر بوضوح أنـّه كانت لديه نفس السيرة الذاتية التي كانت تحت تصرُّف كاتب لاهور المجهول. ويبقى أنَّ ابن أبي أصيبعة، بعد أن نسخ هاتين القائمتين، أورد قائمة بكتابات الحسن بن الهيثم. ولقد أورد هذه القائمة الأخيرة قائلاً " وهذا أيضاً فهرست وجدته لكتب ابن الهيثم إلى آخر سنة تسع وعشرين وأربعمائة"[١٠]. وهذه القائمة تـُشبه – باستثناء ترتيب العناوين فيها[١١] – تلك التي أوردها كاتب لاهور المجهول وأوردها القفطي. إنَّ إضافة هذه القائمة، من قِبَل ابن أبي أُصيبعة في نهاية مقاله، وتقديمَها بهذه العبارات يُبيِّنان أنَّ هذه القائمة كانت موجودة بشكل مستقلٍّ عن سيرة محمَّد ابن الهيثم الذاتية كما كنـّا قد وجدناها في مخطوطة لاهور.

و**الواقعة الثالثة** التي لا تقبل الطعن أيضاً هي أنَّ تفحُّص هاتين القائمتين، أيْ قائمة محمَّد وقائمة الحسن، يُبيِّن أنَّ كتابات محمَّد بن الهيثم تتناول الفلسفة والطبَّ خاصّةً، أو أنـَّها شروح، بهدفٍ تعليميّ، لنصوص علمية قديمة، مثل الأصول والمجسطي وكتابات منالاوس؛ أمّا كتابات الحسن فإنـّها تتناول مسائل في البحوث، غالباً ما تكون طليعيّة، في العلوم الريّاضية. ولنأخذ كمثال مسألة التحليل والتركيب الجديرة بالذكر لأنَّ الكاتبين قد عالجاها؛ فبينما يُحرِّر محمَّد مؤلـَّفه " على جهة التمثيل للمتعلـّمين"[١٢]، يُعالج الحسن[١٣] في مؤلـَّفه مسائل في البحوث بقي البحثُ فيها ناشطاً حتى القرن الثامن عشر، مثل مبرهنة أقليدس المعكوسة حول الأعداد التامة أو مسألة الدوائر الثلاث المتماسة، أيْ مسائل البحث المتقدِّم، البعيدة عن كلِّ هدف تعليمي. وهكذا نرى المسافة التي تفصل بين المشروعين.

و**الواقعة الرابعة** لها أهمِّيَّة خاصَّة: فشروح الأقدمين التي وصلت إلينا تحت اسم محمَّد – شرح المجسطي وشرح مؤلـَّف منالاوس – ما هي إلا تبسيطات تكرارية ذات هدف تعليميّ. ولكنَّ كتابات الحسن ابن الهيثم الموجودة في القائمة، وهي الوحيدة – والنادرة – التي يُمكن أن توضَع في مَصَفّ الشروح، هي بالفعل تصحيحية، أيْ أنـَّها تُعالج حلّ الشكوك عند

[١٠] انظر: ابن أبي أُصيبعة " عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، نشر ن. رضا (بيروت ١٩٦٥)، ص. ٥٥٩.
[١١] انظر: المجلـَّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣٦-٥٥.
[١٢] انظر: ابن أبي أصيبعة " عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، نشر ن. رضا (بيروت ١٩٦٥)، ص. ٥٥٥.
[١٣] انظر: المجلَّد الرابع من هذه الموسوعة.

أقليدس أو بطلميوس؛ وهي تأسيسية، أيْ أنـّها ترجع إلى الأسس نفسها، مثل شرحه لمصادرات الأصول.

و**الواقعة الخامسة** التي لم تـُثِر انتباه أحد هي شهادات المؤلِّفين القدامى الذين كانوا مُطَّلعين في آن واحد على أعمال محمَّد وعلى أعمال الحسن: فالفيلسوف فخر الدين الرازي يُميِّز بين هذين المؤلـِّفين[١٤].

هذه الوقائع، التي هي أبعد من أن تكون الوحيدة، تؤدّي كلُّها إلى نفس الخلاصة: لقد كان هناك شخصان يحملان نفس الاسم : الحسن بن الحسن بن الهيثم ومحمَّد بن الحسن بن الهيثم. الأوَّل هو الرياضي الشهير، أمّا الثاني فهو فيلسوف وطبيب مطَّلِعٌ – مثل الكثير من الفلاسفة وفق تقليد الكندي – على العلوم دون أن يكون هو نفسه عالماً مبتكراً. وهذان الشخصان اللذان يحملان نفس الاسم عاشا في نفس الفترة الزمنية وكانا من نفس المنطقة (جنوب العراق) وربّما كانا من نفس العائلة. ولكن الرياضيّ هاجر إلى القاهرة بينما بقي الفيلسوف في العراق.

والالتباسات لها عمر مديد؛ فلذلك لا بدَّ من القيام بتفحُّصٍ دقيق لنسبة "في هيئة العالم". لنذكـِّر مرّة أخرى ببعض الوقائع.

لقد سجل كُتّاب السِّيَر القدامى الثلاثة اسم المؤلَّف "في هيئة العالم" ضمن قائمة الحسن؛ غير أنَّ ابن أبي أصيبعة ومؤلِّف لاهور المجهول سجَّلاه مرَّتين، مرّة على قائمة محمَّد ومرّة على قائمة الحسن؛ وهذا ما كان يجب أن يُثير حذر المؤرِّخين وأن يدفعهم إلى مناقشة صحّة نسبة "في هيئة العالم" إلى الحسن؛ ولكنَّ شيئاً من هذا القبيل لم يحدث. ومهما كانت الطريقة التي نُعلِّل بها هذه النسبة المزدوجة، فإنَّ مواصلة اعتبار محمّد والحسن شخصاً واحداً لا يُمكن إلا أن تؤدِّي إلى الخُلـْف. فينبغي عند ذلك التسليم بأنَّ نفس المؤلِّف حرَّر كتابين مُختلفين، في زمنين مُختلفين وبنفس العنوان بدون أن يُشير إلى ذلك: فتكون النتيجة غير قابلة للتصديق لعدم وجود أي حُجَّة لدعمها. وقد يُمكن أن نضع المسؤوليّة على عاتق الكاتب الذي حرَّر المصدر (أو المصادر) الذي (أو التي) اقتبس منه (أو منها) ابن أبي أصيبعة ومؤلِّف لاهور المجهول. وقد يُمكن أن نضع المسؤوليّة على عاتق ابن أبي أصيبعة ومؤلـِّف لاهور المجهول نفسيْهما؛ ولكن هذا العنوان موجود على قائمة كتابات الحسن التي أوردها القفطي،

[١٤] انظر: الملحق للمجلـّد الثاني، ضمن المجلـّد الثالث من هذه الموسوعة.

بدون أن يكون لذلك علاقة بالمصدر الذي استند إليه ابن أبي أصيبعة ومؤلّف لاهور المجهول؛ لذلك لا شيء يدفعنا إلى الاستنتاج بإمكانية ارتكاب مثل هذا الخطأ من قِبَل هذين المُفَهْرِسَيْن أو من قِبَل مصدرهما. يجب علينا، في الوقت الحاضر، أن نأخذ بعين الاعتبار الواقعة المحققّة لدى المفهرسين ، مع القبول بمناقشتها لاحقاً: يوجَد مؤلـّفان يحملان نفس العنوان وهو "في هيئة العالم"، أحدهما منسوب إلى "محمّد" والآخر إلى "الحسن".

إنَّ الحجج المقدَّمة الخاصَّة بصحَّة نسبة "في هيئة العالم" كما وصل إلينا تقتصر على اثنتين: ١- العنوان الذي ذكره المفهرسون القدامى، ٢- العبارة الختامية في إحدى مخطوطات "في هيئة العالم".

يَذكُر كُتّاب السِّيَر القدامى الثلاثة العنوان " في هيئة العالم" ضمن أسماء مؤلَّفات الحسن. ولكن، لنُذَكِّر بواقعة معروفة جيِّداً، وهي أنـَّه قبل بداية الطباعة لم تكن العناوين ثابتة قط؛ وكانت تخضع لتغيُّرات مُهمَّة في بعض الأحيان. لنأخذ مثلاً، من بين الكثير من الأمثلة، قائمةَ كتابات الحسن التي أوردها القفطي وأثبِتت صحَّة نسبة الغالبية العظمى من عناوينها. يَذكر القفطي مؤلـّفاً للحسن تحت اسم "الكرة أوسع الأجسام المجسَّمة"[١٥]، بدلاً من أن يُعطي العنوان الحقيقي: "في أنَّ الكرة أوسع الأشكال المجسَّمة التي أسطحها متساوية، وأنَّ الدائرة أوسع الأشكال المسطَّحة التي إحاطاتها متساوية".

إننا نرى أنَّ العنوان الذي أعطاه القفطي غير كامل (فهو لا يُشير إلا إلى وسع الأجسام المجسَّمة) وأقلُّ تفصيلاً. والحجّة التي تتعلـّق بعنوان من العناوين المذكورة خاصَّة من قِبَل مُفهرِس قديم، يجب أن تـُستخدَم مع المزيد من الاحتياطات. أمّا في حالة "في هيئة العالم" المنسوب إلى الحسن، فإنَّ هذا الأخير قد حرّر كتاباً آخر يبدأ عنوانه بنفس العبارة: "في هيئة حركات كلٍّ من الكواكب السبعة"، وهو المؤلـَّف الذي لم يَذكـُره أحد من المفهرسين القدامى، كما لم يذكر أحدٌ منهم كتابه الهامّ "في تمام كتاب المخروطات"؛ وهذا ما يفرض علينا مضاعفة الحذر في هذه المسألة.

---

[١٥] انظر الكتاب التالي، ص. ١٦٨:
Al-Qifṭī, *Tā'rīkh al-Ḥukamā'*, éd. Julius Lippert (Leipzig, 1903).

لنتناول الآن الجملة الختامية في إحدى المخطوطات الثلاث التي وصلت إلينا. هذه هي الجملة الختاميّة:

"وكتب هذا الكتاب من النسخة التي نُسخ [كذا] من نسخة الشيخ أبي القاسم السميساطي بخطه ذكر أنه نقلها من نسخة بخط مصنف الكتاب الشيخ أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم وقابل عليها من أولها إلى آخرها في رجب من سنة ست وسبعين وأربعمائة"[١٦].

وهكذا تُخبرنا هذه الجملة الختامية أنّ جَدَّة مخطوطة كستمونو هي مخطوطة السميساطي التي نسخها هذا الأخير سنة ١٠٨٣/٤٧٦ عن المخطوطة الأصليَّة المكتوبة بخطّ الحسن بن الهيثم. لو تحقّقت صحَّة هذا الخبر، لكان لدينا حجَّة دامغة لصحَّة نسبة "في هيئة العالم" للحسن بن الهيثم؛ ولا سيَّما أنّ السميساطي معاصرٌ لهذا الأخير. ولكنَّ ذلك غير صحيح: فهذه الجملة الختامية مشبوهة جدّاً. إنّ أبا القاسم السميساطي، بالفعل، غير مجهول. فقد ترك لنا مؤلَّفاً صغيراً عنوانه "في أنَ سطح كل دائرة أوسع من كلّ سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها"(مخطوطة اسطنبول، *Carullah 1502*، جار الله ١٥٠٢و بشير آغا ٤٤٠)[١٧]. ويُخبِرنا، من جهة أخرى، كتّاب السِّيَر القدامى والمؤرِّخون عن التواريخ وعن بعض الوقائع الخاصّة به. وهكذا يُخبرنا ابن العِماد، في "شذرات الذهَب" أنـّه في عداد الشخصيّات التي تُوُفـِّيَت خلال السنة ١٠٦١/٤٥٣، في نفس الوقت الذي تُوُفـِّيَ فيه الطبيب ابن رِضوان المعاصِر لابن الهيثم.

"وفيها (توفـِّيَ) أبو القسم السميساطي واقف الخانكاه قرب جامع بني أميَّة بدمشق. [...] علي بن محمد بن يحيى السلمي الدمشقي، روى عن عبد الوهاب الكلابي وغيره، وكان بارعاً في الهندسة والهيئة، صاحب حشمة وثروة واسعة عاش ثمانين سنة."[١٨]

---

[١٦] انظر مخطوطة كستمونو ٢٢٩٨، الورقة ٤٣و. إنَّ معنى النصَّ العربي واضحٌ. ولا يُمكن أن نُتَرْجم قابل بـِ « was checked ». ولا حاجة إلى أن يكون المرء فقيهاً كبيراً في اللغة ليفهم أنّ الفاعل للفعل قَابَلَ هو نفس الفاعل للفعل ذَكَرَ وللفعل نَقَلَ، أيْ أنّه السميساطي. ولكنّ هذا الخطأ الغريب في الترجمة (الذي لم يرتكبه لانغرمان، ص. ٤٣)هو الذي أفسد حجَّة صبرة، ص. ١٩-٢٠ والحاشية رقم ٣٤. ونجد بعد هذه الجملة الختامية تعليقاً، مفصولاً بشكل واضح في المخطوطة وهو:
" والنسخة المكتوبة منه [كذا] هذه النسخة عورض بها النسخة الأصل المذكور وهو بخط الشيخ أبي علي [كذا] بن الهيثم وصحح والحمد لله رب العالمين وكتب في رجب من السنة المذكورة.".
وهكذا يبدو، بالرغم من الأخطاء اللغوية العديدة والفاضحة التي تُعيب هذه الخطوط (وهذا ما يؤكِّد شكوكنا حول نوعية المعلومات المنقولة هنا)، أنَّ الناسخ يسعى إلى أن يستخرج من الجملة الختامية المعلومات المهمة لتحديد العلاقة بين المخطوطة التي انتهى من نسخها والمخطوطة الأصلية للمؤلِّف. وهكذا حذف الكلام على السميساطي الذي لا حاجة له به، واكتفى بالقول إنَّ النسخة (أي نسخة السميساطي) التي حرَّر عنها هذه النسخة (أي نسخة كستمونو الحالية) هي نسخة منقولة عن النسخة الأصلية للنص ومقابلة معها.

[١٧] انظر: المجلَّد الأوَّل من هذه الموسوعة، ص. ٥٨٦-٥٨٧.

[١٨] انظر: "شذرات الذهَب في أخبار من ذهَب" (بيروت، بدون تاريخ)، المجلَّد الثاني، ص. ٢٩١.

وتؤكّد هذه الأخبار مصادرُ أُخرى تاريخية وفهرسية معروفة مثل ابن عساكر وَياقوت والذهبي والنـُّعَيْمي . وهكذا يُشير ابن عساكر، في كتابه "تاريخ دمشق"، إلى دار الصوفية التي تَبرَّع بها السميساطي[١٩]. والأهمّ من ذلك هو المقال الذي كرَّسه ياقوت في كتابه "معجم البلدان" لمدينة سُمَيْسَاط. وهكذا يكتب، بعد أن حدّد موضعها الجغرافي:

"وإليها ينسب أبو القاسم علي بن محمد السميساطي السلمي المعروف بالجميش، مات بدمشق في شهر ربيع الآخر سنة ٤٥٣ ودفن في داره بباب الناطفانيين، وكان قد وقفها على فقراء المسلمين والصوفية."[٢٠]

ثمَّ يتابع:"وكان يذكر أن مولده في رمضان سنة ٣٧٧. "[٢١]

ويورِد الذهبي نفس هذه الأخبار، إلا أنـّه يعطي تاريخاً مختلفاً لولادته في رمضان سنة ٣٧٤[٢٢]، بدلاً من رمضان سنه ٣٧٧. أمّا النـُعَيْمي[٢٣] وابن التغري بردي[٢٤]، فهما يُردِّدان نفس الأخبار.

ويُخبرنا مؤرِّخون آخرون عن بعض الوقائع الخاصَّة بالسميساطي، وكلـُّهم متـَّفقون على تاريخ وفاته في سنة ٤٥٣ للهجرة.

وهكذا يكون السميساطي قد وُلِد في سنة ٩٨٤/٣٧٤ أو في سنة ٩٨٧/٣٧٧، وعاش ٧٩ أو ٧٦ سنة قمرية قبل أن يُتـَوَفـَّى سنة ١٠٦١/٤٥٣، في دمشق. وهذا ما يؤكـّد التقدير الإجمالي لابن العماد وهو أنـّه عاش ٨٠ سنة قمريّة.

ولكنّ هذه التواريخ تتناقض بشكل فاضح مع الجملة الختاميّة. فلو قبلنا، وفقاً للجملة الختاميّة، بتاريخ نسخ المخطوطة ١٠٨٣/٤٧٦، يكون السميساطي قد قام بنسخها عندما كان عمره ١٠٢ سنة أو ٩٩ سنة قمريّة. إنَّ هذا من الصعب أن يكون مُحتَمَلاً، بل إنـَّه مستحيل. ولكنَّ هذه الواقعة الفريدة لم تلفت نظر المؤرِّخين.

[١٩] انظر : ابن عساكر "تاريخ مدينة دمشق"، المجلـّد ٤٣ ، نشرة سكينة الشِّرابي(دمشق، ١٩٩٣)، ص. ١٣.
[٢٠] انظر "مُعجم البلدان" (بيروت، بدون تاريخ)، المجلـّد الثالث، ص. ٢٥٨.
[٢١] يكتب ياقوت "أبو القاسم" بدلاً من "أبو القَسَم". ويُمكن أن يكون هذا الالتباس من فعل النسّاخين أو من فعل ياقوت نفسه؛ ونجد هذا الالتباس عند مفهرسين آخرين، ولكن ليس له أي أثر، لأنَّ الأسماء والتواريخ بقيت بدون تغيير.
[٢٢] انظر : الذهبي، "سِيَر أعلام النبلاء"، نشرة ش. الأرنؤوط وغيره (بيروت ١٩٨٤)، المجلـّد الثامن عشر، ص. ٧١-٧٢.
[٢٣] انظر : النـُّعَيْمي "الدارِس في تاريخ المدارس"، نشر جَعْفر الحسني(دمشق، ١٩٥١)، المجلـّد الثاني، ص. ١٥١-١٥٢. وهو يُعطي للسميساطي تاريخ الولادة: ٩٨٣/٣٧٣-٩٨٤، وهذا ما يؤكـّد التاريخ الذي أعطاه ياقوت.
[٢٤] انظر ابن التغري بردي، "النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة"، ١٢ مُجلـَّداً (بيروت ١٩٩٢)، المجلـّد الخامس، ص. ٧٠-٧٢.

وإذا صدَّقنا، من جهة أخرى، كُتّاب السِّيَر المُتَّفقين في الرأي لوجب علينا القبول بأنّ السميساطي قد نسخ "في هيئة العالم" بعد وفاته باثنتين وعشرين سنة. وهذا قليل الاحتمال.

ومهما كانت الطريقة التي نتناول بها التاريخ الوارد في الجملة الختامية، نتحقَّق من أنـَّه مغلوط بشكل فاضح. هل هذا ناتج من خطأ نَسّاخ أم من تدخُّل مُزوِّر، كما يحدث في بعض الأحيان؟ ليس بإمكاننا أن نحسم الأمر، بسبب جهلنا للنسّاخين ولتواريخهم ولأمكنتهم. ولا يُمكن ، على كلّ حال، أن نـُثبت شيئاً استناداً إلى جملة ختامية غير متماسكة.

وهكذا يكون بديهياً أنَّ العنوان والجملة الختامية لا يسمحان بمناقشة صحَّة نسبة "في هيئة العالم" إلى الحسن؛ ولذلك يجب أن نرجع إلى المؤلَّف نفسه وإلى محتواه لكي نقارنه بكتابات الحسن الأخرى في علم الفلك.

ولكن ما إن نتفحَّص عن قرب "هيئة العالم" كما وصل إلينا، وما إن نتفحَّص محتواه، نجد أنّ نسبته إلى الحسن غير قابلة للدعم.

ولقد حُرِّر مؤلَّف "في هيئة العالم" المنسوب إلى محمَّد، وفقاً لما أورده ابن أبي أصيبعة ومؤلّف لاهور المجهول، قبل سنة ٤١٧/ ١٠٢٧، عندما كان عمر هذا الفيلسوف ٦٣ عاماً. ولقد حُرِّرَ مؤلَّف "في هيئة العالم" المنسوب إلى الحسن، وفقاً لنفس هذين المرجعين، قبل سنة ١٠٣٨/٤٢٩. فإذا افترضنا أنَّ محمّد والحسن هما شخص واحد، يجب بالضرورة أن نقبل بأنَّ هذا التحرير الثاني – أي تحرير مؤلَّف "في هيئة العالم" الموجود على قائمة الحسن– قد تمَّ بين سنة ١٠٢٧ وسنة ١٠٣٨، أي بين السنة الثالثة والستين والسنة الرابعة والسبعين من عمر المؤلِّف. وإذا ذكـَّرنا، من جهة أخرى، بأنَّ الحسن تُوفـّي بعد سنة ١٠٤٠ بزمن قصير، يكون هذا التحرير قد تمَّ في السنوات الأخيرة من حياته. ولكنّ هذه الفرضية ليست خَطِرَة فحسب، بل إنها تؤدِّي إلى تناقضات غير قابلة للاختزال.

فنحن نعرف، وفقاً لشهادات أخرى[٢٥]، أنَّ الحسن قد كتب بالفعل، خلال نفس هذه الفترة الزمنية (بين سنة ١٠٢٧ وسنة ١٠٣٨)، بعد سنة ١٠٢٨، مؤلَّفه المعنون "في حلّ شكوك في

[٢٥] انظر المجلَّد الثاني من هذه الموسوعة.

كتاب المجسطي" . ولقد أعلن في هذا المؤلـّف، دون أيّ التباس، أنَّ "في جميع المجسطي شكوك أكثر من أن تـُحصى". ولنلاحظ أيضاً أنّ الحسن ابن الهيثم يَذكُر في هذا المؤلَّف مؤلَّفاً آخر له هو "كتاب المناظر" الذي يتضمَّن الإصلاح المعروف الذي قام به والانتقاد الجذري لنظرية الشعاع الضوئي. ولكنَّ مؤلِّف "في هيئة العالم"، الذي قد حُرِّر وفقاً لابن أبي أصيبعة ولمؤلـّف لاهور المجهول خلال الفترة ١٠٢٧-١٠٣٨، يتبنـّى بدون أيّ تساؤل، هذه النظرية المرفوضة. وذلك أننا نقرأ فيه:

" والشعاع يخرج من أبصارنا على شكل مخروط رأسه نقطة البصر وقاعدته سطح جرم المبصر"[٢٦].

ونحن نعرف أيضاً أنّ الحسن ابن الهيثم، في مؤلَّفه " في ضوء القمر" الذي حرَّره في فترة مبكِّرة نسبيّاً لأنّ ابن رضوان كان قد نسخه في القاهرة يوم الجمعة ٧ آب/أغسطس سنة ١٠٣١، ينتقد النظرية القائلة إنَّ القمرَ جسمٌ صقيل يعكس ضوء الشمس. ولكنَّ هذه النظريّة هي بالتحديد تلك التي يتبنـّاها مؤلِّف "في هيئة العالم". فهو يكتب، بالفعل:

"وذلك أنَّ القمر لا نور له وإنما يكتسب النور من ضوء الشمس وهو جسم صقيل إذا قابلته الشمس قبل نورها واستنار بضوئها وانعكس ذلك النور من سطحه إلى الأرض فأنارت "[٢٧].

وهكذا يبرهن الحسن ابن الهيثم، في القضية ٧ والقضايا اللاحقة لها في مؤلَّفه "في ضوء القمر"، أنَّ "الضوء المنبعث من القمر إلى الأرض لا يكون بالانعكاس". فعلينا أن نستنتج في هذه الحالة أنـّه يتناقض مع نفسه، وهذا خُلـْفٌ.

وإذا أبقينا على الفرضيّة القائلة بأنـّه لا يختلف عن شخص محمَّد، نحن نعلم وفقاً لابن أبي أصيبعة ولكاتب لاهور المجهول، أنـّه كتب مؤلَّفات تنتقد كلها بطلميوس ("الشكوك على بطلميوس" و"حركة الالتفاف" وَ "حلّ شكوك حركة الالتفاف")[٢٨] بين سنة ١٠٢٧ وسنة ١٠٣٨. ولكنّ نقطة البداية لمؤلِّف "في هيئة العالم" واضحة، فهو يكتب "وقولنا في كل الحركات إنما هو بحسب رأي بطليموس"[٢٩]، أيْ أنّ هذه الأقوال لا تتضمَّن أيّ نقد ممكن مهما قَلَّت أهميته لنظرية الكواكب الواردة في المجسطي. والمؤلـّف يتبع بالفعل خطوةً خطوةً كتاب بطلميوس؛ فهو يتكلَّم عن المحاذاة[٣٠] في حركة القمر، بينما لا يذكرها الحسن في كتاباته؛ ويتكلَّم عن نقطة مُعدِّل المسير، بينما يرفضها الحسن... إلخ. وهذا يعني، إذا أبقينا

[٢٦] انظر تحقيق لانغرمان، ص. ٤٢.
[٢٧] انظر تحقيق لانغرمان، ص. ٤٤.
[٢٨] انظر ما ورد في هذا المجلّد الخامس من هذه الموسوعة.
[٢٩] انظر تحقيق لانغرمان، ص. ٦.
[٣٠] انظر تحقيق لانغرمان، ص. ٤٢.

على فكرة التطابق بين الشخصين، أنّ الرياضيّ ابن الهيثم قد كتب خلال نفس السنوات عن نفس الرأي وضدِّه.

ولكنَّ استحالة فكرة التطابق بين الشخصين لا تتوقَّف عند هذه النتيجة. فالهدف المُعلَن فعلاً لمؤلَّف "في هيئة العالم" هو تقديم أفلاك الكواكب، استناداً إلى بطلميوس، على شكل حركات بسيطة ومتواصلة لكرات صلبة. يتعلّق الأمر إذاً بتركيب لنظرية الكواكب الواردة في المجسطي مع هيئة مستوحاة من الفلسفة الأرسطيّة، ولكن بدون طرح أي مسألة من المسائل التقنيّة التي يُثيرها مثل هذا المشروع، وبدون حلّ صعوبات الرياضيات الفلكية الناتجة منه. ولكن يكفي أن نتصفحَّ كتابات الحسن في الفلك والمناظر وميكانيكا السكون لنتحقَّق من أنّ هذه المسائل التقنية كانت تهُمُّه دائماً، وأنّ كتاباته، على كلِّ حال، كانت على مستوى نظريّ وتقنيّ أرفع بكثير من مستوى "في هيئة العالم". لقد عالج الحسن في كل كتاباته الفلكية، بدون استثناء وعلى المستوى التقنيّ اللازم، مسألة تلاؤم الهيئات الهندسية مع وقائع الحركات السماوية. ولقد قام، بالتأكيد في بعض الأحيان، مثلما فعل في كتابه حول حركة الالتفاف[٣١]، بدراسة التركيب بين الهيئة الهندسية والوصف الفيزيائي للحركة، ولكنه استخدم دائماً لأجل ذلك التقنيّة التي تتطلَّبها المسألة. وهو يتصرَّف دائماً كرياضي فلكيّ، بينما يبدو مؤلَّفُ "في هيئة العالم" كأنـَّه من عمل أحد الفلاسفة.

ويُمكن أن نـُضيف إلى هذه الاختلافات العديدة وغير القابلة للاختزال بين مشروع الحسن وطريقته وأسلوبه وبين مشروع وطريقة وأسلوب مؤلَّف "في هيئة العالم"، عدَّة اختلافات أخرى مماثلة في وضوحها. يُعدِّد مؤلـّف "في هيئة العالم"[٣٢] الحركات السماوية الواردة في المجسطي؛ فيجد منها سبعاً وأربعين حركة: الحركةَ اليومية والحركةَ البطيئة للنجوم الثابتة، وثماني عشرة حركة للكواكب العليا، وحركتين للشمس، وثماني حركات للزهرة، وتسع حركات لعطارد، وست حركات للقمر، وحركتين لعالم ما تحت القمر(الثقيل والخفيف)[٣٣]. ويُذكِّر المؤلِّف، هنا أيضاً، بأنـّه يستند إلى "بحوث بطلميوس وأرصاده لكلّ الحركات السماوية". ولكنَّ الحسن يقوم، في مؤلـّفه " الشكوك على بطلميوس"، بنفس التعداد، ولكن لحركات الكواكب السبعة المتحيِّرة فقط، فيجد ستـّاً وثلاثين حركة. فهو لا يعدُّ الحركتين الأولـَييْن ولا يحسب بالطبع الحركتين الأخيرتين، كما أنـّه يُنقص حركة لكلّ كوكب من

[٣١] إنَه يقوم بالفعل، في "حركة الالتفاف" بمناقشة تقنيّة ليُبيِّن الخطأ الذي ارتكبه بطلميوس عندما افترض أنّ المنشورات الكروية تُحرِّك فلك التدوير. فهو يُبرهن أنّ مثل هذه الفرضية تؤدِّي إمّا إلى أن هذه المنشورات الكروية تبتعد عن موضعها وإمّا إلى أن يخضع فلك التدوير للتأرجح، وهذا مستحيل في الحالتين. وهو يُثير مسائل تخصّ الفلكيات الرياضية، مثل مسألة الأقطار التي تبقى في جِوار مركز فلك البروج. كلُّ هذا ليس له أي علاقة بمؤلـَّف "في هيئة العالم".

[٣٢] انظر تحقيق لانغرمان، الفقرة ١٣٨، ص. ٢٥.

[٣٣] انظر تحقيق لانغرمان، ص. ٦٥.

الكواكب لأنّه لا يحسب الحركة اليومية لكلٍّ كوكب منها، لأنها تُحرِّك الكلّ. يكفي هذا الاختلاف، في تعداد بسيط للحركات، للتمييز من جهة بين الحسن ابن الهيثم الذي كان يفهم المسألة بعمق، ومن جهة أخرى، بين المؤلِّف الآخر لـِ "في هيئة العالم"، الشارِح لأعمال بطلميوس، مثل محمَّد بن الهيثم. ويُمكننا أيضاً أن نُضيف وقائع أخرى مماثلة في طبيعتها، مع العلم أنَّ بعضها لم يَكُفَّ عن إزعاج محقّق "في هيئة العالم".

كلُّ شيء يجعل كتابات الحسن تتناقض مع "في هيئة العالم": المشاريع والمناهج والأسلوب والوقائع العلمية، وذلك في علم الفلك أو في علم المناظر. والحجّة التاريخية الوحيدة، وهي الخاصّة بالجملة الختامية، غير متماسكة وغير صحيحة. إنَّ نسبة "في هيئة العالم" إلى الحسن تزيد بالالتباس بين المؤلـّفين وبين كتاباتهما، كما تؤدّي إلى تعليل مغلوط لفلكيات هذا الأخير، كما تَتَّهِمه بانفصام خطير بالشخصية العلمية، مع أنَّ هذا الانفصام لم يظهر في أيٍّ من المجالات العلمية العديدة التي عمل فيها. إنَّ الادِّعاء، كما جرى حديثاً، بشكل اعتباطيّ وبدون أيّ برهان، بأننا أمام عمل للمؤلِّف في أيام شبابه، لا يقوى أمام حجَّة التواريخ التي أعطاها كُتّاب السِّيَر القدامى. لقد ذكَّرنا بأنّ الحسن، بعد سنة ١٠٢٨، كان يعالج شكوك المجسطي، أيْ أنّه كان على نقيض من يتبع بطلميوس في كلّ التفاصيل كما فعل مؤلِّف "في هيئة العالم" في علم الفلك وفي علم المناظر. والتناقض يبرز بشكل أوضح إذا أَرَّخنا تحريرَ المؤلَّف، كما فعل ابن أبي أصيبعة ومؤلِّف لاهور المجهول، بين سنة ١٠٢٧ وسنة ١٠٣٨. وإذا أردنا، من جهة أخرى، أن نُبرهنَ أنَّ المؤلِّف قد حرَّر الكتاب في أيّام شبابه، يجب أن نشرح بشكل دقيق المسارات التي تؤدِّي إلى الأعمال الأخرى التي حرَّرها المؤلـّف في فترة النضوج. ولكن أحداً من أولئك، الذين جازفوا بقول مشابه لهذا القول، لم يتطرَّق قط إلى البحث عن مثل هذه المسارات. ولا يوجَد، على كلِّ حال في رأينا، أيَّ مسار يربط مؤلَّف "في هيئة العالم" إلى كتابات الحسن بن الهيثم الأخرى.

متى حصل هذا الالتباس في نسبة هذا المؤلـَّف؟ كلُّ شيء يدلُّ على أنـَّه كان موجوداً عند كتّاب السِّيَر- مثل ابن أبي أصيبعة- وكذلك عند أساتذة علم الفلك من الدرجة الثالثة مثل الخِرَقي[٣٤]. ولكن الجدير بالملاحظة أنّ أيّاً من علماء الفلك الكبار، وفقاً لمعرفتنا، لم يقع في هذا الالتباس. وهكذا يذكر العرضي كتاب "الشكوك"، ويُشير الطوسي إلى كتاب "حركة الالتفاف"، ولكن أحداً منهما لم يرفق اسم الحسن بمؤلـّف "في هيئة العالم"، كما لم يفعل ذلك أيّ عالم للفلك من مستواهما.

[٣٤] انظر: منتهى الإدراك في تقسيم الأفلاك، مخطوطة المكتبة الوطنية في باريس رقم ٢٤٩٩، الورقة ٢ظ.

وهكذا نؤكّد بوضوح، وبدون إمكانيّة للتناقض مع الوقائع، أنّ مؤلّف "في هيئة العالم" الموجود لدينا ليس من تأليف الحسن ابن الهيثم، ولكنَّه على أرجح الاحتمالات من تأليف محمّد ابن الهيثم. أمّا العنوان " في هيئة العالم" المنسوب إلى الحسن فقد يكون اسم كتاب لم يصل قط إلينا أو قد يكون – وهذا تخمين فقط – نتيجة تحوير لعنوان كتابه "في هيئة حركات كل من الكواكب السبعة" الذي قد أمكن أن يُكتَب "في هيئة حركات الكلّ"... ولكن، إذا كان صحيحاً أنَّ هذا التخمين ينتظر نتائج البحث المستقبلي قبل أن يُثبَت أو يُرفض، فإنَّ نسبة "في هيئة العالم" إلى الحسن أصبحت الآن غير مقبولة.

قد يكون من العجب أن يُنسب مؤلَّفُ "في هيئة العالم"، خطأ، إلى الحسن ابن الهيثم، ولكنَّ مثل هذا الالتباس لم يحصل في هذه الحالة الوحيدة فقط؛ فلقد حصل حديثاً أن نُسِب إلى هذا العالِم الرياضيّ والفلكيّ البارز الحسن بن الهيثم، وبلا أيِّ تردُّدٍ، شرحٌ للمجسطي، مع أنَّه كُتب بهدفٍ تربويّ، وأنَّه موافقٌ تماماً لنظرية بطلميوس ومنسوبٌ بوضوح إلى محمّد بن الهيثم[٣٥].

لنلاحظ في النهاية أنَّه قد وجب علينا، هنا وفي مواضع أخرى، لكي نقوم بالتفحُّص النقدي للنصوص ولكي نكتب تاريخاً دقيقاً للتقليد النصّيّ، أن نستخدم التقليدَ المفهوميَّ، أيْ أن نتفحَّص المحتوى العلمي للنصّ. فهل توجَد طريقة أخرى للوصول إلى هذا الهدف؟

[٣٥] هذا الخطأ هو نتيجة خطأ آخر أدَّى بعبد الحميد صبرة (انظر:*Dictionary of Scientific Biography*, ، المجلَّد السادس، ص. ٢٠٦-٢٠٨) إلى أن ينسب إلى الحسن بن الهيثم تلخيصاً مكتوباً بقلم محمّد بن الهيثم لكتاب ابن سنان "في آلات الأظلال". انظر لأجل ذلك، المجلَّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٥٠ - ٥٥ وَ ص. ٤٥٥- ٤٥٩ .

الملحق الثاني

آلة ابن الهيثم

لقد لاحظنا أنّ ابن الهيثم يستعيد في مؤلَّفه "هيئة الحركات" بعض النتائج والمسائل التي كان قد تناولها في كتاباته الأخرى. وهكذا نجد فيه مبرهنة كان قد برهنها في كتابه "في خطوط الساعات"، كما نجد المسألة التي كان قد عالجها في كتابه "في ما يعرض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب" . كلٌّ شيء يدلُّ على أنه يتناول فيه أيضاً من جديد عملَ آلة صالحة لتحديد ارتفاعات الكواكب، كان قد قام به في كتابه "في تصحيح الأعمال النجومية"(انظر مخطوطة بودليان ms Oxford, Bodleian Library, Seld. A32).

يُذكِّر ابن الهيثم، في تمهيد "هيئة الحركات" أنَّ الكتاب الثالث من هذا المؤلَّف مكرَّس لدراسة آلة تسمح بحساب مضبوط بالدقائق وأجزاء الدقائق لارتفاعات الكواكب المتحيِّرة. وهو يكتب:

"ثم نتمم هذه الصناعة، وننقذ أهلها من غصّة التأليف على إدراك الدقائق والأجزاء الصغار من ارتفاع الشمس وسائر الكواكب بشرح آلة قريبة المأخذ ممكنة لكل أحد يعرف بها ارتفاع الشمس وكل كوكب من الكواكب بدقائقه وأجزائه الصغار ليصح بذلك وبما نذكره من الأعمال جميع الأعمال النجومية، ويزول به جميع الاختلاف الذي يقع في الأصول من أجل الكسور التي تفوت الراصدين، ويتعذر عليهم إدراكها من أجل صنعة الآلات."(انظر أعلاه، ص. ٢٨٥-٢٨٦)

وهو يشير إلى هذه الآلة مستخدماً نفس الكلمات، في كتابه "في تصحيح الأعمال النجومية". ولكنّ وصفَ هذه الآلة في هذا المؤلَّف، كما في مؤلّف "هيئة الحركات"، غير موجود للأسف؛ وربّما كان ذلك لنفس الأسباب. وذلك أنَّ المقالة المخصَّصة له في مؤلّف " هيئة الحركات" مفقودة، في حين أنَّ ناسخ مؤلّف "في تصحيح الأعمال النجومية" يؤكّد أنّ ابن الهيثم قد نسيَ أن يصفه في نسخته الأصلية. هل كان سبب ذلك أنـّه لم يكن بعدُ قد فرغ من تنقيحه؟ أم أنّه كان قد قرَّر إضافته إلى مؤلَّف "هيئة الحركات" الذي كان مشروعُ تحريره حاضراً في ذهنه، أو أنّه بكل بساطة قد فُقِد من النسخة الأصلية؟ ليس لدينا أي وسيلة

للجواب على هذه الأسئلة. إنَّ أحسن ما يمكننا أن نفعله هو أن نتوقَّف عند تمهيد مؤلَّفه "في تصحيح الأعمال النجومية":

(١٣٢ظ) المقالة الثانية من "تصحيح الأعمال النجومية"

قد بيّنا في المقالة الأولى أن كثيراً مما يستعمله المنجمون من الأعمال النجومية مخالف للصواب، وأن كثيراً من المعاني التي يقربون فيها هي بعيدة من التحقيق. وبيّنا مع ذلك أشياء لم ينتبه عليها أحد من المتقدمين ولا المتأخرين ونحن نبيّن في هذه المقالة كيف تحقق المعاني التي عوَّل فيها المنجّمون على التقريب، وكيف يُستدرك ما يفرِّطون فيه، وكيف يستقصى ما يتسمحون به من الكسور الصغار. والذي نحققه من المعاني النجومية هو مواضع الكواكب من أفلاكها التي تخصها وأبعادها عن معدل النهار، ومقادير ارتفاعاتها في الأوقات المعلومة عن الآفاق المعلومة، والطالع من دائرة البروج في أفق المشرق، وكيف يستخرج الطالع من ارتفاع كل واحد من الكواكب السبعة، وكيف يستخرج الدائر من الفلك والساعات من ارتفاعات هذه الكواكب وما أمكن فيه غاية التحقيق من هذه المعاني حقّقناه من غير استعمال شيء من التقريب، وما لم يُستغن فيه عن التقريب استقصينا التقريب فيه إلى أن نصل إلى الحد الذي ليس* بينه وبين غاية التحقيق اختلاف يؤثر في حقيقته.

ثم نتبع ذلك بعمل آلة صغيرة المقدار قريبة المتناول متيسرة العمل نستخرج بها الارتفاع ومواضع الكواكب بالدقائق والثواني؛ وهي التي ضمنا عليها في صدر المقالة الأولى، ونستخرج (١٣٣و) الطريق إلى عملها وترتيبها والعمل بها.

وهذه الآلة التي بها يُستدرك أكثر ما يقصر فيه المنجّمون ويعجزون عن تحقيقه ويجنحون إلى التقريب فيه لأنهم لا** يقدرون على الدقائق والكسور الصغار في الارتفاع ولا في مواضع الكواكب في إرصادها لعدم الكسور الصغار في آلاتهم.

وهذه الآلة ما تنبّه عليها أحد من المتقدمين ولا المتأخرين ولا خطرت بقلوبهم ولا سمت همة أحد منهم إلى الطمع فيها وهذه الآلة عظيمة المنفعة في جميع الأعمال النجومية التي هي مستخرجة من الارتفاع ومن آلات الرصد التي تحصل*** بها مواضع الكواكب في أوقات إرصادها.

*في الهامش مع الإشارة- ** فوق السطر- *** يحصد.

ويكتب ابن الهيثم، في أواخر الكتاب، في الموضع الذي كان يجب أن يصف فيه الآلة ويشرح صنعته:

وقد بقي علينا أن نشرح هذه الآلة التي تخرج الارتفاع بالدقائق* والثواني، ونشرح كيفية عملها والعمل بها فنقول (١٦٢و).

*فالدقائق

وهنا ينتهي النص ويكتب الناسخ:

تمت المقالة، هذا آخر ما وجد بخطه رحمه الله، ولم يُتم عمل الآلة، والحمد لله وحده، بلغ على أصله (١٦٢و).

ولنلاحظ أنّ المخطوطة قديمة. ولقد نُسخت قبل بداية القرن الثالث عشر، على أبعد تقدير (قبل ١٢٣٥)، عن نسخة أصلية لابن الهيثم.

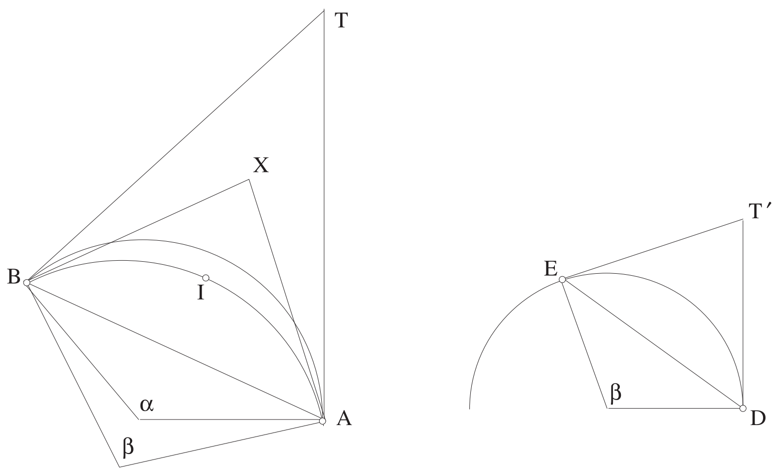
يكفي أن نقرأ هذا التمهيد وتمهيد مؤلـّف "هيئة الحركات"، في آن واحد، لنتحقـّق من أنّ هناك تطابقاً في المسائل المتناولة وشبه تطابق في العبارات الخاصة بالآلة وبصنعتها وباستخدامها. وكانت معدَّة لتـُستخدَم لتسجيل الدقائق والثواني والكسور الصغيرة عند تحديد وحساب ارتفاعات الكواكب المتحيِّرة على مداراتها، لأفق معلوم، وهذا ما كان يسمح، كلما كان ذلك ممكناً، بالقيام بحساب صحيح أو بتحسين التقريب على الأقلّ بشكل مُهمّ. إنَّ فـُقدان القسم الثاني، وخاصة القسم الثالث من "هيئة الحركات" وكذلك توقُّف النصّ الفـُجائي في مخطوطة "في تصحيح الأعمال النجومية"، وقلّة المعلومات التي أوردها ابن الهيثم عن هذه الآلة في تمهيديْ المؤلـّفين، كلُّ هذا لا يسمح لنا بأن نكوِّن فكرة، ولو كانت تقريبية، عن هذه الآلة.

تعليقات إضافيّة

[١] إذا كانت 2α، $2\alpha_1$، 2β وَ $2\beta_1$ قياسات الزوايا المركزية المُرفقة بالأقواس $\widehat{AB}$، $\widehat{BC}$، $\widehat{DE}$، وَ $\widehat{EG}$ ، حسب الترتيب، يكون معنا وفقاً للفرضيات: $\frac{\pi}{2} > \alpha + \alpha_1 > \beta + \beta_1$ وَ $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1}$؛

فيكون معنا إذاً: $\frac{\alpha}{\alpha + \alpha_1} = \frac{\beta}{\beta + \beta_1}$ وبالتالي $\alpha > \beta$.

ولكنَّ الزاوية التي يُشكِّلها الخطّ AB مع الخطّ المماس في A للقوس $\widehat{AB}$، هي α والزاوية التي يُشكِّلها DE مع الخطّ المماس في D للقوس $\widehat{DE}$ هي β، والزاوية التي يُشكِّلها AB مع الخطّ المماس في A للقوس $\widehat{AIB}$ المشابهة للقوس $\widehat{DE}$ تكون أيضاً مساوية للزاوية β؛ يكون معنا $\alpha > \beta$ ، فينتج من ذلك موضع القوس $\widehat{AIB}$.



إذا كانت T نقطة التقاطع بين الخطّين المماسّين في A وَ B للقوس $\widehat{AB}$ وكانت T' نقطة التقاطع بين الخطّين المماسّين في D وَ E للقوس $\widehat{DE}$، يكون معنا:

$\widehat{ATB} = \pi - 2\alpha$ وَ $\widehat{DT'E} = \pi - 2\beta$ ، فيكون $\widehat{DT'E} > \widehat{ATB}$.

تقع القوس $\widehat{AIB}$ في داخل الزاوية $\widehat{AXB}$ وهي الزاوية المُشكَّلة بين الخطَّين المماسَّين في A وَ B، ويكون معنا: $\widehat{ATB} < \widehat{DT'E} = \widehat{AXB}$ ، فتكون "الزاوية التي تقع فيها أعظم من الزاوية التي تقع في قوس $\widehat{AB}$" (انظر ص. ٢٨٩).

[٢] يُدخل ابن الهيثم، في عدّة مناسبات، قوسين تكون كل منهما مشتركة أو غير مشتركة مع ربع دائرة، أو قوسين مشتركتين بينهما أو غير مشتركتين.

* إذا كانت كلٌّ واحدة من القوسين مشتركةً مع ربع دائرة، تكون القوسان مشتركتين بينهما.

* إذا كانت إحدى القوسين مشتركةً مع ربع دائرة وكانت الأخرى غير مشتركة مع ربع دائرة، تكون القوسان غير مشتركتين فيما بينهما.

* ولكن، إذا كانت كل واحدة من القوسين غير مشتركة مع ربع الدائرة، يمكن أن تكون القوسان مشتركتين أو غير مشتركتين فيما بينهما.

[٣] إنّ لدينا، وفقاً للفرضيّات، $\widehat{BE} < \widehat{BD} < \frac{1}{2}\widehat{BDA}$ ؛ والقطران d_1 وَ d_2 للدائرتين (IE) وَ (CD) يُحققّان $d_2 < d_1$ ، كما تقطع الدائرة (CD) المستوي الموازي للأفق المارّ بالنقطة B.

وهذا يتطلّب أن تكون الكرة مائلة نحو الجنوب، أي في اتجاه B، كما تقول الفرضية. ولو كانت الكرة منتصبةً أو مائلة باتجاه A، لما أمكن أن يكون معنا $d_2 < d_1$ مع $\widehat{BE} < \widehat{BD}$ إلا في الحالة التي يكون فيها $\widehat{BD} < \frac{1}{2}\widehat{BDA}$.

[٤] يُميِّز البرهان بين حالتين للقوس $\widehat{CDL}$:

١) $\widehat{CDL}$ أصغر من نصف دائرة أو مساوية لها، ٢) $\widehat{CDL}$ أعظم من نصف دائرة.

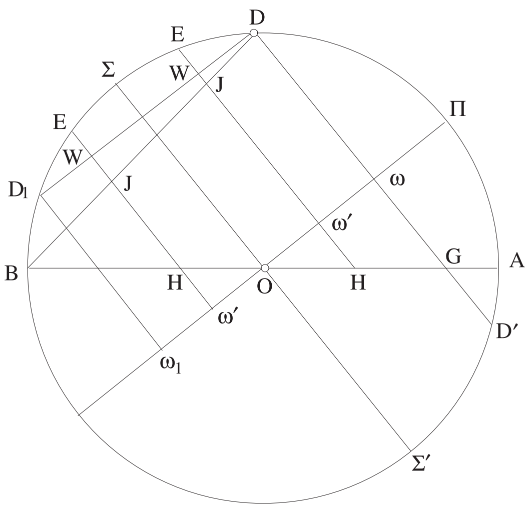
يكون مركز الدائرة ω، في الحالة الأولى، تحت المستوي الأفقي AB، وهذا غير ممكن إلا إذا كان المستوي AB غير متطابق مع الأفق نفسه.

ويكون مركز الدائرة ω، في الحالة الثانية، فوق المستوي الأفقي AB الذي يُمكن أن يكون متطابقاً مع الأفق أو فوق الأفق.

ويتطلّب البرهان، عندما تكون $\widehat{CDL}$ أعظم من نصف دائرة، فرضية إضافية: $\frac{HE}{HJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$.

لندرس المتباينة $\frac{HE}{HJ} \geq \frac{d_1}{d_2}$ في الحالة التي يكون فيها ω مركز الدائرة CD فوق المستوي الأفقي AB. لتكن O المكان المعني بالأمر، وليكن محور العالم $O\Pi$، وليكن $\Sigma\Sigma'$ قطر دائرة معدِّل النهار.

ولنضع $r_1 = \omega'E$ ، $r_2 = \omega D$ ($2r_1 = d_1$ ، $2r_2 = d_2$).



١) الحالة التي يكون فيها AB الأفقَ؛ وتكون ω بالفرض فوق الأفق.

ليكن $DD_1 \perp O\Sigma$، فيجب أن تكون النقطة E على القوس $\widehat{DD_1}$. يقطع الوترُ EH الخطَّ DD_1 على النقطة W بين J وَ E، لأنّ الزاوية $\widehat{BDG}$ حادَة والزاوية $\widehat{GDD_1}$ قائمة. يكون معنا

$r_1 = \omega'E$ وَ $r_2 = \omega D = \omega'W$ $\Leftarrow$ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega'E}{\omega'W}$.

ويكون معنا في جميع الحالات : $\frac{\omega'E}{\omega'W} > \frac{\omega'E}{\omega'J}$، فيكون $\frac{r_1}{r_2} > \frac{\omega'E}{\omega'J}$.

يكون معنا $\omega'E > \omega'J > \omega'H$.

ونطبّق في هذه الحالة المقدّمة التالية: $a > b > c \Leftarrow \frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

- إذا كانت E على القوس $\widehat{\Sigma D_1}$ تكون O بين ω وَ ω'، فيكون: $\omega' E - \omega' H = HE$ ، $HJ = \omega' J - \omega' H$، فإذاً $\frac{HE}{HJ} > \frac{\omega' E}{\omega' J}$، فنحصل على $\frac{HE}{HJ} > \frac{r_1}{r_2}$.

- إذا كانت E في النقطة Σ، تكون ω' في O، ويكون $O = \omega' = H$ ، فإذاً $\frac{HE}{HJ} > \frac{r_1}{r_2}$.

- إذا كانت E على القوس $\widehat{\Sigma D}$، تكون ω' بين O وَ ω ، ويكون معنا:

$\omega' E + \omega' H = HE$ وَ $\omega' J + \omega' H = HJ$ ، فيكون إذاً $\frac{HE}{HJ} > \frac{\omega' E}{\omega' J}$ وَ $\frac{\omega' E}{\omega' J} > \frac{r_1}{r_2}$.

ولا يُمكن إذاً أن نحسم الأمر بخصوص النسبة $\frac{HE}{HJ}$.

ويكون معنا في الحالة النهائيّة:

$\omega = \omega'$ ، $G = H$ ، $D = E = J$ ، $r_2 = r_1$ ، فيكون $\frac{HE}{HJ} = \frac{r_1}{r_2} = 1$.

٢) يُمكن أن تكون الزاوية $\widehat{BDG}$ حادّة أو قائمة أو منفرجة، في الحالة التي يكون فيها AB فوق الأفق.

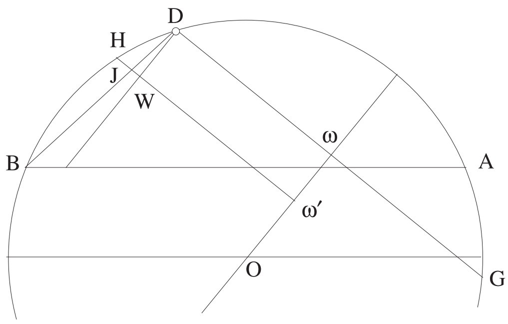
أ) إذا كان $\widehat{BDG} \geq$ زاوية قائمة، يكون معنا $\omega' J \geq \omega' W$ وَ $\frac{\omega' E}{\omega' W} \geq \frac{\omega' E}{\omega' J}$، فيكون $\frac{r_1}{r_2} \geq \frac{\omega' E}{\omega' J}$

ونتابع العمل كما فعلنا في الحالة (١). فيكون إذاً:

. إذا كانت ω' تحت المستوي AB، يكون معنا $\frac{HE}{HJ} > \frac{r_1}{r_2}$؛

. إذا كانت ω' فوق المستوي AB ، لا يمكن أن نستخلص النتيجة.

ب) إذا كان $\widehat{BDG} <$ زاوية قائمة، تكون J بين E وَ W ، فيكون $\frac{r_1}{r_2} < \frac{\omega' E}{\omega' J}$؛ فلا يمكن أن نستخلص النتيجة.



[٥] يتطلّب البرهان الفرضية الإضافية $\widehat{EI} \leq \widehat{CD'L}$ التي ليست مُحقّقة دائماً.

لندرس هذه الفرضية في الحالة التي يكون فيها ABC الأفقَ و IE دائرةَ معدِّل النهار. يكون معنا حينئذ $\frac{\pi}{2} = \widehat{EI}$. ويكون معنا أيضاً:

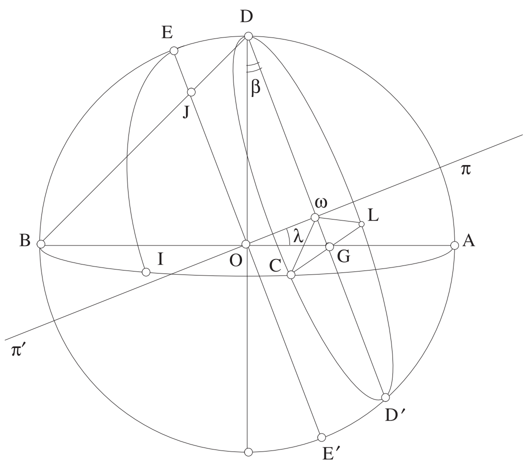
$$\widehat{EI} \leq \widehat{CD'L} \iff \frac{\pi}{2} \leq \widehat{C\omega L} \iff \frac{\pi}{4} \leq \widehat{C\omega G} \iff \cos\widehat{C\omega G} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ،

$$\cos\widehat{C\omega G} = \frac{\omega G}{\omega D} = \frac{\omega G}{\omega C}$$.

إذا وضعنا $\widehat{ED} = \beta$ وإذا رمزنا إلى العرض بـِ λ ، يكون معنا:

$R.\cos\beta = \omega D = \omega C$ ، $R.\sin\beta = O\omega$ ، $\omega G = O\omega \operatorname{tg}\lambda = R.\sin\beta.\operatorname{tg}\lambda$، فيكون إذاً:

$\cos\widehat{C\omega G} = \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\lambda$.



يكون معنا في هذه الحالة الخاصّة:

$$\widehat{EI} \leq \widehat{CD'L} \iff \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$ ،

وهذا هو الشرط الذي لا يتحقَّق دائماً.

مثال: إذا كان $\lambda = 60°$، فإنّ الدائرة CD تقطع الأفق عندما يكون $\beta < 30°$ ؛ ولكنّ الشرط (*) لا يتحقَّق إلا إذا كان:

$$\text{tg}\,\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}، \text{ أو } \text{tg}\,\beta \geq \frac{\sqrt{6}}{6}، \text{ أيْ } \beta < 22°12' .$$

[٦] الموضع المنسوب إلى فلك البروج

إذا كانت P وَ P' قطبيْ فلك البروج، يوافق كلَّ نقطة M من الكرة نصفُ دائرة عظمى $P'MP$ تقطع فلك البروج على النقطة M'. وهكذا نُعرِّف تحويلة f بحيث يكون $f(M) = M'$؛ والنقطة M' هي "موضع M المنسوب إلى فلك البروج". وإذا كان λ وَ l ، حسب الترتيب، طول وعرض النقطة M بالنسبة إلى فلك البروج، فإنّ طول M' هو l وعرضها معدوم. وهكذا تحفظ التحويلة f الطولَ وتـُعدِم العرضَ: $M'(l, 0) = f[M(l, \lambda)]$.

[٧] إنَّ النقاط الموجودة بين النقطتين A وَ B، والتي تدخل في هذه الفقرة المكرَّسة لحركة القمر، هي النقاط المماثلة للنقاط التي تدخل في دراسة حركة القمر والتي هي موجودة بين B، نقطة شروقه، و N، نقطة مروره على نصف النهار. والنقاط المسماة هنا A، B، D، G وَ K هي بالترتيب النقاط المماثلة للنقاط B، N، I، M وَ S على الشكلين ٨١-١ وَ ٨١-٢(ص.١٩٨). تكون النقطة M ، في الدراسة الأولى، بشكل عام تحت أو فوق الدائرة الزمانية المارة بالموضع الأوَّلي B. ولقد أشار المؤلِّف إلى أنـَّها يمكن أن توجَد بشكل استثنائيّ على هذه الدائرة؛ ويكون حينئذ $M = L$. ويقدّم المؤلِّف نفس الملاحظة بالنسبة إلى النقطة G قائلاً: "فتكون نقطة $\overline{\text{ز}}$ إما جنوبية عن دائرة $\overline{\text{اد}}$ وإما شمالية"(انظر ص. ٣٧٣، س١٩-٢٠)؛ فتقطع الدائرةُ GC، في الحالة العامة، الدائرة AD في نقطة R مختلفة عن النقطة G. ويُمكِن، بشكل استثنائيّ، أن تكون النقطتان G وَ R متطابقتين. والنقطة R هي النقطة المماثلة للنقطة L. ويجري الاستدلال هنا في الحالة التي يكون فيها $G \neq R$ ، لأنَّ النقطة K موجودة على الدائرة الزمانية AD، وذلك أنَّ ابن الهيثم يكتب: "وقوس $\overline{\text{زك}}$ موازية

لدائرة البروج" ثمَّ يقول إنها " بمقدار حركة الجوزهر في الزمان المعلوم"(انظر ص.٣٧٤، س ٥ وَ ٩). وهكذا لا يفترض أن تكون النقطة G على الدائرة الزمانية للنقطة A.

[٨] ميل فلك عطارد أو فلك الزهرة بالنسبة إلى فلك البروج

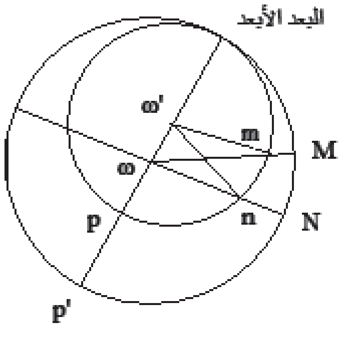
يبلغ الميل أقصاه عندما يكون مركز فلك التدوير في البعد الأبعد A أو في البعد الأقرب P على الفلك الخارج المركز. وهذا الميل معروف تبعاً لبطلميوس.

وينعدم الميل عندما يكون مركز فلك التدوير في النقطة n على خط تقاطع الفلك مع مستوي فلك البروج، فينطبق مستوي الفلك مع مستوي فلك البروج.

ليكن m موضعاً متوسِّطاً لمركز فلك التدوير على الفلك الخارج المركز. توافق النقاطُ A، m وَ n ، النقاطَ A ، M ، وَ N ، على الفلك ذي المركز ω الذي هو مركز العالم.

وعندما يمرّ الفلك من الموضع ذي الميل الأقصى إلى الموضع ذي الميل المعدوم، ترسم النقطة m القوس $\widehat{nA}$ من الفلك الخارج المركز الذي له المركز ω'، وترسم النقطة M ربع الدائرة $\widehat{NA}$ على الدائرة ذات المركز ω.

القوس $\widehat{NA}$ هي ربع دائرة والقوس $\widehat{nA}$ الموافقة لها على الفلك الخارج المركز معلومة: $\alpha = \widehat{nA}$.

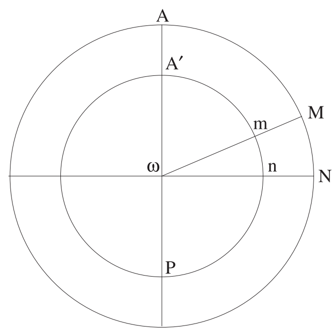


والقوسان $\widehat{NM}$ وَ $\widehat{nm}$ معلومتان في كلِّ لحظة.

ليكن i_m الميل الأقصى الموافق للبعد الأبعد، وليكن i ميل الفلك عندما يكون مركز فلك التدوير في m؛ يكون معنا $\frac{i}{i_m} = \frac{\widehat{nm}}{\widehat{nA'}}$ (انظر الصفحة ٢٢٤).

يعطي النصُّ هنا $\frac{i}{i_m} = \frac{\widehat{NM}}{\widehat{NA}}$؛ وهذا ما قد يكون صحيحاً إذا كان مركز الحامل $AmnP$ متطابقاً مع مركز العالم، أيْ إذا كان ω وَ ω' متطابقين؛ فيكون معنا في هذه الحالة:

$$\frac{\widehat{NM}}{\widehat{NA}} = \frac{\widehat{nm}}{\widehat{nA'}}.$$



يُعطي ابن الهيثم بعد ذلك نسبة القوسين على الفلك الخارج المركز.

فالنسبة $\frac{i}{i_m}$ هي إذاً نسبة معلومة، فيكون i ميلُ الكوكب (عطارد أو الزهرة) بالنسبة إلى مستوي فلك البروج معلوماً في كلّ لحظة معلومة.

ملاحظات حول نصوص ابن الهيثم

أ- "في هيئة حركات كلّ واحد من الكواكب السبعة"

١- ص. ٢٨٦، س. ١: انظر الملحق الثاني "آلة ابن الهيثم".

٢- ص. ٢٨٨، س. ١٥: يتعلَّق الأمر بالباب العاشر من المقالة الأولى من المجسطي.

٣- ص. ٢٨٨، س. ٢١: يقصد ابن الهيثم مجموع الخطَّين اب وَ جـب.

٤- ص. ٢٨٩، س. ١٧: انظر التعليق الإضافي [١].

٥- ص. ٢٨٩، س. ١٩: انظر التعليق الإضافي [١].

٦- ص. ٢٩٢، س. ٣: الزاوية اق س خارجة عن المثلث س ب ق فتكون الزاوية اق س أعظم من الزاوية اب س.

٧- ص. ٢٩٣، س. ١٨: أي خارجاً عن خطّ م ط.

٨- ص. ٢٩٥، س. ١-٤: وفقاً لصيغة القضية يجب أن يُفرَض أنَّ : اب > جـب وَ هد > هز.

٩- ص. ٢٩٨، س. ٢٥: انظر القسم الثاني من القضية ٤، ص. ٢٩٨، س. ١٢-١٨.

١٠- ص. ٢٩٩، س. ١٢: يتعلَّق الأمر هنا بالفروق المتتابعة بين الأقواس ثناءً.

١١- ص. ٣٠٠، س. ٧: أي الفروق المتتابعة بين ميل كلّ قوس من الأقواس جـد، جـط، جـح، جـز وَ جـه وبين ميل القوس التي تليها.

١٢- ص. ٣٠٠، س. ١٢: انظر الشرح الرياضي.

١٣- ص. ٣٠٢، س. ٣: أي ضعف ميل القوس جـد الموجودة على الشكل الأوَّل.

١٤- ص. ٣٠٦، س. ٣: فَضْل ميل القوس هنا هو الفرق بين ميليْ طرفيْ القوس.

١٥- ص. ٣٠٦، س. ١٣: انظر الملاحظة الإضافية [٢].

١٦- ص. ٣٠٧، س. ٤: انظر الملاحظة الإضافية[٢].

١٧- ص. ٣٠٨، س. ١٩: لا يُعالِج ابن الهيثم الحالة التي تكون فيها القوس جـ كـ أعظم من أحد الأجزاء.

١٨- ص. ٣١٠، س. ٨: نحصل على نسبة مساوية للوحدة.

١٩- ص. ٣١١، س. ٢٦: إنَّ مطلعَ (أو "مطالع" كما يقول ابن الهيثم وغيره) القوس هو هنا الفرق بين مطلعيْ طرفيْ القوس.

٢٠- ص. ٣١٣، س. ٨: لأنَّ الزاوية ب ح ه أعظم من الزاوية ب ح جـ.

٢١- ص. ٣١٦، س. ٩: انظر الملاحظة الإضافية[٢].

٢٢- ص. ٣١٨، س. ٢: يكون معنا إذاً: $\frac{\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كجـ}}} = \frac{\overline{\text{حز}}}{\overline{\text{حم}}}$.

٢٣- ص. ٣١٨، س. ٢١: يكون معنا إذاً:

$$\frac{\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كجـ}}} = \frac{\overline{\text{ال}}-\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كجـ}}} = \frac{\overline{\text{كجـ}}-\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كجـ}}} = \frac{\overline{\text{حم}}-\overline{\text{زح}}}{\overline{\text{مح}}} = \frac{\overline{\text{زم}}}{\overline{\text{حم}}}$$

٢٤- ص. ٣١٩، س. ١٤: أي نبني النقطة د.

٢٥- ص. ٣١٩، س. ١٦: أي النسبة $\frac{\overline{\text{حز}}}{\overline{\text{حف}}}$.

٢٦- ص. ٣٢٠، س. ٤: انظر الشرح. إن ابن الهيثم لا يبرهن المتباينة: د ب > د ع.

٢٧- ص. ٣٢١، س. ١-٢: النقاط ق ، س ، ز وَ و هي مراكز الدوائر.

٢٨- ص. ٣٢٣، س.٢٤: يكون معنا في جميع حالات الشكل: ش ق > ي س > ز ع ، وإذا قطع المحور ا جـ الخط د ه على النقطة ه أو بعد النقطة ه، يكون معنا و ص < ز ع. ولكن إذا قطع الخطُّ ا جـ الخطَّ د ه بين ع وَ ه يمكن أن يكون معنا: و ص ≤ ز ع.

٢٩- ص. ٣٢٥، س. ١-٢: القطب المرتفع هنا هو القطب الذي فوق الأفق.

٣٠- ص. ٣٢٥، س. ٧: إنَّ أعظم الدوائر المتوازية هي تلك التي هي أكثر قرباً من النقطة د، أي تلك التي هي أكثر قرباً من معدِّل النهار.

٣١- ص. ٣٢٧، س. ٧: تقطع الدائرة ع كـ ب الأفق على النقطة ب ؛ وهي مماسَّة في النقطة كـ للدائرة الأفقية ه ز ح. الدائرة العظمى د كـ تقطع الأفق على النقطة كَ؛ والقوس كـ كَ هي ارتفاع كل نقطة من الدائرة ه ز ح. الخطّ المماس في كـ للدائرة ع كـ ب والخط المماس في كَ للدائرة جـ ب كَ متوازيان؛ فيكون الخطُّ ب و (النقطة و هي مركز الكرة)، الذي هو خطّ التقاطع بين المستويَيْن ع كـ ب وَ جـ ب كَ، موازياً لهذين الخطَّين؛ وبالتالي يكون معنا: وكـ ⊥ ب و وَ وكَ ⊥ ب و ؛ والزاوية كـ و كَ هي الزاوية المشكّلة بين مستوي ع كـ ب ومستوي الأفق، فتكون الدائرة ع كـ ب "الدائرة التي ميلها على الأفق مساوٍ لارتفاع القنطرة".

٣٢- ص. ٣٢٧، س. ١٩: إنَّ القوس، الموجودة فوق الأفق لكلِّ واحدة من هاتين الدائرتين، هي أصغر من نصف دائرة.

٣٣- ص. ٣٢٩، س. ١٤: يتعلّق الأمر بقطبيْ معدِّل النهار.

٣٤- ص. ٣٣٠، س. ١٠-١١: إنَّ القوسَ جـ د ل مفصولة من نصف الدائرة بالخطّ جـ ل.

٣٥- ص. ٣٣٣، س. ١٠-١١:

$$b(a-c)>a(b-d) \Leftrightarrow ab-bc>ab-ad \Leftrightarrow bc<ad \Leftrightarrow \frac{a}{b}>\frac{c}{d}$$ ؛ فإذاً $a>c$ وَ $b>d$ $\Leftarrow$

$$\frac{a-c}{b-d}>\frac{a}{b}>\frac{c}{d}.$$

٣٦- ص. ٣٣٦، س. ٢-٣: أو تكون القوسان ه ط وَ جـ د ل من جهة القطب الظاهر بالنسبة إلى معدِّل النهار.

٣٧- ص. ٣٣٦، س. ٥: انظر التعليق الإضافي [٣].

٣٨- ص. ٣٣٧، س. ٧-٨: انظر التعليق الإضافي [٤].

٣٩- ص. ٣٣٦، س. ٧-٨: يُدخِل ابن الهيثم هنا فرضيّة إضافيّة (انظر التعليق الإضافي [٥]).

٤٠- ص. ٣٣٧، س. ٦-٨: انظر التعليق الإضافي [٥].

٤١- ص. ٣٤١، س. ٢٤-٢٥: انظر ص. ٣٣٤.

٤٢- ص. ٣٤٢، س. ٧: لا يُمثّل الحرف لَ، هنا، نفسَ النقطة التي كان يُمَثِّلها في القسم السابق من الدراسة.

٤٣- ص. ٣٤٣، س. ١٠: انظر الشكلين ٦٣-١ وَ ٦٣-٢ في الشرح الرياضي.

٤٤- ص. ٣٤٤، س. ٦: انظر الخطوط الأخيرة في الصفحة ٣٣٣ وبداية الصفحة ٣٣٤؛ كان لدينا جد/دز > جك/كم ، عندما كان الخطّ كم موازياً للخطّ دز.

٤٥- ص. ٣٤٤، س. ١٥: أيْ الخطّ كو الممدَّد حتّى نصف القطر دز.

٤٦- ص. ٣٤٨، س. ١١: الجوزهران هما نقطتا العقدتين: نقطة المرور نحو الشمال التي تسمَّى الرأس أو الجوزهر أو العقد الشمالي ونقطة المرور نحو الجنوب التي تُسَمَّى الذنب أو العقد الجنوبي.

٤٧- ص. ٣٤٨، س. ١٣: يتعلَّق الأمر بالحركة على دائرة الفلك الخارج المركز وعلى دائرة فلك التدوير.

٤٨- ص. ٣٥١، س. ٢٤: الدائرة الزمانية هي الدائرة الموازية لمعدِّل النهار.

٤٩- ص. ٣٥١، س. ٢٦: الحركة السريعة هي الحركة اليومية.

٥٠- ص. ٣٥٢، س. ١٤: النقطة بَ هي النقطة الأوَّلية للقمر. تُمثِّل النقطة بَ، في آن واحد، نقطة على الكرة السماوية ونقطة على الفلك المائل. النقطة الأولى تُشارك في الحركة اليومية وتتحرَّك على الدائرة ب ط الموازية لمعدِّل النهار؛ أما النقطة الثانية فهي تتحرَّك بحركة العقدة على الدائرة ب ق الموازية لفلك البروج.

٥١- ص. ٣٥٤، س. ٦: القوس العليا هي القوس التي تقطع دائرة نصف النهار فوق الأفق.

٥٢- ص. ٣٥٤، س. ٢٠: انظر الشرح الرياضي.

٥٣- ص. ٣٥٤، س. ٢٦ وَ ص. ٣٥٧، س. ١: المقصود هنا هو الموضع الذي تبلغه النقطة بَ.

٥٤- ص. ٣٥٥، س. ٢٤: الموضع الذي تبلغه النقطة بَ هي نقطة التقاطع بين الدائرة ب ق وبين الفلك المائل في الوضع الذي توجد فيه هاتان الدائرتان عندما يصل القمر إلى النقطة نَ على دائرة نصف النهار.

٥٥- ص. ٣٥٦، س. ١٤: الدائرة ب ق، في كل هذه الفقرة، ترمز إلى الوضع الذي تبلغه هذه الدائرة عندما يمرُّ القمر في النقطة نَ من دائرة نصف النهار.

٥٦- ص. ٣٦٢، س. ٢: يتعلَّق الأمر بالموضع مَ الذي تبلغه النقطة بَ، من كرة الكواكب الثابتة، في انتقالها الذي ينتج عن الحركة اليومية وعن حركة العقدة.

٥٧- ص. ٣٦٥، س. ١٧: الميل عن الدائرة الزمانية ب ه م هو القوس ط ه أو القوس س ه، وهو مُحدَّد بالنقطة طَ أو النقطة سَ.

٥٨- ص. ٣٦٦، س. ١٨: المقصود هو الميل بالنسبة إلى معدِّل النهار. الميل الأقصى للفلك المائل بالنسبة إلى فلك البروج يساوي ٧ درجات في حالة عطارد، ويساوي ثلاث درجات و٢٤ دقيقة في حالة الزهرة. أما بخصوص الكواكب العليا، فإنَّ هذا الميل يساوي درجة

وَ ٥١ دقيقة في حالة المريخ، ويساوي درجة و ١٩ دقيقة في حالة المشتري ويساوي درجتين و ٣٠ دقيقة في حالة زُحَل.

٥٩- ص. ٣٦٦، س. ١٨-١٩: ميل عطارد الأقصى بالنسبة إلى فلك البروج يساوي ٧ درجات، أما الميل الأقصى لفلك البروج بالنسبة إلى معدِّل النهار فهو ٢٣ درجة وَ ٢٧ دقيقة.

٦٠- ص. ٣٦٨، س. ٥: الكوكبان العلويان المقصودان هما المشتري وزحل (انظر ص. ٣٧٢، س. ٦).

٦١- ص. ٣٧٢، س. ٤: الطالع المستقيم لقوس هو الفرق بين الطالعين المستقيمين لطرفيْه؛ فيكون الطالع المستقيم للقوس $\overline{\text{ا ب}}$ مساوياً للطالع المستقيم للقوس $\overline{\text{ا د}}$ أي أنـَّه مساوٍ لقياس القوس $\overline{\text{ا د}}$.

٦٢- ص. ٣٧٢، س. ١١: انظر التعليق الإضافي [٦].

٦٣- ص. ٣٧٣، س. ٢٣: القوس $\overline{\text{جـ ز}}$ تقطع الدائرة الزمانية $\overline{\text{ا د}}$ على النقطة $\overline{\text{ر}}$. انظر التعليق الإضافي [٧].

٦٤- ص. ٣٧٤، س. ٦: يريد ابن الهيثم أن يقول أنَّ هناك دائرة تخرج من قطب فلك البروج وتمرُّ بالنقطة $\overline{\text{ز}}$، مثل الدائرة التي تمرُّ بموضع الكوكب عندما يكون في النقطة $\overline{\text{ا}}$.

٦٥- ص. ٣٧٦، س. ٢٠-٢١: تكون هذه النتيجة صالحة عندما تحدث حركة الكوكب بالاتجاه المباشر. نجد أدناه (انظر الصفحة ٣٧٩) النتيجة الخاصَّة بالحالة التي تحدث فيها الحركة بالاتجاه التراجعي.

٦٦- ص. ٣٧٧، س. ١: إنَّ حركة العقدة بطيئة جداً؛ لذلك تقطع الدائرة العظمى $\overline{\text{جـ ز}}$ الدائرة الزمانية $\overline{\text{ا د}}$ على نقطة ملتصقة بالنقطة $\overline{\text{د}}$. إنَّ القوسَ $\overline{\text{ر ز}}$، التي نحصل عليها هنا في حالة القمر، هي عملياً معدومة (لا تُقدَّر بالحسّ أو بشيء محسوس)؛ أي أنَّ $\overline{\text{ر}} \cong \overline{\text{ز}}$،

فتكون النقطة زَ مُمَثَّلة بنقطة من الدائرة ا دَ. فتكون النقطتان زَ وَ كـَ متلاصقتين. الزمن المعلوم الذي كان القوسَ اكـَ في حالة القمر، يُصبح هنا القوسَ ازَ.

٦٧- ص. ٣٧٧، س. ٤: انظر الملاحظة السابقة.

٦٨- ص. ٣٧٨، س. ٥: المقصود هنا هو ميل الطرف الشمالي أو الجنوبي للفلك المائل بالنسبة إلى معدِّل النهار.

٦٩- ص. ٣٨٢، س. ١٦: انظر التعليق الإضافي [٦].

٧٠- ص. ٣٨٣، س. ٦: النقطة نَ مُعتَبَرة كقطب، لذلك تكون القوسُ مبَ من فلك البروج، الطالعَ المستقيم للقوس مكـَ من معدِّل النهار؛ والقوس كـبَ هي ميل القوس مكـَ بالنسبة إلى فلك البروج (انظر القضيتين ٧ وَ ٥).

٧١- ص. ٣٨٣، س. ٩: الميل الأقصى(نهاية الميل) هو هنا ميل أحد طرفيْ الفلك (الطرف الشمالي والطرف الجنوبي)؛ فهو إذاً قوسُ دائرة عظمى يساوي قياسُه قياسَ الزاوية المشكَّلة بين مستوي الفلك ومستوي فلك البروج، أيْ عرضَ الطرف المعني بالأمر بالنسبة إلى فلك البروج.

٧٢- ص. ٣٨٣، س. ١١-١٤: انظر تعليل ذلك في الشرح الرياضي.

٧٢- ص. ٣٨٤، س. ٢٠-٢١: يتعلَّق الأمر هنا بموضع النقطة بالنسبة إلى فلك البروج.

٧٣- ص. ٣٨٦، س. ٨: انظر الشرح الرياضي.

٧٤- ص. ٣٨٧، س. ١٧-١٩: انظر التعليق الإضافي [٨].

٧٥- ص. ٣٨٨، س. ٦: الجوزهران هنا هما العقدتان الرأس والذنب.

٧٦- ص. ٣٩٠، س. ٣: انظر الحاشية ٢٦ في الشرح الرياضيّ ص. ٢٢٠.

٧٦- ص. ٣٩١، س. ١٦: إنَّ الموضع الأوَّلي للنقطة ط هو النقطة، من القوس ا ه من الفلك المائل، التي يبلغ فيها الفلك المائل ميلَه الأقصى (غاية الميل).

٧٧- ص. ٣٩١، س. ٢٢: المقصود هنا بكلمة موضع هو الموضع بالنسبة إلى فلك البروج.

٧٨- ص. ٣٩١، س. ٢١: ستؤخذ ف على جـ ه وتؤخذ ف، على ز ا.

٧٩- ص. ٣٩٣، س. ١٥: المقصود هو الموضع الأوَّلي للنقطة ف؛ وهو النقطة، من الفلك المائل، التي يبلغ فيها الفلك المائل ميلَه الأقصى.

٨٠- ص. ٣٩٤، س. ١٣: يقول ابن الهيثم إن مركز فلك التدوير يتحرَّك على قوس، مقداره ربع دائرة، من الفلك الخارج المركز. يتعلَّق الأمر إذاً بالموضع الظاهر على الفلك المائل. إنَّ ابن الهيثم يتحدَّث في بعض الأحيان عن الموضع الحقيقي وفي أحيان أخرى عن الموضع الظاهر.

٨١- ص. ٣٩٤، س. ٢٠: انظر الملاحظة السابقة.

٨٢- ص. ٣٩٩، س. ٨-٩: فضل ميل قوس ا ب هو الفرق بين ميليْ ا وَ ب.

٨٣- ص. ٣٩٩، س. ١١: انظر الحاشية ٢٨ حول الزمن المحصَّل كـ م، الموجودة في الشرح الرياضي ص. ٢٢٦

٨٤- ص. ٤٠٠، س. ٢٣: تبيَّن ذلك في القضية ٩.

٨٥- ص. ٤٠١، س. ١: في القضية ٦.

٨٦- ص. ٤٠٢، س. ١٧: الطالع المستقيم لقوس ما هو الفرق بين الطالعين المستقيمين لنقطتيْ طرفيْها.

٨٧- ص. ٤٠٣، س. ١٥: القوس ط ب تُمثِّل، وفقاً للفرضيات، زمن المسير على القوس ح ب، فالقوس و ط تمثِّل إذاً زمناً.

٨٨- ص. ٤٠٤، س. ١: انظر الحاشية ٣٥ في الشرح الرياضيّ، ص. ٢٣٤.

٨٩- ص. ٤٠٥، س. ١٦-١٧: يُزاد هذا التعديل على القوس التي ينتقل الكوكب عليها خلال مساره على فلكه.

٩٠- ص. ٤٠٧، س. ٩: إذا كان القوسان α وَ β القوسين المفصولين على التوالي من القوسين ام وَ م ب ، نحن نعلم أنَّ: α > | α- ام | وَ ام >| α- ام |. إذا كان α > ام، يكون معنا: ٢α > ام > α؛ هذه هي الحالة المدروسة في هذه الفقرة. إذا كان α > ام، يكون معنا: ام ٢ > α > ام .

٩١- ص. ٤٠٨، س. ١٠: انظر الحاشية ٣٥ في الشرح الرياضيّ، ص. ٢٣٤.

٩٢- ص. ٤١٠، س. ٨-٩: النقطة ا هي الموضع الأوَّلي للكوكب الذي سينتقل على القوسين ام وَ م ب.

٩٣- ص. ٤١٧، س. ٦: إنَّ القوس ه د موجودة في المستوي ا جـ د العموديّ على مستوي الدائرة ز ح د .

٩٤- ص. ٤١٧، س. ٨: إنَّ النسبة س ن / ن ف معلومة ، ويجب أن نأخذ ١ < س ن / ن ف (القضية ١٠).

٩٥- ص. ٤٢٣، س. ٨: يكون مبدأ الحركة من جهة ز، لكل قوس ينتقل الكوكب عليها.

٩٦- ص. ٤٢٣، س. ٩: نأخذ ح على الدائرة ز ح ط التي هي مقنطرة ز.

٩٧- ص. ٤٢٩، س. ٣: انظر الشرح الرياضيّ.

٩٨- ص. ٤٢٩، س. ٨: انظر الشرح الرياضيّ.

٩٩- ص. ٤٢٩، س. ٢٣:لقد بيَّنّا، في الفقرة أ)، ص. ٢٤٩، أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأيّ نقطة من القوس س ط. وهو من جهة أخرى لا يلتقي بالقوس س كـ ؛ وذلك أنـَّه يمرُّ بالنقطة كـ

وفقاً للفرضيات، فإذا بلغ نقطة، غَ، من القوس س كـ، يُمكن أن نُبيِّن، كما فعلنا بخصوص النقطة كـَ، أنَّ الكوكب لا يمرُّ بأيّ نقطة من القوس ع غ وأنـَّه بالتالي لا يمكن أن يمرّ بالنقطة كـَ، وهذا ما يناقض الفرضيات. وهكذا لا يمرُّ الكوكب بأيّ نقطة من القوس ط كـ. والنقطة الوحيدة من دائرة الأفق ع كـ ط التي يمرُّ بها الكوكب هي النقطة كـَ.

وإذا كانت النقطة سَ، التي هي نقطة التماس بين الدائرة ط ع ذات الارتفاع الأقصى للكوكب وبين دائرة عظمى مارّة بالقطب نَ، النقطةَ التي يلتقي فيها الكوكب بالدائرة ط ع، فإنَّ النقطة سَ هي النقطة الوحيدة التي يبلغ فيها الكوكب ارتفاعه الأقصى.

١٠٠ـ ص.٤٣٣، س.١٤ـ١٥: إنَّ ميل الشمس بالنسبة إلى معدَّل النهار يتزايد من ٠ إلى ٢٣ درجة وَ ٢٧ دقيقة خلال ٩٠ يوماً تقريباً؛ وحذا ما يعادل ١٥ دقيقة إلى ١٦ دقيقة. ويستغرق انتقال الشمس من شروقها إلى مرورها على نصف النهار في يوم الاعتدال ٦ ساعات؛ فتكون القوس د ه عندئذ مساوية لـِ ٤ دقائق تقريباً.

١٠١ـ ص.٤٣٣، س.١٧ـ٢٥: لقد دُرِس ميل فلك القمر بالنسبة إلى معدِّل النهار في القضيتين ١٦ وَ ٢٢. إنَّ الميل الأقصى قريب من ٢٩ درجة، ويتمُّ بلوغه نادراً (الدورة الكاملة تساوي ١٨ سنة وَ ٨ أشهر). ويُتِمُّ الكوكب دورة كاملة على فلكه خلال الشهر القمريّ الذي يساوي ٢٩ يوماً ونصف اليوم تقريباً، فيتغيَّر الميل من ٠ إلى ٢٩ درجة خلال ربع شهر؛ وهكذا يتغيَّر الميل يوميّاً بمقدار ٤ دقائق تقريباً، كما يتغيَّر بمقدار درجة واحدة تقريباً خلا ست ساعات في يوم الاعتدال.

١٠٢ـ ص.٤٣٤، س.٢: القوسان ل ر وَ ث ق هما الميلين الخاصَّين، حسب الترتيب، بالزمنين المحصَّلين ق ر وَ كـ ث الموافقين لانتقال الكوكب من قَ إلى لَ ومن كـَ إلى قَ.

١٠٣ـ ص.٤٤١، س.٦: القوس ز ل هو قوس من دائرة زَ الزمانية؛ حيث تكون زَ نقطة مرور الكوكب على نصف النهار.

١٠٤- ص. ٤٤٧، س.٧: انظر الشكل ٣٤ الموجود على الصفحة ٤٤٣، أو الشكل ١٢١ في الشرح الرياضيّ.

١٠٤- ص. ٤٤٩، س.٥: نأخذ بعين الاعتبار، لكل مثلَّث من المثلَّثات التي نحصل عليها، نسبة أحد الضِّلعيْن، المماثليْن للضلعين ف ش وَ ش م ، إلى الآخر.

١٠٥- ص. ٤٤٩، س. ١٢: يقصد ابن الهيثم هنا القوس الزمانيَّة الخارجة من نقطة من القوس ف م حتَّى القوس ش م.

١٠٦- ص. ٤٥٥، س. ١٨- ١٩: تكون النقطة كـ على الأفق وتكون ع على نصف النهار.

١٠٧- ص. ٤٥٩، س. ٢: يتعلَّق الأمر بالارتفاع السلبي للأفق.

١٠٨- ص. ٤٥٩، س. ٤: القوس كـ ع هي قوس من دائرة زمانية، حيث تكون كـ على الأفق وتكون ع على نصف النهار.

١٠٩- ص. ٤٦٠، س. ٦: الموضع الأوَّل من الأرض هو مكان تمَّ اختياره للرصد في أوَّل الأمر، وهو المكان الذي ورد ذكره سابقاً (ص. ٤٥٨)؛ ولكن فترة الرصد فيه مُختلفة. والحُجَّة المستخدَمة هنا مطابقة للحجَّة، المستخدمة في الحالة السابقة، الخاصَّة بالشروق والغروب من جهة الشرق.

ب – "فيما يعرض من الاختلاف في ارتفاعات الكواكب"

١- ص. ٤٨١، س. ١٨: المقصود هو أفق المكان المعني بالأمر

٢- ص. ٤٨١، س. ١٩: "القطب الظاهر فوق الأرض" : يقصد ابن الهيثم القطب الذي هو فوق أفق المكان.

٣- ص. ٤٨٢، س. ١٦: يكون هذا صحيحاً عندما يكون كـ ≠ ه، لأنَّ الزاويتين ب ه أ وَ د ط ه متساويتان وفقاً للفرضيات.

٤- ٤٨٣، س. ١٩: أي وفقاً للقسمة التي تحقِّق الفرضية المعطاة في نص القصية.

٥ - ٤٨٥، س. ١١-١٢: انظر الشرح.

٦- ٤٨٥، س. ١٩: يريد أن يقول أننا نُخرج الخطّ ب ه د بحيث تكون الزاوية ب ه جـ حادَّة.

٧- ٤٨٨، س. ١٥: يتعلَّق الأمر بالقوس ب جـ من الدائرة المعلومة.

٨- ٤٨٨، س. ١٥: النقطة ع هي نقطة التقاطع بين الخطَّين ب جـ وَ كـ م؛ ولنلاحظ أنَّ القطعة ع ح لا تدخل في الاستدلال.

٩- ٤٩٠، س. ٧- ٨: "يُخرَجُ منه"، أي من وسط الخطّ المذكور.

١٠- ٤٩٦، س. ١٦: انظر الملاحظة الواردة في الشرح بعد القضية ٤(ص. ٤٦٧-٤٦٩).

١١- ٥٠٢، س. ٥: القوس ا ز، هي ارتفاع النقطة ط؛ وارتفاع القوس الزمني ه ط هو القوس ه ز، فيكون ارتفاع القوس ه ط أصغر من ارتفاع القوس ط ب.

١٢- ٥٠٣، س. ٣: القوس جـ ح، هي ارتفاع النقطة ط؛ وارتفاع القوس الزمني ه ط هو القوس ن ح، فيكون ارتفاع القوس ه ط أصغر من ارتفاع القوس ط ب.

ج – "في خطوط الساعات"

١- ٥٦٣، س. ٩: يُمكن أن يتحقَّق هذا الشرط ولكنَّه غير كافٍ؛ وذلك لأنَّ الطرَف المعنيَّ بالأمر يجب أن يكون بين النقطة ظ والنقطة ا (انظر الشرح).

٢ ـ ٥٦٣، س. ٢٥: أي مهما كان وضع النقطة د التي تقسم القوس ا ب ومهما كان وضع النقطة ه التي تقسم القوس ب جـ.

٣ـ ٥٦٤، س. ١٣: أي قوسيْ الدائرة الأولى.

٤ـ ٥٦٥، س. ١٥ـ ١٦: تجب زيادة كلمة قوس في كلِّ هذه الفقرة حيث لا توجد كلمة وتر.

٥ـ ٥٦٦ ، س. ١٦: وفقاً للمقدّمة ٤.

٦ـ ٥٦٨ ، س. ١٠ـ١٣: تشكّل هذه الفقرة ملاحظة لا علاقة لها بالنتيجة المُعلَنة.

٧ـ ٥٧٢ ، س. ٢١: "الشبيهة" هي هنا "القوس الشبيهة" في كلّ النصّ.

٨ـ ٥٧٢ ، س. ٢٦: النقطة ي هي على الخطّ ل ط.

٩ـ ٥٧٤ ، س. ١٨: النقطة ح هنا ليست النقطة ح الواردة في القضية ٧.

١٠ـ ٥٧٤ ، س. ٢٢: الخطّان م و وَ ز ش هما نصفا قطريْ هاتين الدائرتين.

١١ـ ٥٧٥ ، س. ٣: هذه النقطة ح′ هي النقطة ح الواردة في القضية ٧؛ وهذا ما يقوله ابن الهيثم لاحقاً.

١٢ـ ٥٧٥ ، س. ٢٠: النقطة ط هنا هي النقطة ي السابقة.

١٣ـ ٥٧٧ ، س. ١٠: إذا جعلنا الزاوية ب ه جـ مساوية لـِ ٢٤ درجة، تكون القوس ه ر مساوية لـِ ٤٨ درجة.

١٤ـ ٥٧٨ ، س. ١٠ : يساوي جيب ٧٥ درجة: ٩٦٥٩٢٥٨. ٠ وهذا ما يعطي فعلاً، إذا كان ر ط مساوياً لـِ ٦٠: جـ م =٩٦٥٩٢٥٩. ٠×٦٠ = ٥٧.٩٥٥٥٤٩٥ ، وهذا ما يطابق بدقة كافية ما يعطيه ابن الهيثم : ٥٧.٥٧.٢٠= نز نز كـ. وإذا كان ر ط مساوياً لـِ

٥٤.٤٨.٤٦ =٥٤.٨١٢٧٧٧، فإن جـم = ٥٢.٩٤٥٠٧٧ =٥٢.٥٦.٤٢؛ أما ابن الهيثم فإنه يعتبر لاحقاً أنَّ: جـم = ٥٢.٥٧ .

١٥- ٥٧٨ ، س. ١٣: نحصل بالحساب على: ١٢.٥٩.١١؛ ١١.٥١.٤٩؛ ٤٥.٥٠.٢٠ .

١٦- ٥٨٣ ، س. ٨ : نحصل بالحساب على: ١٤٨.٢٥٠١ .

د – "في الرخامات الأفقية"

١- ص. ٦٠٩، س. ٤: يوضّح ابن الهيثم لاحقاً أنَّ هذا السطح موازٍ للأفق.

٢- ص. ٦٠٩، س. ١٣-١٤: انظر الشرح.

٣- ص. ٦١٠، س. ٩: "الساعات النظائر" ليومين مختلفين تخصُّ نفس العدد من الأجزاء الاثني عشرية للنهار لكل يوم من الأيّام المعنية بالأمر. يتعلّق الأمر إذاً بالساعات التي لها نفس الرُّتـَب.

٤- ص. ٦١٠، س. ٩: المقصود هو: "من أقسام مُختَلفة للسنة".

٥- ص. ٦١١، س. ٦: يكون الظلُّ على خطّ التقاطع بين مستوي الرخامة الأفقيّ وبين مستوي الدائرة السمتية المحدَّدة بموضع الشمس س. والدائرة السمتية تُسمَّى في بعض الأحيان دائرة الارتفاع لأنَّ القوسَ التي يُقاس بها الارتفاعُ يوجَد عليها. وهكذا تكون س في مستوي نصف النهار، ويكون الظلُّ على خطّ نصف النهار.

٦- ص. ٦١١، س. ٧-٨: وسط السماء هو عمود المكان.

٧- ص. ٦١١، س. ١٣: يتعلّق الأمر بالخطّ الذي يوجَدُ عليه الظلُّ.

٨- ص. ٦١٢، س. ٢: المقدّمة الأولى من هاتين المقدّمتين تنصُّ على أنَّ أطراف الأظلال للساعات المتماثلة متواجدة على خطّ مستقيم واحد. المقدّمة الثانية تنصُّ على أنَّ نسبة ارتفاع

الشخص إلى طول ظلّه مساوية لنسبة جيب $\bar{ح}$ إلى جيب تمام $\bar{ح}$ ، إذا كان $\bar{ح}$ ارتفاع الشمس في الوقت المعنيّ بالأمر.

٩- ص. ٦١٣، س. ٣: الطالع المستقيم لقوس ما هو الفرق بين الطالعين المستقيمين لطرفيْه، حيث يُقاس هذين الطالعين المستقيمين على دائرة مُعدِّل النهار انطلاقاً من نقطة مُتَّخذة كأصل. يُعتَبَر أحد طرفيْ القوس، في هذا النصّ، كنقطة أصل (نقطة التقاطع بين دائرة الاستواء والقسم الجنوبي لدائرة نصف النهار في المكان المعني بالأمر): فيكون الطالع المستقيم للقوس مطابقاً إذاً للطالع المستقيم للطرف الثاني للقوس.

١٠- ص. ٦١٣، س. ١١-١٢: تكون هذه النقطة على دائرة نصف النهار المحدَّدة بسمت الرأس وبقطب دائرة معدِّل النهار؛ وهذه الدائرة هي وسط السماء.

١١- ص. ٦١٣، س. ١٦: الشكل القطاع هو مبرهنة منالاوس.

١٢- ص. ٦١٤، س. ١٢: الشكل القطاع هو مبرهنة منالاوس.

١٣- ص. ٦١٥، س. ١٢: تتطابق الساعة الثانية عشرة مع وقت غروب الشمس؛ ويكون عندئذ الشعاع الذي يصل بين الشمس ورأس الشخص أفقياً فلا يعطي أيَّ ظلٍّ على سطح الرخامة.

١٤- ص. ٦١٥، س. ١٥: لم تُستخدم سعة المشرق في الحسابات (انظر الشرح).

١٥- ص. ٦١٦، س. ١٢: "أجزاء قوس الارتفاع": المقصود هو قياس قوس الارتفاع بالدرجات.

١٦- ص. ٦١٦، س. ١٥: "أجزاء قوس السمت": المقصود هو قياس قوس السمت بالدرجات.

١٧- ص. ٦١٧، س. ٥: سنرسم الشكل، لأجل هذه الدائرة "الدستور"، في الحالة الخاصّة للمثال الذي يعطيه ابن الهيثم.

١٨- ص. ٦١٧، س. ٦: الأفق هو أفق الصانع.

١٩- ص. ٦١٧، س. ٢٢: "تلك الأجزاء التي هي الارتفاع": المقصود هو قياس الارتفاع بالدرجات.

٢٠- ص. ٦٢٠، س. ١١-١٢: نصل بين النقاط م̄ المتتابعة ثنائيّاً بخطوط صغيرة، وكذلك نفعل مع النقاط ن̄. وهذه الخطوط قصيرة جدّاً بحيث يكون الخطُّ المتكسِّر الذي نحصل عليه للنقاط م̄ أو للنقاط ن̄ شبيهاً بخطٍّ منحنٍ. وهذا الخطّ المنحني، الذي هو المكان الهندسي لهذه النقاط، هو قطع زائد، في كل الأمكنة ذات العرض الشمالي ($23°27' < \lambda < 66°\ 33'$) (انظر الشرح).

٢١- ص. ٦٢١، س. ٢٣-٢٤: المقصود هو اليوم الذي تكون فيه الشمس في رأس الحمل أو في رأس الميزان.

ه – "في بركار الدوائر العظام"

١- ص. ٦٣٩، س. ١٥: المقصود هو قطر الدائرة الداخلية للحلقة.

٢- ص. ٦٤١، س. ٣-٤: يكون هذا وفقاً للقضية ٣.

٣- ص. ٦٠٢، س. ١٢-١٤: نمسك الحلقة بحيث نجعل طرف القطر، الذي هو على امتداد العمود، ثابتاً؛ ثم ندير الآلة حول الخطّ المماس لهذا الطرف. انظر الشكل.

٤- ص. ٦٤٢، س. ١١-١٢: أي أنَّ الأقواس تتقابل بواسطة إسقاط عموديّ.

المراجـع

١–مخطوطات النصوص العربية

الحسن بن الهيثم

في بركار الدوائر العظام

عليكرة، ٦٧٨، أوراق ٢٩و، ٨ و–ظ، ٩ و–ظ، ١٠ و [رمز A].

ليدن، Or. 133/6، الأوراق ١٠٦–١١١ [رمز N].

لندن، المكتب الهندي (Loth 734)، الأوراق ١١٦ظ–١١٨و [رمز B].

رامبور ٣٦٦٦، الورقة ٤٣٦–٤٤٢ [رمز R].

سان بطرسبرغ، ب ١٠٣٠، الورقة ١٢٥ ظ–١٣١و

في هيئة حركات كل واحد من الكواكب السبعة

سان بطرسبرغ، ٦٠٠ (كوبيبشيف قديماً، مكتبة V. I. Lenin)، الأوراق ٣٦٨ ظ، ٣٩٧ ظ، ٣٩٧ و–٤٠١ ظ، ٤٠٢ ظ، ٤٠٣و–٤٠٨ظ، ٣٦٩ و–٣٩٦ ظ، ٤٠٩ و–٤٢٠ ظ.

في الاختلاف في ارتفاعات الكواكب

إسطنبول، السليمانية، فاتح ٣٤٣٩، الأوراق ١٥١ و– ١٥٥ و

في خطوط الساعات

إسطنبول، المتحف العسكري، ٣٠٢٥، الأوراق ١ ظ– ١٩ ظ [رمز B].

إسطنبول، السليمانية، عاطف ١٧١٤، الأوراق ١٧١٤، ٥٧و– ٧٦ ظ.

في الرخاميات الأفقية

برلين، Staatsbibliothek, Oct. 2970، [رمز B].

طهران، مجلس شورى، توغابوني ١١٠ [رمز I].

٢–مخطوطات أخرى

أبو الوفاء البوزجاني

فيما يحتاج إليه الصانع من أعمال الهندسة

إسطنبول، آيا صوفيا، ٢٧٥٣.

ابن الهيثم

في حل شكوك حركة الالتفاف

سان بطرسبيرغ، B 1030/1.

في تصحيح الأعمال النجومية
أكسفورد، مكتبة بودليان (Arch. Seld A 30).

في حل شكوك المجسطي
عليكرة، عبد الحي ٢١.
إسطنبول، بايزيد، ٢٣٠٤.

[في هيئة العالم]
كستمونو، ٢٢٩٨.
لندن، المكتب الهندي (Loth 734).
الرباط، المكتبة الملكية ٨٦٩١.

ابن الشاطر
الزيج الجديد
أكسفورد، مكتبة بودليان (Arch. Seld A 30).

الخرقي
منتهى الإدراك في تقاسيم الأفلاك
باريس، BNF، عربي، ٢٤٩٩.

٣– كتب ومقالات

A. Dallal, "Ibn al-Haytham's Universal Solution for Finding the Direction of the *Qibla* by Calculation." Arabic Sciences and Philosophy: vol. 5, no. 2, 1995, pp. 145-193.

M.-Th. Debarnot, *Al-Bīrūnī: Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de 1'Est à la fin du Xème siècle*, Institut Français de Damas (Damas, 1985).

Al-Dhahabī, *Siyar a'lām al-nubalā'*. éd. Sh. al-Ama'ūṭ [et al.] (Beyrouth, Mu'assasat al-Rishla, 1984), vol. XVIII.

P. Duhem, *Le Système du monde, t. II*: *Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic* (Paris, Hermann, 1965).

A. Heinen, "Ibn al-Haiṯams Autobiographie in einer Handschrift aus dem Jahr 556 H./1161 A.D." dans: Ulrich Haarmann et Peter Bachmann (éds.), *Die islamische Welt zwischen Mittelalter und Neuzeit, Fetschrift für Hans Robert Roemer zum 65. Geburtstag*, Beiruter Texte und Studien; Band 22 (Beyrouth, Franz Steiner Verlag, 1979), pp. 254-277.

ابن أبي أصيبعة، موفق الدين أبو العباس
عيون الأنباء في طبقات الأطباء. شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت: دار مكتبة الحياة ١٩٦٥).

ابن عساكر
تاريخ مدينة دمشق. ج ٤٣، تحقيق سكينة الشهابي. (دمشق: مطبوعات مجمع اللغة العربية، ١٩٩٣).

Ibn al-Haytham, *Majmū' Majmū' al-rasā'il*, Osmānia Oriental Publications Bureau (Hyderabad, 1938-1939).

ابن عماد
شذرات الذهب في أخبار من ذهب (بيروت، [د. ت.]).

ابن تغري بردي
النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة. ١٢ ج (بيروت: دار الكتب، ١٩٩٢).

S. A. Jazbi, *Applied Geometry* (Téhéran, Soroush Press, 1991).

Y. Tzvi Langermann, *Ibn al-Haytham's On the Configuration of the World* (New York; Londres, Gerland Publishing, 1990).

R. Morelon, "L'Astronomie arabe orientale entre le VIII[ème] et le XI[ème] siècle," dans: R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes*, 3 vols. (Paris: Le Seuil, 1997), t. II: *Astronomic, théorique et appliquée*, pp. 35-69.

Al-Nadīm, *Kitab al-fihrist*, éd. R. Tajaddud (Téhéran, 1971).

مصطفى نظيف. **الحسن بن الهيثم: بحوثه وكشوفه البصرية.** ٢ ج. (القاهرة: جامعة فؤاد الأول، ١٩٤٢–١٩٤٣).

النعيمي. **الدارس في تاريخ المدارس.** تحقيق جعفر الحسني (دمشق: مطبوعات مجمع اللغة العربية، ١٩٥١)، ج ٢.

S. Pines, "Ibn al-Haytham's Critique of Ptolemy," dans: *Actes du dixième Congrès international d'histoire des sciences*; 1, no. 10 (Paris: Hermann, 1964), pp. 547-550.

"What was Original in Arabic Science," dans: A. C. Crombie (éd.), *Scientific Change* (Londres: Heinemann, 1963), pp. 181-205.

Ptolémée, *Composition mathématique de Claude Ptolémée*, trad. N. Halma, vol. I (Paris, Imprimerie de J.-M. Eberhart, 1813); vol. 11 (1816).

Al-Qifṭī, *Ta'rikh al-ḥukamā'*, éd. Julius Lippert (Leipzig: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, 1903).

F. J. Ragep, *Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī: Memoir on Astronomy* (**التذكرة في علم الهيئة**) 2 vols. (New York: Springer Verlag, 1993).

R.Rashed
Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XII[ème] siècle, collection "sciences et philosophie arabes - textes et études", 2 vols. (Paris: Les Belles Lettres, 1986).

"Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham," *Archive for History of Exact Sciences*: vol. 6, no. 4 (1970), pp. 271-298; reprod. Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum reprints (Aldershot, 1992), II.

Les Mathématiques infinitésimales du IXème au XIème siècle, Vol. I : Fondateurs et commentateurs: Banū Mūscā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd (Londres: al-Furqān, 1996); vol. II: *Ibn al-Haytham* (Londres: al-Furqān, 1993); vol. III*: Ibn al-Haytham: Théorie des coniques, constructions géométriques*, al-Furqān, 2000); vol. IV: *Méthodes géométriques*, *transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques* (Londres: al-Furqān, 2002).

Géométrie et Dioptrique au xème siècle: Ibn Sahl - al-Qūhī et Ibn al-Haytham (Paris: Les Belles Lettres, 1993).

Geometry and Dioptrique in Classical Islam (Londres: al-Furqān, 2005).

R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān: Logique et géométrie au Xème siècle* (Leyde: E. J. Brill, 2000).

R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris: Librairie Blanchard, 1999).

A. I. Sabra
Al-Shukūk ʻalā Baṭlamiyūs, éd. A. I. Sabra et N. Shehaby (Le Caire: Dār al-Kutub, 1971).

"Ibn al-Haytham," *Dictionary of Scientific Biography*, vol. VI (New York: Charles Scribner's sons, 1972), pp. 189-210.

"One Ibn al-Haytham or Two?: An Exercise in Reading the Bio-Bibliographical Sources," *Zeitschrift für Geschichte der arabischen-islamischen Wissenschaften*, Band 12 (1998), pp. 1-50.

A. S. Saidan, *Arabic Arithmetic* (**علم الحساب العربي**) (Amman: Université de Jordanie, 1971).

مؤيد الدين العرضي، **تاريخ علم الفلك العربي: مؤيد الدين العرضي (المتوفى سنة ٦٦٤ هـ-١٢٦٦ م): كتاب الهيئة.** تحقيق وتقديم جورج صليبا. (بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٩٠). (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ٢)

M. Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik* (Wiesbaden: Franz Steiner Verlag, 1963).

F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V (Leyde: E. J. Brill, 1976), vol. VI (1978).

Thābit ibn Qurra, Œuvres d'astronomie, texte établi et traduit par Régis Morelon (Paris, Les Belles Lettres, 1987).

ياقوت الحموي. **معجم البلدان.** (بيروت: [د. ت.]). ج ٣.

هذا الكتاب

لقد صدر للأستاذ رشدي راشد، باللغة الفرنسية، خمسة مجلدات، غاية في الضخامة، وتحت عنوان واحد: **الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة** (بين القرنين التاسع والحادي عشر الميلادي).

وقد كرَّس المؤلِّف هذا **المجلد الخامس** لدراسة كتب ابن الهيثم في علم الهيئة. والجدير بالذكر، هنا، هو أن أعمال ابن الهيثم في علم الفلك بقيت مجهولة. ولقد انتهى رشدي راشد في بحثه إلى نتيجةٍ تغيِّر ما نعرفه عن تاريخ علم الهيئة، وهي أن ابن الهيثم قد صاغ تصوّراً جديداً لميكانيكا الأجرام السماوية المعروفة. ولقد بنى ابن الهيثم هذا التصوّر الجديد لعلم الهيئة على دراسة حساب الفروق المنتهية، ودراسة تغيّرات الأعظام وبعض دالات الهندسة الكروية.

كما بيّن المؤلِّف إلى أية درجة كانت بحوث ابن الهيثم في خطوط الساعات أكثر تقدماً من بحوث أسلافه. كما سمحت هذه الدراسة بالكشف عن اتجاهي البحث اللذين برزا بعد انتقاد ابن الهيثم لبطلميوس، وأحدهما أدّى إلى بناء هيئات خالية من التناقضات البطلمية، والثاني أدّى بابن الهيثم نفسه إلى تقديم سينماتيكا سماوية رياضية بشكل تام.

وتبقى **الترجمة العربية** لهذه المجلدات الخمسة، محافظةً، حتى درجة عالية من المسؤولية والحِرَفية، على ما جاء في النص الأصلي (باللغة الفرنسية). وهو جهد جليل للمؤلِّف والمترجمين وفريق العمل العلمي والتقني.

وهو إنجاز تراثي كبير يقدِّمه **مركز دراسات الوحدة العربية**، بالتعاون مع **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية**، إلى القارئ العربي.

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت
فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)
e-mail: info@caus.org.lb
Web site: http://www.caus.org.lb

الثمن للمجموعة الكاملة
للأفراد: ١٠٠ دولار أو ما يعادلها
للمؤسسات: ١٥٠ دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-377-5